

有限深两层流体中内孤立波造波实验及其理论模型*

黄文昊 尤云祥[†] 王旭 胡天群

(上海交通大学, 海洋工程国家重点实验室, 上海 200240)

(2012年8月11日收到; 2012年11月5日收到修改稿)

将置于大尺度密度分层水槽上下层流体中的两块垂直板反方向平推, 以基于 Miyata-Choi-Camassa (MCC) 理论解的内孤立波诱导上下层流体中的层平均水平速度作为其运动速度, 发展了一种振幅可控的双推板内孤立波实验室造波方法. 在此基础上, 针对有限深两层流体中定态内孤立波 Korteweg-de Vries (KdV), 扩展 KdV (eKdV), MCC 和修改的 KdV (mKdV) 理论的适用性条件等问题, 开展了系列实验研究. 结果表明, 对以水深为基准定义的非线性参数 ε 和色散参数 μ , 存在一个临界色散参数 μ_0 , 当 $\mu < \mu_0$ 时, KdV 理论适用于 $\varepsilon \leq \mu$ 的情况, eKdV 理论适用于 $\mu < \varepsilon \leq \sqrt{\mu}$ 的情况, 而 MCC 理论适用于 $\varepsilon > \sqrt{\mu}$ 的情况, 而且当 $\mu \geq \mu_0$ 时 MCC 理论也是适用的. 结果进一步表明, 当上下层流体深度比并不接近其临界值时, mKdV 理论主要适用于内孤立波振幅接近其理论极限振幅的情况, 但这时 MCC 理论同样适用. 本项研究定量地表征了四类内孤立波理论的适用性条件, 为采用何种理论来表征实际海洋中的内孤立波特征提供了理论依据.

关键词: 两层流体, 内孤立波, 双板造波, 临界色散参数

PACS: 47.35.Fg, 47.55.-t, 47.80.Cb, 47.85.Dh

DOI: 10.7498/aps.62.084705

1 引言

内孤立波是最大振幅发生在密度分层海水内部的一种常见海洋动力学现象^[1], 不仅是海洋能量级串中的一个重要环节, 也是影响海洋生产力的关键物理过程之一, 而且对海洋资源的开发、海洋工程、海洋生态环境及渔业捕捞等都有重要的影响^[2]. 非线性和色散效应是密度分层海洋中影响内孤立波传播演化特性的两个基本因素, 非线性效应趋向于使波形变陡, 而色散效应则趋向于使波形变得平坦, 内孤立波的稳定传播是非线性与色散效应在一定尺度上达到平衡的结果, 可以用 KdV (Korteweg-de Vries), eKdV (extended KdV), MCC (Miyata-Choi-Camassa) 和 mKdV (modified KdV) 等理论模型来描述^[3].

KdV 是建立在弱非线性、弱色散且两者平衡条件下的一类内孤立波理论模型, 这是一类在海洋内孤立波特性研究中应用较为广泛的理论模

型, 包括内孤立波在地形作用下的演化特性^[4]、内孤立波的相互作用特性^[5]以及星载 SAR 内孤立波遥感成像及其反演^[6]等. 在 20 世纪 80 年代, Koop 和 Butler^[7], Segur 和 Hammack^[8], Helfrich 和 Melville^[9] 较早地利用密度分层水槽对 KdV 理论的适用性问题进行了实验研究, 他们发现 KdV 理论在较为广泛的内孤立波振幅范围内是有效的, 但在这些文献的实验中内孤立波振幅与水深比实际上都是小于 0.1 的. 其后, 在各种典型上下层流体密度比和深度比情况下, Michallet 和 Barthelemy^[10], Grue 等^[11], Sveen 等^[12] 和 Walker 等^[13] 进一步对此问题进行了实验研究, 结果表明当内孤立波振幅与水深比大于 0.1 时, KdV 理论通常是不适用的.

在 KdV 理论中, 仅保留了平方非线性项, 但随着内孤立波振幅的增大, 高阶非线性项的影响会逐渐增大, 使得非线性和色散效应不再保持平衡^[14], 这正是 KdV 理论不能适用于振幅较大内孤立波的主要原因之一. 克服这个缺陷的一种途径是在 KdV 方程中加入立方非线性项, 所得修正方

* 国家高技术研究发展计划 (批准号: 2010AA09z305) 和高等学校博士学科点专项科研基金 (批准号: 20110073130003) 资助的课题.

[†] 通讯作者. E-mail: youyx@sjtu.edu.cn

程称为 eKdV 方程. Michallet 和 Barthelemy^[10] 以及 Grue 等^[11] 对 eKdV 理论的适用性问题进行了实验研究, 结果表明, 当振幅与水深比大于 0.1 时, eKdV 理论在较为广泛的内孤立波振幅范围内是有效的. 鉴于 eKdV 理论可以适用于较大振幅内孤立波的这个优点, 目前该理论模型已被广泛应用于实际海洋中内孤立波在地形作用下演化特性等方面的数值模拟与分析^[15,16].

需要指出的是, 当上下层流体深度比接近其临界值时, KdV 理论不再适用^[3]. 为此, 在自由面刚盖假设下, Funakoshi 和 Oikawa^[17] 对 KdV 方程进行修正, 建立了在上下层流体深度比接近其临界值时仍可适用的定态内孤立波理论, 而 Michallet 和 Barthelemy^[10] 则将该理论进一步推广到含自由面的情况, 并将其称为 mKdV 理论. 在各种典型上下层流体密度比和深度比情况下, Michallet 和 Barthelemy^[10] 对 mKdV 理论的适用性问题进行了实验研究, 结果表明, 在上下层流体深度比接近其临界值的情况下, mKdV 理论是适用的, 而且与实验结果相符. Xu 等^[18] 对南海北部某海域的内孤立波进行了现场观测, 其中内孤立波振幅与水深比范围为 0.2—0.3, 结果表明实测内孤立波特征与 mKdV 理论预测结果符合.

但 eKdV 和 mKdV 理论依然是建立在弱非线性和弱色散条件下的, 为克服这两类理论中需要弱非线性这个限制性条件的缺陷, 从完全非线性欧拉方程出发, 在底部平坦有限水深和无限水深的情况下, 将色散项精确到一阶, Choi 和 Camassa^[19] 建立了一个强非线性和弱色散的两层 Green-Naghdi 模型, 在定态条件下该模型与 Miyata^[20] 采用守恒律建立的内孤立波理论相同, 因此将其称为 MCC 理论^[3]. Ruiz 和 Nachbin^[21] 将该理论进一步推广到底部非平坦有限水深的情况, 而 Debsarma 等^[22] 则将色散项精确到二阶, 建立了强非线性和强色散条件下的内孤立波 MCC 理论. 在各种典型上下层流体密度比和深度比情况下, Camassa 等^[23] 对 MCC 理论的适用性问题进行了实验研究, 结果表明在强非线性和弱色散情况下, MCC 理论结果与实验及基于欧拉方程的完全非线性数值模拟结果相符.

需要指出的是, 如上所述的四类内孤立波理论均是在弱色散条件下建立的, 而对内孤立波的 KdV, eKdV 和 mKdV 理论, 还需要弱非线性这个限制性条件. 然而, 从这些理论实际应用的角度, 如何来定

量地表征弱非线性和弱色散这个两个迄今还只是定性描述的限制性条件, 并以此为基础来定量地表征各种理论可以适用的非线性和色散参数的组合条件, 这无疑是具有重要理论和实用意义的, 但相关问题迄今尚不清楚.

采用模型实验方法是研究和解决上述这些问题的的重要手段之一, 其中内孤立波的实验室模拟是一个关键问题. 在密度分层水槽中, 目前常用的内孤立波造波方法主要有抽板式^[10]、捶击式^[13]和推板式^[24]等, 这些方法的基本原理是对静止的密度分层流体施加一个瞬态的扰动, 从而在密度分层流体界面上产生内孤立波. 然而, 现有的这些方法具有缺陷, 即“扰动”的施加是人为的, 过程很难控制, 通常由操作人员的经验所决定, 因此难以稳定地控制扰动的大小和持续时间, 以产生振幅等参数可控的内孤立波. 因此, 为了定量地表征各种定态内孤立波理论的适用性条件, 实现振幅可控内孤立波的实验室模拟将是一个需要解决的关键问题.

有鉴于此, 本文基于 MCC 理论, 将内孤立波诱导上下层流体中的层平均水平速度作为两块推板的运动速度, 发展了一种基于大尺度密度分层水槽的振幅可控的双推板内孤立波实验室造波方法. 在此基础上, 结合内孤立波系列实验结果, 定量地表征弱非线性和弱色散这两个限制性条件, 并给出四类内孤立波理论可以适用的非线性和色散参数的组合条件. 同时, 还对内孤立波生成及其传播特性等问题进行分析和研究.

2 内孤立波理论

设各层流体均为理想不可压且无旋的, 在流体处于静平衡状态时, 上层流体深度与密度分别为 h_1 和 ρ_1 , 下层流体深度与密度分别为 h_2 和 ρ_2 . 建立直角坐标系 oxz , ox 轴位于流体静止时两层流体的分层界面上, oz 轴垂直向上为正. 非线性和色散效应是密度分层海洋中影响内孤立波传播演化特性的两个基本因素. 其中, 非线性参数是一个表征内孤立波陡峭程度的无量纲量, 而色散参数是一个表征内孤立波平坦程度的无量纲量. 设 a 和 λ 分别为内孤立波振幅与特征波长, H 为垂向特征尺度, 定义非线性参数 $\varepsilon = |a|/H$ 和色散参数 $\mu = (H/\lambda)^2$. 当考虑无限水深情况时, 垂向特征尺度 H 取为上层流体高度 h_1 ; 当考虑有限水深情况时, 垂向特征尺度

H 通常取为总水深 h . 本文考虑有限深两层流体中内孤立波的传播与演化问题, 因此以总水深 h 为基准定义非线性参数 ε 和色散参数 μ .

对相关物理参数做如下无量纲变换

$$x = \lambda x', \quad z = h z', \quad \zeta = |a| \zeta', \quad h_i = h h'_i, \quad (1)$$

$$\phi_i = \left(a \lambda \sqrt{gh/h} \right) \phi'_i, \quad t = \left(\lambda / \sqrt{gh} \right) t', \quad (2)$$

其中, $i = 1, 2$ 分别表示上层和下层流体, 撇号表示无量纲参数, ζ 为界面位移, ϕ_i 分别为第 i 层流体中的速度势, t 为时间, g 为重力加速度.

在实际海洋中, 上下层流体的密度差一般不超过 3%. 当内孤立波在密度跃层中传播时, 其在自由面诱导的垂相速度很小, 因此水表面一般地可以做刚盖假定^[19]. 为此, 设水底为不可渗透平坦的刚性固壁, 无量纲化后的控制方程可表示为

$$\mu \partial_x^2 \phi_1 + \partial_z^2 \phi_1 = 0 \quad (\varepsilon \zeta < z < h_1), \quad (3)$$

$$\mu \partial_x^2 \phi_2 + \partial_z^2 \phi_2 = 0 \quad (-h_2 < z < \varepsilon \zeta), \quad (4)$$

$$\partial_t \zeta + \frac{1}{\mu} (\mu \varepsilon (\partial_t \zeta) (\partial_x \phi_i) - \partial_z \phi_i) = 0 \quad (z = \varepsilon \zeta), \quad (5)$$

$$\partial_t \phi_i + \frac{1}{2} \varepsilon (\partial_x \phi_i)^2 + \frac{\varepsilon}{\mu} (\partial_z \phi_i)^2 + \zeta = -\frac{p}{\rho_i g |a|} \quad (z = \varepsilon \zeta), \quad (6)$$

$$\partial_z \phi_1 = 0 \quad (z = h_1), \quad \partial_z \phi_2 = 0 \quad (z = -h_2), \quad (7)$$

其中, p 为界面压力.

(3) 和 (4) 式分别为上下层流体中的 Laplace 方程, (5) 和 (6) 式分别为界面运动学和动力学条件, (7) 式中的两个方程分别为自由面和底部条件. 对控制方程 (3)—(7) 分别在上下层流体中做深度平均积分, 在弱色散条件 ($\mu \ll 1$) 下, 可得到层平均方程如下^[19]:

$$\zeta_t - (\bar{h}_1 \bar{u}_1)_x = 0, \quad \zeta_t + (\bar{h}_2 \bar{u}_2)_x = 0, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & \bar{u}_{1t} + \varepsilon \bar{u}_1 \bar{u}_{1x} + \zeta_x \\ &= -\frac{p_x}{\rho_1 g |a|} + \frac{\mu}{3 \bar{h}_1} \left(\bar{h}_1^3 \left(\bar{u}_{1xt} + \varepsilon \bar{u}_1 \bar{u}_{1xx} - \varepsilon (\bar{u}_{1x})^2 \right) \right)_x, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & \bar{u}_{2t} + \varepsilon \bar{u}_2 \bar{u}_{2x} + \zeta_x \\ &= -\frac{p_x}{\rho_2 g |a|} + \frac{\mu}{3 \bar{h}_2} \left(\bar{h}_2^3 \left(\bar{u}_{2xt} + \varepsilon \bar{u}_2 \bar{u}_{2xx} - \varepsilon (\bar{u}_{2x})^2 \right) \right)_x, \end{aligned} \quad (10)$$

其中

$$\bar{u}_i(x, t) = \frac{1}{\bar{h}_i} \int_{\varepsilon \zeta}^{h_i} \partial_x \phi_i(x, z, t) dz,$$

$$\bar{h}_1 = h_1 - \varepsilon \zeta, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_2(x, t) &= \frac{1}{\bar{h}_2} \int_{-h_2}^{\varepsilon \zeta} \partial_x \phi_2(x, z, t) dz, \\ \bar{h}_2 &= h_2 + \varepsilon \zeta, \end{aligned} \quad (12)$$

在 (11) 和 (12) 式中, \bar{u}_1 和 \bar{u}_2 分别为上下层流体中的层平均水平速度. 方程 (8)—(10) 即为内孤立波传播与演化的两层 Green-Naghdi 模型. 其中, 方程 (8) 是精确满足的, 在弱色散条件下, 方程 (9) 和 (10) 有误差 $O(\mu^2)$.

设内孤立波为永形波, 以波速 c 沿 ox 轴正方向传播, 做如下变换

$$\zeta(x, t) = \zeta(X), \quad \bar{u}_i(x, t) = \bar{u}_i(X), \quad X = x - ct. \quad (13)$$

将其代入 (8)—(10) 式, 可得如下定态内孤立波解, 称为 MCC 理论解^[19]

$$\begin{aligned} (\zeta_X)^2 &= \left[\frac{3g(\rho_2 - \rho_1)}{c_{\text{mcc}}^2 (\rho_1 h_1^2 - \rho_2 h_2^2)} \right] \\ &\times \frac{\zeta^2 (\zeta - a_-) (\zeta - a_+)}{\zeta - a_*}, \end{aligned} \quad (14)$$

其中, c_{mcc} 为内孤立波 MCC 理论解的相速度, a_* 为

$$a_* = -\frac{-h_1 h_2 (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2)}{\rho_1 h_1^2 - \rho_2 h_2^2}, \quad (15)$$

a_- 和 a_+ ($a_- < a_+$) 分别为下方方程的两个根

$$\zeta^2 + q_1 \zeta + q_2 = 0, \quad (16)$$

式中

$$\begin{aligned} q_1 &= -c_{\text{mcc}}^2/g - h_1 + h_2, \\ q_2 &= h_1 h_2 (c_{\text{mcc}}^2/c_0^2 - 1), \\ c_0^2 &= \frac{gh_1 h_2 (\rho_2 - \rho_1)}{\rho_1 h_2 + \rho_2 h_1}, \\ \frac{c_{\text{mcc}}^2}{c_0^2} &= \frac{(h_1 - a)(h_2 + a)}{h_1 h_2 - (c_0^2/g)a}. \end{aligned} \quad (18)$$

由于 ζ 是有界的, $(\zeta_X)^2$ 非负, 由 (14) 式可知, 当 $\rho_1 h_1^2 > \rho_2 h_2^2$ 时, 内孤立波是上凸波; 当 $\rho_1 h_1^2 < \rho_2 h_2^2$ 时, 内孤立波是下凹波. 当 $\varepsilon = O(\mu) \ll 1$, 即当内孤立波是弱非线性、弱色散且两者平衡时, 两层 Green-Naghdi 模型可化为如下熟知的 KdV 方程^[19]

$$\zeta_t + c_0 \zeta_X + c_1 \zeta \zeta_X + c_2 \zeta \zeta_{XX} = 0, \quad (19)$$

其中

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{3c_0}{2} \frac{\rho_1 h_2^2 - \rho_2 h_1^2}{\rho_1 h_1 h_2^2 + \rho_2 h_1^2 h_2}, \\ c_2 &= \frac{c_0}{6} \frac{\rho_1 h_1^2 h_2 + \rho_2 h_1 h_2^2}{\rho_1 h_2 + \rho_2 h_1}. \end{aligned} \quad (20)$$

方程 (19) 有如下定态内孤立波解, 称为 KdV 理论解

$$\zeta = a \operatorname{sech}^2(\lambda_{\text{KdV}}(x - c_{\text{KdV}}t)),$$

$$\lambda_{\text{KdV}} = \sqrt{\frac{ac_1}{12c_2}}, \quad c_{\text{KdV}} = c_0 + \frac{ac_1}{3}, \quad (21)$$

其中, c_{KdV} 为内孤立波 KdV 理论解的相速度.

对 KdV 理论, 由于要求非线性与色散性是平衡的, 因此在方程 (19) 中仅保留了 $O(\varepsilon)$ 阶的平方非线性项, 但对大振幅内孤立波, 两者并不一定是平衡的, 而且 $O(\varepsilon^2)$ 阶项的影响将是显著的, 这时需要对 KdV 方程进行修正, 即在方程 (19) 中加入一个具有 $O(\varepsilon^2)$ 阶的立方非线性项, 可得所谓的 eKdV 方程^[3]

$$\zeta_t + (c_0 + c_1\zeta + c_3\zeta^2)\zeta_x + c_2\zeta_{xxx} = 0, \quad (22)$$

其中

$$c_3 = \frac{3c_0}{h_1^2 h_2^2} \left(\frac{7}{8} \left(\frac{\rho_1 h_2^2 - \rho_2 h_1^2}{\rho_1 h_2 + \rho_2 h_1} \right)^2 - \frac{\rho_1 h_2^3 + \rho_2 h_1^3}{\rho_1 h_2 + \rho_2 h_1} \right). \quad (23)$$

在方程 (22) 中, 立方非线性项是 $O(\varepsilon^2)$ 阶的, 因此 eKdV 理论已不再满足非线性与色散性平衡这个条件. 方程 (22) 有如下定态内孤立波解, 称为 eKdV 理论解^[3]

$$\zeta = \frac{a}{B + (1 - B) \cosh^2[\lambda_{\text{eKdV}}(x - c_{\text{eKdV}}t)]}, \quad (24)$$

其中

$$c_{\text{eKdV}} = c_0 + \frac{a}{3} \left(c_1 + \frac{1}{2} c_3 a \right),$$

$$\lambda_{\text{eKdV}}^2 = \frac{a \left(c_1 + \frac{1}{2} c_3 a \right)}{12c_2},$$

$$B = \frac{-ac_3}{2c_1 + ac_3}, \quad (25)$$

其中, c_{eKdV} 为内孤立波 eKdV 理论解的相速度.

由 (25) 式可知, 当 $c_3 = 0$ 时, eKdV 理论解 (24) 式即退化为 KdV 理论解. 定义 $(h_1/h_2)_c = \sqrt{\rho_1/\rho_2}$ 为临界深度比, 那么当 $h_1/h_2 \rightarrow (h_1/h_2)_c$ 时, 由于 $c_2 \rightarrow 0$, 因此 KdV 理论不再适用. 为克服这个缺陷, 可以采用如下的 mKdV 理论解^[10]

$$\zeta = \frac{a \operatorname{sech}^2[\lambda_{\text{mKdV}}(x - c_{\text{mKdV}}t)]}{1 - \mu \tanh^2[\lambda_{\text{mKdV}}(x - c_{\text{mKdV}}t)]}, \quad (26)$$

其中

$$\mu = \begin{cases} h''/h' & \bar{h} > 0 \\ h'/h'' & \bar{h} < 0 \end{cases}, \quad \bar{h} = h_2 - h_c,$$

$$h_c = \frac{h}{1 + \sqrt{\rho_1/\rho_2}}, \quad (27)$$

$$h' = -\bar{h} - |\bar{h} + a|, \quad h'' = -\bar{h} + |\bar{h} + a|,$$

$$\lambda_{\text{mKdV}} = \frac{1}{2(h - h_c)} \left(\frac{3hh'h''}{(h - h_c)^3 + h_c^3} \right)^{1/2}, \quad (28)$$

$$c_{\text{mKdV}} = c_{0m} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{h} + a}{h - h_c} \right)^2 \right),$$

$$c_{0m} = \left\{ \frac{gh}{2} \left[1 - \left(1 - \frac{4(\rho_2 - \rho_1)h_c(h - h_c)}{\rho_2 h^2} \right)^{1/2} \right] \right\}^{1/2}, \quad (29)$$

其中, c_{mKdV} 为内孤立波 mKdV 理论解的相速度.

对于 KdV 理论解来说, 只要 $h_1/h_2 \neq (h_1/h_2)_c$, 则不存在极限振幅, 即无论振幅有多大, 该理论均能给出对应的内孤立波解. Camassa 等^[23]指出, KdV 理论无极限振幅的这个缺陷, 正是其不能适用于大振幅内孤立波的原因之一. 与 KdV 理论的一个重要的不同之处是, 其他三类内孤立波理论均存在极限振幅, 其中 MCC 和 mKdV 理论解的极限振幅均为^[10,23]

$$a_{\text{max}}^{\text{mcc}} = a_{\text{max}}^{\text{mKdV}} = \frac{h_1 \sqrt{\rho_2/\rho_1} - h_2}{\sqrt{\rho_2/\rho_1} + 1}, \quad (30)$$

而 eKdV 理论解的极限振幅为^[25]

$$a_{\text{max}}^{\text{eKdV}} = \frac{4h_1 h_2 (h_1 - h_2)}{h_1^2 + h_2^2 + 6h_1 h_2}. \quad (31)$$

在上述四个理论中, 均要求 $\mu \ll 1$, 即内孤立波是弱色散的. 在 MCC 理论中, 对非线性参数 ε 没有任何限制性要求, 即这是关于定态内孤立波的一类强非线性和弱色散理论, 而在其他三个理论中, 均要求定态内孤立波是弱非线性和弱色散的, 它们之间的主要区别是: 在 KdV 理论中只考虑了平方非线性项的影响, 而且要求非线性与色散性平衡, 而在 mKdV 和 eKdV 理论中, 同时还考虑了立方非线性项的影响, 而且不要求非线性与色散性平衡. 本文的主要目的是通过系列实验, 确定这四类内孤立波理论的适用性条件, 并对各种不同上下层流体深度比及振幅下的内孤立波特性和研究.

3 实验方法

实验在上海交通大学海洋工程国家重点实验室密度分层水槽中进行, 水槽主尺度为 30 m × 0.6 m × 1.2 m (长、宽和高), 密度分层

采用注流式方法, 实验水深为 $h = 1.0 \text{ m}$. 在水槽中首先注入深度为 h_1 的淡水, 密度为 $\rho_1 = 998 \text{ kg/m}^3$, 然后由水泵将密度为 $\rho_2 = 1025 \text{ kg/m}^3$ 的盐水通过水槽底部的两个蘑菇型进口, 缓慢地注入水槽中, 直到水槽中的水深达到 h 为止. 在图 1 中, 给出了当 $h_1 : h_2 = 2 : 8$ 时水槽中分层流体密度剖面的测量结果, 以及相应浮频率剖面的结果. 其中, 浮频率由 $N(z) = \sqrt{(g/\rho_1)(\partial\rho/\partial z)}$ 计算, ρ 为垂向密度分布.

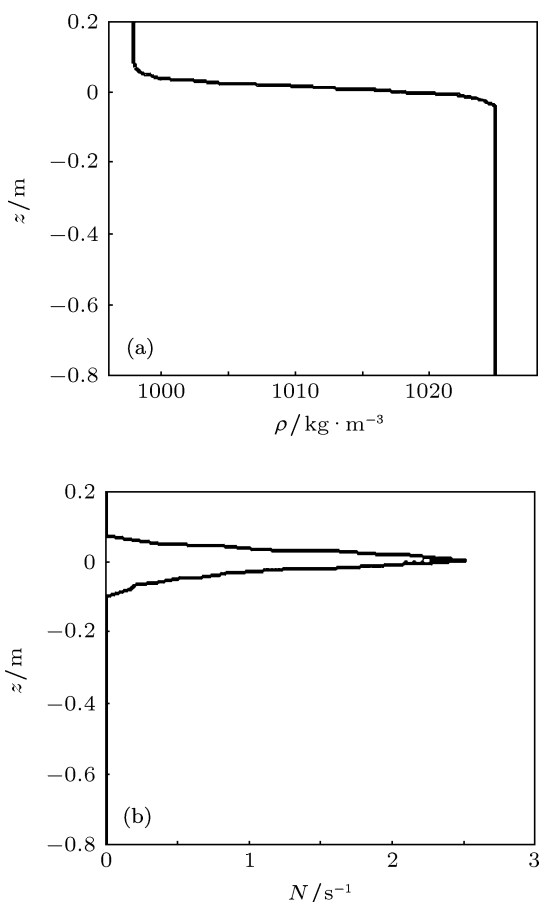


图 1 当 $h_1 : h_2 = 2 : 8$ 时, 水槽中分层流体密度剖面 (a) 及浮频率剖面 (b)

由图 1 可知, 这是一个典型的三层流体系统,

包括一个上混合层及一个下混合层, 中间是一个密度连续变化的过渡层. 如果以最大浮频率所在流体层为界, 则在该流体层上方部分的深度正好为 h_1 , 而下方部分的深度则为 $h_2 = h - h_1$. 鉴于这个事实, 以最大浮频率所在流体层为界, 将水槽中的密度分层流体简化为一个两层流体系统, 则上层流体深度与密度正好分别为 h_1 和 ρ_1 , 而下层流体深度与密度则分别为 h_2 和 ρ_2 . 由此可见, 采用注流式技术, 可以实现按照指定界面位置进行密度分层的要求.

采用双推板方法进行内孤立波实验室造波, 其基本原理如下: 在水槽一端安装与其等宽的两块推板, 推板高度分别与上下层流体深度相同. 两块推板以各自的速度反向运动, 使水槽内的两层流体产生反向流动, 从而在密度分层流体界面上产生上凸或下凹的内孤立波. 推板的速度和行程由电脑控制终端进行控制, 因此可以主动地产生所预期的内孤立波. 同时, 在水槽另一端还安装有一个楔型消波器, 对内孤立波进行消波, 如图 2 所示. 根据上述原理的内孤立波造波机现已安装于上海交通大学海洋工程国家重点实验室的密度分层水槽中, 整个造波机系统由两块高度可调的推板以及导轨、履带和伺服电机及其控制系统等组成.

这种双推板内孤立波造波的基本思想最早由 Wessels 和 Hutter 提出^[24], 在他们设计的双推板造波机原型中, 上推板伸出水面, 上下推板各自先匀加速到某个值, 然后再匀减速直到停止, 其速度与时间曲线呈三角形分布. 然而, 该造波方法存在如下一些缺陷: 首先由于上推板伸出水面, 当其运动时, 会对自由面产生很大的扰动, 甚至还会产生表面孤立波, 与理论中要求的刚盖假设不符; 其次, 在两块推板做加速和减速运动过程中, 需要最大速度及其行程两个控制参数, 而这两个控制参数与内孤立波期望振幅之间的关系很难准确给出, 即难以做到振幅可控的内孤立波造波.

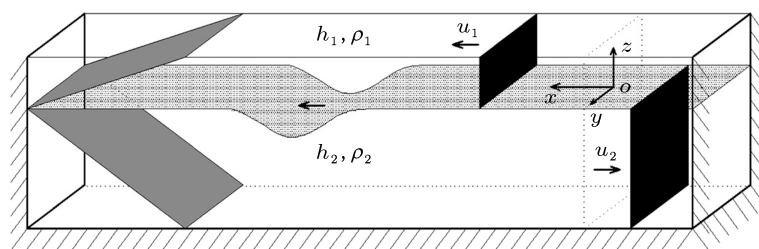


图 2 双推板内孤立波造波原理

为此, 作者对这种双推板式内孤立波造波机进行了如下两个方面的改进: 首先将上推板的高度设置为上层流体的深度, 同时采用一块盖板将上推板运动可能会影响的水面部分盖住, 以减小上推板的运动对自由面的影响, 进而模拟理论中的刚盖假设; 其次, 以基于 MCC 理论解的内孤立波诱导上下层流体中的层平均水平速度作为两块推板的运动速度, 仅用内孤立波设计振幅一个参数对两块推板的运动方式进行主动控制, 进而产生波形稳定且振幅可控的内孤立波, 具体方法如下.

设 a_d 为内孤立波的设计振幅, ζ 为在该设计振幅下由 MCC 理论解计算得到的内孤立波界面位移, 则其在上下层流体中诱导的层平均水平速度可分别表示为 [19]

$$\bar{u}_1 = -c_{mcc} \frac{\zeta}{h_1}, \quad \bar{u}_2 = c_{mcc} \frac{\zeta}{h_2}. \quad (32)$$

让上推板速度取为内孤立波在上层流体中诱导的层平均水平速度 \bar{u}_1 , 下推板速度取为内孤立波在下层流体中诱导的层平均水平速度 \bar{u}_2 . 对下凹型内孤立波, 由 (32) 式可知, $\bar{u}_1 > 0$, 而 $\bar{u}_2 < 0$, 此时让上推板向左运动, 而下推板则向右运动. 对上凸型内孤立波, 由 (32) 式可知, $\bar{u}_1 < 0$, 而 $\bar{u}_2 > 0$, 此时让上推板向右运动, 而下推板则向左运动. 因此, 采用这种双推板方式, 既可以产生下凹型也可以产生上凸型的振幅可控内孤立波. 有关设计振幅的确定方法, 将在下一节中予以详细介绍.

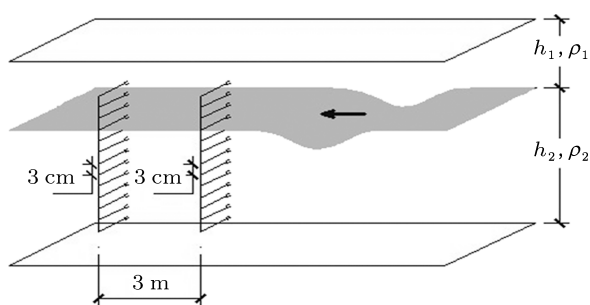


图3 电导率探头阵列

采用专门研制的内波动态测量系统对内孤立波进行测量与分析. 在造波机前方某个位置相隔 $\Delta x = 3.0 \text{ m}$ 的距离, 分别布置两组电导率探头阵列, 每组探头的垂向间距均为 0.03 m , 各阵列均由 13 个电导率探头组成. 利用各阵列中电导率探头测量得到的密度扰动信号, 经处理获得最大浮频率所在流体层处密度变化的时历, 进而可获得内孤立波的

波形、振幅、特征宽度及其相速度等信息. 内孤立波相速度的确定方法如下: 设 Δt 为内孤立波波峰经过两个电导率探头阵列的时间, 那么其相速度可由 $c = \Delta x / \Delta t$ 确定.

4 结果与分析

在密度稳定层化流体中, 上下层流体深度比及其密度比是影响内孤立波特性的两个重要参数. 由于实际海洋中上下层流体的密度比接近其临界值 1, 因此本文重点考察深度比的影响. 为此, 针对 $h_1 : h_2 = 1 : 9, 2 : 8$ 和 $3 : 7$ 这三种上下层深度比的情况, 开展了系列实验. 在本文实验中, $\rho_1 = 998 \text{ kg/m}^3, \rho_2 = 1025 \text{ kg/m}^3$, 在这三种上下层流体深度比下, 均有 $h_1/h_2 < \sqrt{\rho_1/\rho_2}$, 因此内孤立波都属于下凹型的 [19]. 需要指出的是, 在实际海洋中, 下凹型内孤立波是最常见的一种现象. 此外, 关于上下层流体深度比接近其临界值时 mKdV 理论的适用性问题, 在文献 [10] 中已有详细的讨论, 因此在本文中不再考虑这个方面的相关问题. 在本节中, 重点给出内孤立波设计振幅确定方法及各种内孤立波理论适用性条件等方面的实验结果.

4.1 内孤立波设计振幅确定方法

首先给出内孤立波生成过程的实验结果. 为此, 在密度分层时, 在深度为 h_1 的淡水中加入适量红色染料, 然后再缓慢地从水槽底部注入盐水进行密度分层, 在内孤立波造波过程中, 用高清数码摄像机记录内孤立波的生成与传播过程, 并结合电导率探头阵列技术, 对其相关特性进行测量与分析. 在图 4 中, 给出了当 $h_1 : h_2 = 2 : 8$ 和设计振幅 $|a_d|/h = 0.23$ 时内孤立波生成与传播过程的实验结果, 其中深色为上层流体, 浅色为下层流体. 同时, 还给出了相应内孤立波波形的电导率阵列测量结果

由图 4 可知, 在上推板向左而下推板向右运动过程中, 为保持流体质量的守恒, 上层流体产生向下塌陷现象, 形成一个下凹型鼓包. 在两块推板的运动结束后, 下凹型鼓包在约化重力作用下形成一个向水槽左方传播的内孤立波, 称为先导内孤立子, 而且在先导内孤立子传播过程中其波形稳定、振幅衰减很小. 需要指出的是, 先导内孤立子的振幅要比设计振幅 a_d 小很多, 产生这种现象的主要原因是在造波过程中有一部分能量会损失形成尾波

列等现象所致,如图 5 所示. 在本文系列实验中,均发现在先导内孤立子主峰过后,还会有若干个振幅逐渐减小的尾波列跟随其后的现象,而且随着设计振幅的增大,尾波列的振幅也随着增大,这与实际海洋中的内孤立波特征相符. 尾波列产生的主要原因是在推板停止运动后,在两块推板之间的造波区仍有水体扰动所致.

设当设计振幅为 a_d 时,由双推板造波机产生的先导内孤立子实测振幅为 a_m . 在图 6 中,给出了当 $h_1 : h_2 = 1 : 9, 2 : 8$ 和 $3 : 7$ 时,实测振幅 a_m 与设计振幅 a_d 之间相关关系的系列实验结果. 由图 6 可知,在各实验工况下,设计振幅均要比实测振幅大,但两者之间近似为线性关系,而且其斜率随着上下层流体深度比的增大而增大.

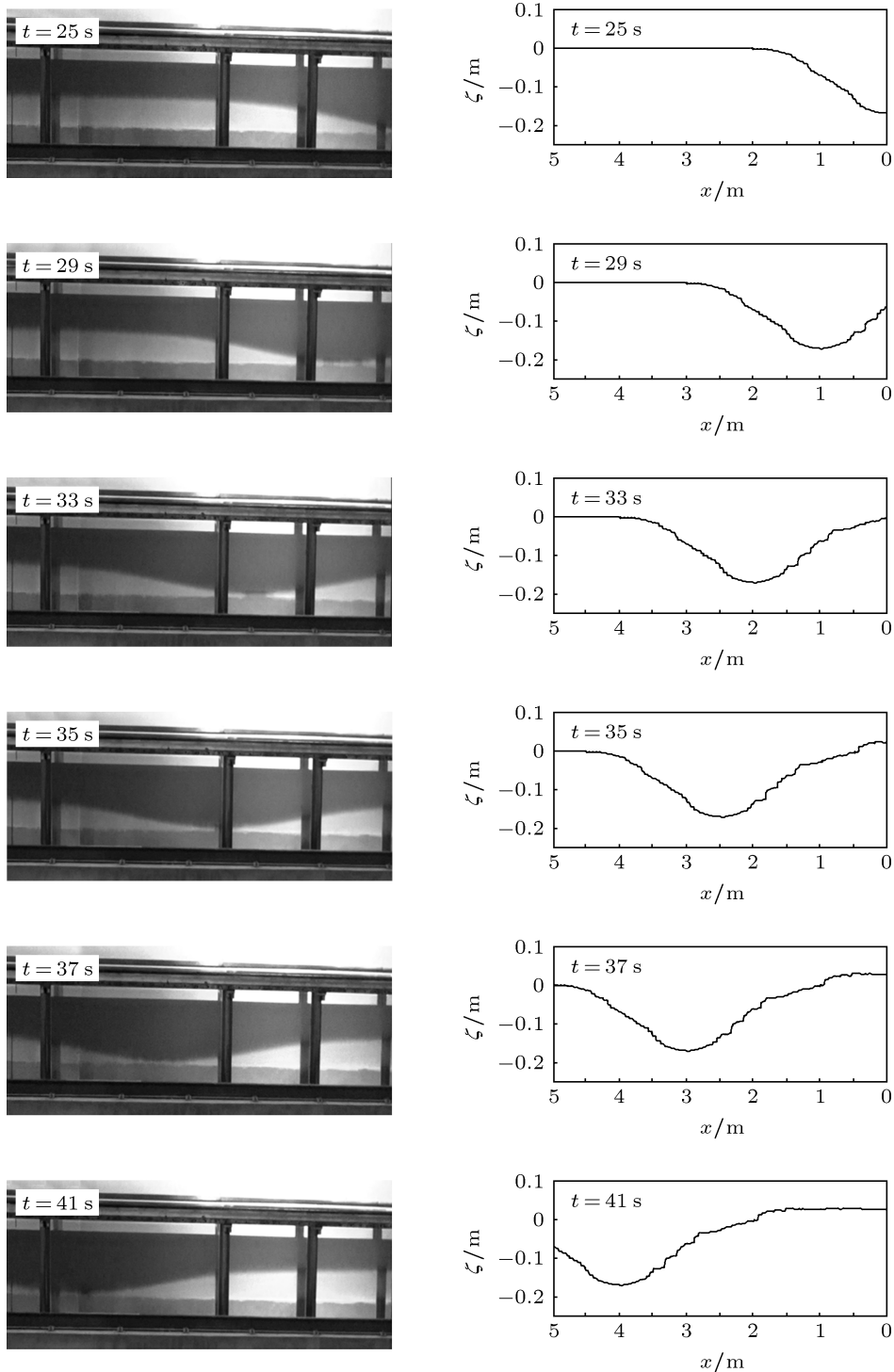


图 4 当 $h_1 : h_2 = 2 : 8$ 和 $|a_d|/h = 0.23$ 时,内孤立波生成与传播过程的实验结果

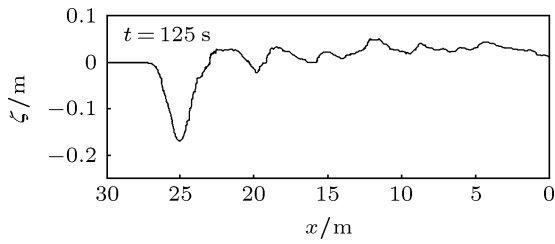


图5 当 $h_1:h_2 = 2:8$ 和 $|a_d|/h = 0.23$ 时, 先导内孤立子及其尾波列现象

进一步设 a_h 为当设计振幅 a_d 时采用双推板方法所得先导内孤立子的期望振幅, 则由上述结果可知, 期望振幅 a_h 与设计振幅 a_d 之间具有如下形式的线性关系:

$$a_d/h = k \times (a_h/h) + b, \quad (33)$$

$$k = k(h_1/h_2), \quad b = b(h_1/h_2),$$

上式中的斜率和截距可通过设计各种不同上下层流体深度比经系列实验后确定. 利用本文三个上下层深度比的实验结果, 采用数据回归分析方法, 可得 (33) 式中的斜率与截距分别为: 当 $h_1:h_2 = 1:9$ 时, $k = 1.278, b = -0.014$; 当 $h_1:h_2 = 2:8$ 时, $k = 1.181, b = -0.031$; 当 $h_1:h_2 = 3:7$ 时, $k = 1.081, b = -0.020$. (33) 式实际上就是本文所述双推板内孤立波造波机的传递函数, 在实际使用时, 设期望的先导内孤立子振幅为 a_h , 根据上下层深度比, 利

用 (33) 式计算所需的设计振幅 a_d , 在该设计振幅下由 MCC 理论解确定内孤立波界面位 ζ , 再由 (32) 式计算上下两块推板的运动速度 \bar{u}_1 和 \bar{u}_2 , 然后由两块造波板的伺服控制系统驱动其运动, 进行振幅可控的内孤立波造波.

在表 1 中, 给出了当 $h_1:h_2 = 2:8$ 时, 利用传递函数 (33) 式进行内孤立波造波所得实测振幅与期望振幅的比较, 其中误差为 $e = |(a_h - a_m)/a_h|$. 由表 1 可知, 当利用传递函数 (33) 式进行双推板内孤立波造波时, 所得实测振幅与期望振幅之间的误差可以控制在 5% 以内. 由此可见, 本文所述双推板方法, 可以做到内孤立波振幅可控, 而且先导内孤立子在其传播过程中波形稳定、振幅衰减很小.

注意到, 当 $h_1:h_2 = 2:8$ 时, 由 (30) 式可得, 内孤立波 MCC 和 mKdV 理论解的极限振幅为 $|a_{max}^{mcc}|/h = 0.2783$; 由 (31) 式可得, 内孤立波 eKdV 理论解的极限振幅为 $|a_{max}^{eKdV}|/h = 0.2341$. 由图 6 可知, 利用本文所述双推板造波机所获先导内孤立波的最大振幅可达 $|a_m|/h = 0.2492$, 超过 eKdV 理论解的极限振幅, 接近 MCC 和 mKdV 理论解的极限振幅, 而采用传统的抽板式和捶击式等造波方法是很难获得这种大振幅内孤立波的, 这表明本文所述双推板内孤立波造波方法具有更好的实用性.

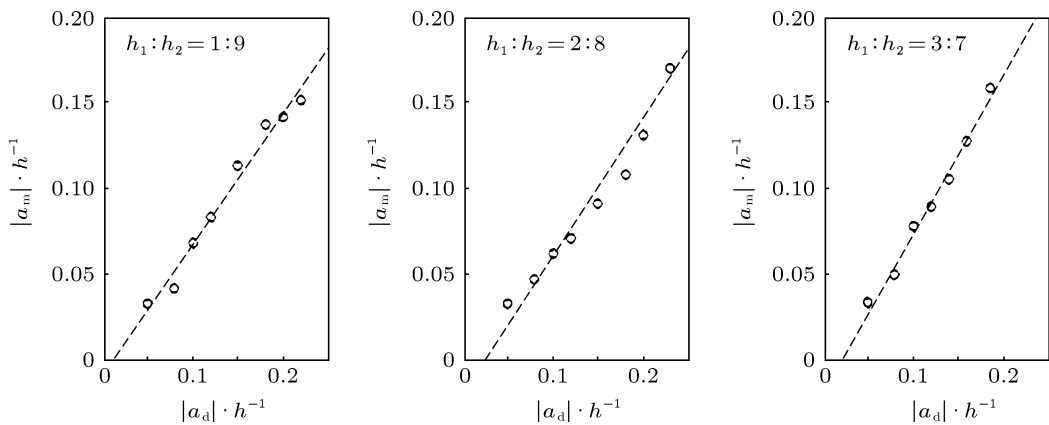


图6 先导内孤立子实测振幅与设计振幅之间的相关关系

表1 当 $h_1:h_2 = 2:8$ 时, 期望振幅与实测振幅的比较

工况序号	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
$ a_h \cdot h^{-1}$	0.050	0.080	0.120	0.150	0.180	0.200	0.240
$ a_m \cdot h^{-1}$	0.048	0.077	0.115	0.146	0.174	0.194	0.228
$e/\%$	4.60	4.00	4.42	2.47	3.44	3.00	5.00

4.2 四类内孤立波理论的适用性条件

非线性参数 ε 和色散参数 μ 是影响内孤立波波形的两个主要参数. 在第 2 节所述四类内孤立波理论中, 均要求内孤立波是弱色散的, 即 $\mu \ll 1$. 在本小节中, 将对该弱色散性条件进行量化表征. 在此基础上, 根据非线性参数 ε 的不同取值范围, 将这种弱色散内孤立波分为如下三种类型: 弱非线性和弱色散波, $\varepsilon \leq \mu$; 中等非线性和弱色散波, $\mu < \varepsilon \leq \sqrt{\mu}$; 强非线性和弱色散波, $\varepsilon > \sqrt{\mu}$. 此外, 在实际情况下, 还有可能会出现不满足 $\mu \ll 1$ 的情况, 将其称为强色散波. 在下文中, 将针对这四种分类情况, 利用本文系列实验结果, 采用实验与理论解波形比较的方法, 给出第 2 节中所述四类内孤立波理论的适用性条件.

在表 2 中, 给出了当 $h_1 : h_2 = 2 : 8$ 时的实验结果. 在表中各实验工况下, 均有 $\mu < 0.1$, 将其定义为弱色散的. 根据 ε 和 μ 之间的关系, 可将其分为如下三种情况.

弱非线性和弱色散的情况: $\mu < 0.1, \varepsilon \leq \mu$. 在这种情况下, 由于内孤立波振幅较小, 其非线性效应较弱, 可以用只保留了二阶非线性项的 KdV 理论来表征该情况下的内孤立波特征. 在图 7(a) 中, 给出了当 $|a_m| = 4.74$ cm 时, 实验获得的内孤立波波形与四类理论解的比较. 由图可知, 在四种内孤立波理论中, KdV 理论解的波形与实验结果符合最好, eKdV 和 MCC 理论解的波形均比实验波形要宽, 其中 mKdV 理论解的波形最宽, 已经与实验结果偏离甚远, 表明 mKdV 理论对于这种弱非线性和弱色散内孤立波是不适用的.

中等非线性和弱色散的情况: $\mu < 0.1, \mu < \varepsilon \leq \sqrt{\mu}$. 随着内孤立波振幅的增大, 其非线性的影响逐渐显著, 此时在弱非线性、弱色散且两者平衡条件下的 KdV 理论已不再适用, 需要考虑含有更高阶非线性项的内孤立波理论, 如保留了立方非线性项的 eKdV 理论等. 在图 7(b) 中, 给出了当 $|a_m| = 13.04$ cm 时, 实验获得的内孤立波波形与四类内孤立波理论解的比较. 由图可知, 在四种内孤立波理论中, 实验波形介于 KdV 和 MCC 理论解的波形之间, 与 eKdV 理论解的波形符合最好. 虽然在 mKdV 理论中也考虑了立方非线性项的影响, 但由图可见, mKdV 理论与 eKdV 理论理论解的波形差异很大, 因此 mKdV 理论对中等非线性和弱色散内孤立波仍不

适用.

强非线性和弱色散的情况: $\mu < 0.1, \varepsilon > \sqrt{\mu}$. 当内孤立波振幅继续增大, 在达到并超过 eKdV 理论的极限振幅 $|a_{\max}^{\text{eKdV}}| = 23.41$ cm 后, 内孤立波的非线性影响将占主导地位, 此时 KdV 理论解的波形已远远偏离实验波形, eKdV 理论也已不再适用, 而 MCC 理论解的波形与实验波形几乎重合. 在图 7(c) 中, 给出了当 $|a_m| = 24.33$ cm 时, 实验获得的内孤立波波形与四类内孤立波理论解的比较, 这时内孤立波振幅接近 mKdV 理论解的极限振幅 $|a_{\max}^{\text{mKdV}}| = 27.83$ cm, 由图可见, mKdV 理论和 MCC 理论解的波形与实验波形均符合较好. 结果表明, mKdV 理论主要适用于内孤立波振幅接近其理论极限振幅的情况, 但这时 MCC 理论同样适用.

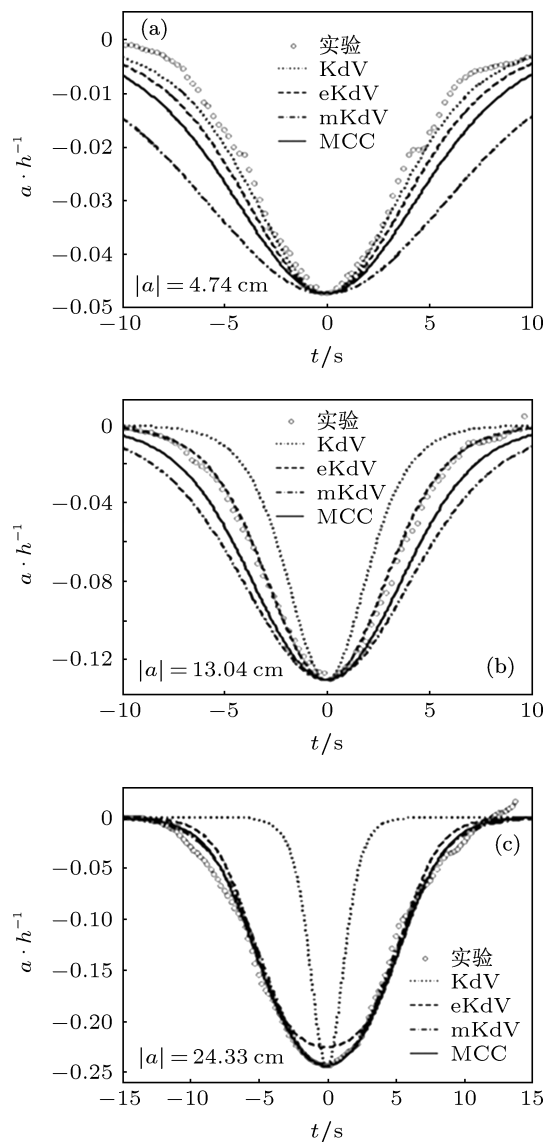


图 7 当 $h_1 : h_2 = 2 : 8$ 时, 实验与理论结果的比较

表2 当 $h_1 : h_2 = 2 : 8$ 时的实验结果

$ a_m /\text{cm}$	ε	$\sqrt{\mu}$	μ	范围	适用理论
3.28	0.0328	0.1946	0.0379		
4.74	0.0474	0.2262	0.0512	$\mu < 0.1, \varepsilon \leq \mu$	KdV
6.21	0.0621	0.2532	0.0641		
7.13	0.0713	0.2584	0.0668		
9.13	0.0913	0.2667	0.0711		
10.76	0.1076	0.2747	0.0755		
13.04	0.1304	0.2755	0.0759	$\mu < 0.1, \mu < \varepsilon \leq \sqrt{\mu}$	eKdV
16.93	0.1693	0.2755	0.0759		
20.33	0.2033	0.2577	0.0664		
23.22	0.2323	0.2375	0.0564		
23.51	0.2351	0.2160	0.0466		
24.33	0.2433	0.2137	0.0457	$\mu < 0.1, \varepsilon > \sqrt{\mu}$	MCC
24.92	0.2492	0.2070	0.0429		

在表3中,给出了当 $h_1 : h_2 = 3 : 7$ 时的实验结果. 在表中各实验工况下,均有 $\mu < 0.1$, 仍为弱色散的. 由表可知,在该实验工况下,只有中等非线性和弱色散这一种情况,即 $\mu < 0.1, \mu < \varepsilon \leq \sqrt{\mu}$. 实验结果表明,此时在四类内孤立波理论中, eKdV 理论解的波形与实验结果最为符合,如图8所示.

表3 当 $h_1 : h_2 = 3 : 7$ 时的实验结果

$ a_m /\text{cm}$	ε	$\sqrt{\mu}$	μ	范围	适用理论
3.40	0.0340	0.1122	0.0126		
5.00	0.0500	0.1284	0.0165		
7.80	0.0780	0.1466	0.0215		
8.90	0.0890	0.1563	0.0244	$\mu < 0.1,$	eKdV
10.55	0.1055	0.1585	0.0251	$\mu < \varepsilon \leq \sqrt{\mu}$	
12.70	0.1270	0.1577	0.0249		
15.80	0.1580	0.1621	0.0263		
16.20	0.1620	0.1873	0.0351		

在表4中,给出了当 $h_1 : h_2 = 1 : 9$ 时的实验结果. 在该实验工况下,上下层流体的深度相差将近一个量级,属于浅跃层情况. 由表可见,色散参数 $\mu \geq 0.1$, 这时内孤立波色散效应的影响将是显著的,属于强色散性的情况. 实验结果表明,此时在四类内孤立波理论中, MCC 理论与实验结果最为符合,而 KdV, eKdV 和 mKdV 理论解的波形均与实验波形差异很大,如图9所示. 由此可见,虽然 MCC 理论是在弱色散条件下建立的,但对强色散的内孤

立波,仍具有很好的适用性.

mKdV 理论主要是针对上下层深度比接近其临界值的情况而提出的,文献 [10] 的系列实验结果表明,在这种情况下 mKdV 理论解与实验结果相符. 本文实验结果表明,在内孤立波振幅接近 mKdV 理论的极限振幅时,该理论也是适用的,但这时 MCC 理论同样是适用的. 结果进一步表明, KdV 理论没有极限振幅,随着内孤立波振幅的增大,其波形会逐渐变窄,与实际内孤立波波形的差异越来越大,因此 KdV 理论仅适用于弱非线性和弱色散的情况. 此外,当振幅接近 eKdV 理论的极限振幅时,由 eKdV 理论获得的内孤立波的波形会逐渐变宽,表现为“桌盖”型的特征,这时 eKdV 理论将逐渐偏离实际内孤立波的特征,因此该理论仅适用于内孤立波振幅小于该其理论极限振幅的情况.

表4 当 $h_1 : h_2 = 1 : 9$ 时的实验结果

$ a_m /\text{cm}$	ε	$\sqrt{\mu}$	μ	范围	适用理论
3.30	0.0330	0.3311	0.1096		
4.18	0.0418	0.3690	0.1362		
6.80	0.0680	0.3891	0.1514		
8.30	0.0830	0.4202	0.1765		
11.36	0.1136	0.4310	0.1858	$\mu \geq 0.1$	MCC
13.73	0.1373	0.4032	0.1626		
14.10	0.1410	0.3731	0.1392		
15.13	0.1513	0.3676	0.1352		

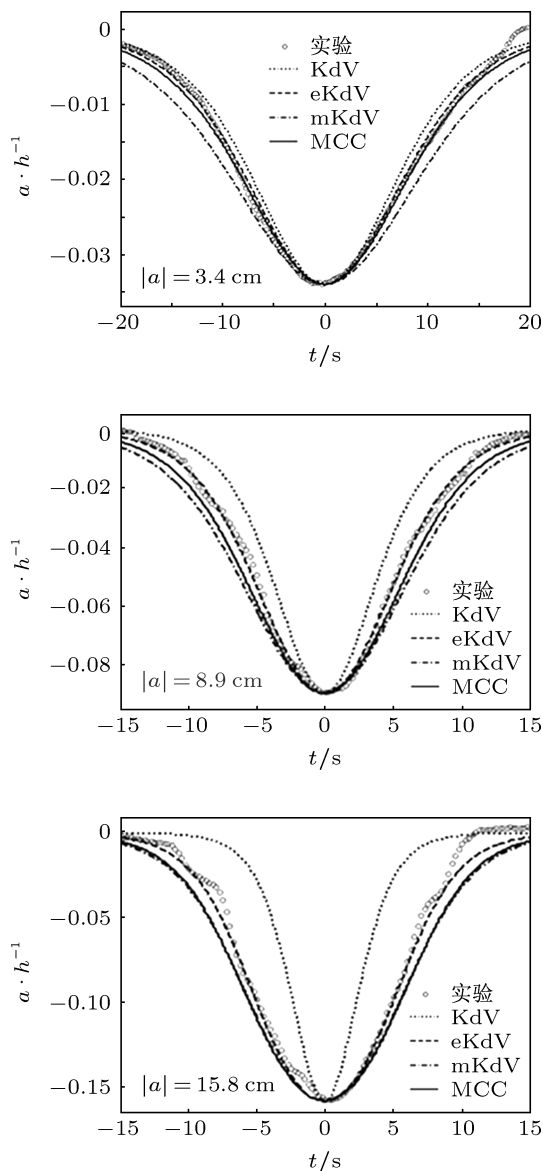


图8 当 $h_1 : h_2 = 3 : 7$ 时, 实验与理论结果的比较

结果还表明, 当内孤立波为弱色散波时, MCC 理论主要适用于强非线性的情况, 但在强色散情况该理论也是适用的. 出现这种现象的主要原因如下: 在 KdV, eKdV 和 mKdV 理论中, 仅包含有 $O(\mu)$ 的色散项, 因此这三类内孤立波理论只能适用于弱色散的情况, 而在 MCC 理论中, 虽然对色散参数仅精确到 $O(\mu)$ 阶, 但由 (9) 和 (10) 式可知, 在该理论中实际上还包含有与 $\epsilon\mu$ 和 $\epsilon^2\mu$ 等非线性项和色散项耦合的组合项, 因此该理论事实上可以适用于强色散的情况.

最后给出内孤立波无量纲相速度 \bar{c} 和特征频率 ω 随无量纲振幅的变化规律, 并将实验结果与 KdV, eKdV 和 MCC 理论的结果进行比较, 以期从

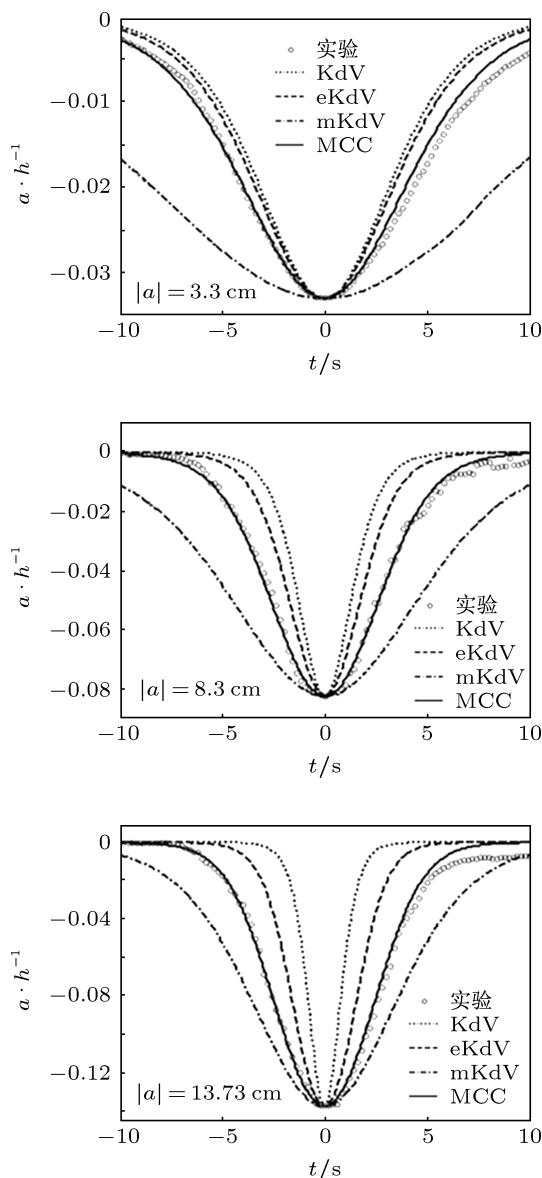


图9 当 $h_1 : h_2 = 1 : 9$ 时, 实验与理论结果的比较

这两个层面, 就这三类内孤立波理论的适用性问题做更深入的分析与研究. 其中, 无量纲相速度定义为 $\bar{c} = c/\sqrt{gh}$, 特征频率定义为 $\omega = c/\lambda$, 无量纲振幅定义为 $\bar{a} = |a|/h$, 式中 c 为内孤立波相速度, a 为内孤立波振幅, λ 为内孤立波特征波长. 为下文陈述简便计, 分别用 \bar{c}_{KdV} , \bar{c}_{eKdV} 和 \bar{c}_{mcc} 表示 KdV, eKdV 和 MCC 理论的无量纲相速度.

在图 10 中, 给出了三种上下层深度比时内孤立波无量纲相速度随其无量纲振幅变化的实验与理论结果之比较. 由图可知, 基于 KdV 理论的无量纲相速度 \bar{c}_{KdV} 与无量纲振幅 \bar{a} 之间呈线性关系, 而基于 eKdV 和 MCC 理论的无量纲相速度 \bar{c}_{eKdV} 和 \bar{c}_{mcc} 与无量纲振幅 \bar{a} 之间呈幂函数关系, 而且幂指

数小于 1; 对小振幅内孤立波 ($\bar{a} \leq 0.05$), 三种理论的无量纲相速差异均很小; 存在一个与上下层深度比相关的临界无量纲振幅 \bar{a}_0 , 当 $\bar{a} \leq \bar{a}_0$ 时, eKdV 和 MCC 理论的无量纲相速度差异很小, 但当 $\bar{a} > \bar{a}_0$ 时, 两者开始出现差异. 经统计分析表明, 实验结果与 eKdV 和 MCC 理论的无量纲相速度之间的误差

在 5%—10% 之间, 理论结果大于实验结果的主要原因在于: 1) 在理论中忽略了流体的黏性; 2) 在实验中将具有跃层的密度分层流体简化为两层流体, 而随着密度跃层厚度的增加, 内孤立波相速度会随之减小 [10].

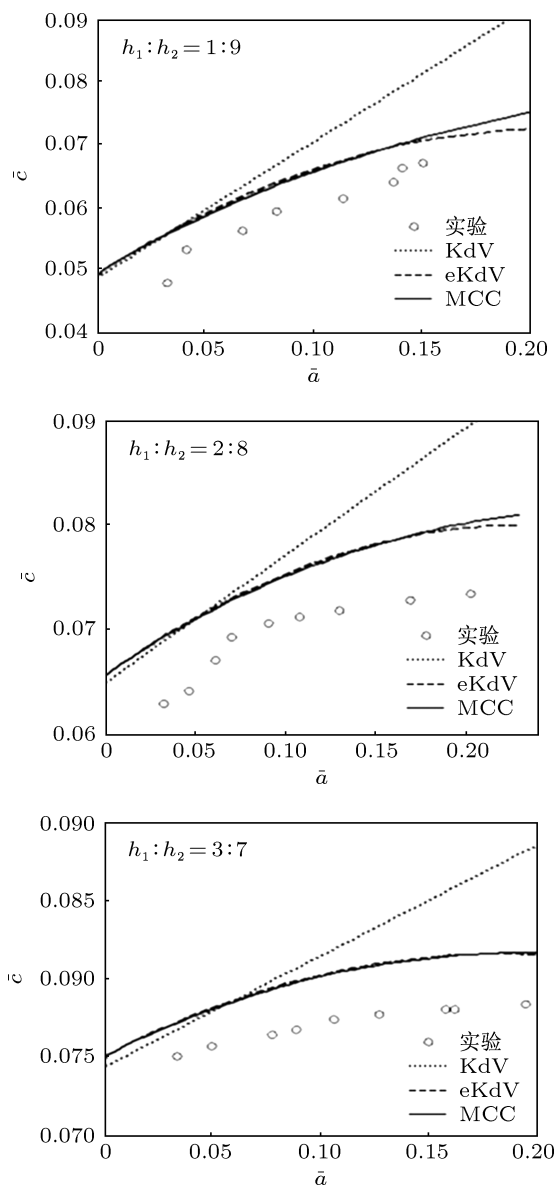


图 10 内孤立波无量纲相速度与无量纲振幅之间的相关关系

在图 11 中, 给出了三种上下层深度比时内孤立波无量纲特征频率随无量纲振幅变化的实验与理论结果之比较. 结果表明, 当 $h_1 : h_2 = 1 : 9$ 时, 由于内孤立波是强色散的, 因此实验结果与 MCC 理论的结果一致. 当 $h_1 : h_2 = 2 : 8$ 时, 在内孤立波为弱

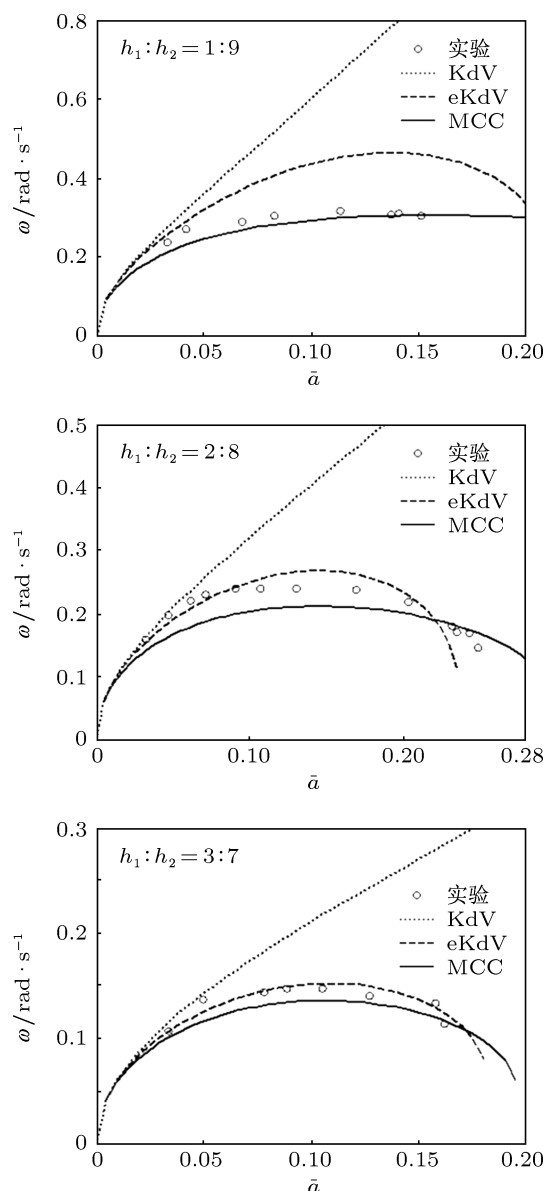


图 11 内孤立波无量纲特征频率与无量纲振幅之间的相关关系

非线性和弱色散的情况, 实验结果与 KdV 理论的结果一致; 在内孤立波为中等非线性和弱色散的情况, 实验结果与 eKdV 理论的结果一致; 在内孤立波为强非线性和弱色散的情况, 实验结果与 MCC 理论的结果一致. 当 $h_1 : h_2 = 3 : 7$ 时, 由于内孤立波是

中等非线性和弱色散的, 因此实验结果与 eKdV 理论的结果一致. 这些结果正好与前面所述三类内孤立波理论的适用性条件一致, 因此特征频率与无量纲振幅之间的相关关系在某种程度上正好可以作为各类内孤立波理论适用性的一种判断依据.

5 结论

基于 MCC 理论, 将内孤立波诱导上下层流体中的层平均水平速度分别作为两块推板的运动速度, 采用系列实验方法, 建立了内孤立波设计振幅与期望振幅之间的传递函数关系 $a_d/h = k \times (a_h/h) + b$, 其中 $k = k(h_1/h_2)$, $b = b(h_1/h_2)$. 在此基础上, 发展了一种基于双板反向水平运动的内孤立波实验室造波方法, 结果表明基于该方法所获实验室内孤立波的波形稳定、振幅衰减减小, 而且振幅可控.

以水深为基准定义非线性参数 ε 和色散参数 μ , 研究表明, 存在一个临界色散参数 $\mu_0 = 0.1$, 以此为基准对弱色散条件 $\mu \ll 1$ 量化, 可以分为弱色散 ($\mu < \mu_0$) 和强色散 ($\mu \geq \mu_0$) 两种情况; 在弱色散 ($\mu < \mu_0$) 条件下, 对非线性条件也可量化, 可以分为弱非线性 ($\varepsilon \leq \mu$), 中等非线性 ($\mu < \varepsilon \leq \sqrt{\mu}$) 和强非线性 ($\varepsilon > \sqrt{\mu}$) 三种情况; 在系列实验基础上, 获得了 KdV, eKdV, MCC 和 mKdV 理论的如下适用性条件: KdV 理论适用于弱非线性和弱色散情况, eKdV 理论适用于中等非线性和弱色散情况,

而 MCC 理论适用于强非线性和弱色散或强色散情况. 此外, 在上下层流体深度比并不接近其临界值的情况, 当内孤立波振幅接近 mKdV 理论的极限振幅时, 该理论也是适用的, 但这时 MCC 理论同样适用.

结果表明, 由于流体黏性及密度跃层厚度等因素的影响, 内孤立波无量纲相速度要比理论结果小, 但特征频率与理论结果一致, 而且特征频率与无量纲振幅之间的相关关系在某种程度上正好可以作为 KdV, eKdV 和 MCC 理论适用性的一种判断依据. 结果还表明, 虽然实际海洋中密度垂向分布通常是一个具有连续跃层的密度分层流体结构, 但当密度跃层厚度较小时, 以最大浮频率所在流体层为界, 将海洋中的密度分层流体简化为一个两层流体系统, 并采用 KdV, eKdV, MCC 和 mKdV 理论对内孤立波特性的表征是合理与可行的.

需要指出的是, 关于本文中获得的临界色散参数 μ_0 的精确值尚需做进一步的深入研究. 此外, MCC 理论本身是在弱色散条件下建立的, 在该理论中, 对界面运动学和动力学条件在进行层平均时, 仅精确到 $O(\mu)$. 虽然本文研究表明该理论在强色散情况下同样是适用的, 但为了使该理论能够更为有效地表征实际海洋中强色散甚至完全色散内孤立波的特征, 在对界面运动学和动力学条件进行层平均时, 将色散参数 μ 做更高阶的近似是有现实意义的.

- [1] Wang J, Ma R L, Wang L, Meng J M 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 064701 (in Chinese) [王晶, 马瑞玲, 王龙, 孟俊敏 2012 物理学报 **61** 064701]
- [2] Fang X H, Du T 2005 *Fundamentals of Oceanic Internal Waves and Internal Waves in the China Seas* (Qingdao: Ocean University of China Press) p101 (in Chinese) [方欣华, 杜涛 2005 海洋内波基础和中国海内波 (青岛: 中国海洋大学出版社, 第 101 页)]
- [3] Helfrich K R, Melville W K 2006 *Ann. Rev. Fluid Mech.* **38** 395
- [4] Shi X G, Fan Z S, Li P L 2009 *Period. Ocean Univ. Chin.* **39** 297 (in Chinese) [石新刚, 范植松, 李培良 2009 中国海洋大学学报 **39** 297]
- [5] Li J, Gu X F, Yu T, Hu X L, Sun Y, Guo D, Xu J P 2011 *Trans. Oceanol. Limnol.* **1** 1 (in Chinese) [李静, 顾行发, 余涛, 胡新礼, 孙源, 郭丁, 徐京萍 2011 海洋湖沼通报 **1** 1]
- [6] Chen G Y, Su F C, Wang C M, Liu C T, Tseng R S 2011 *J. Oceanogr.* **67** 689
- [7] Koop C G, Butler G 1981 *J. Fluid Mech.* **112** 225
- [8] Segur H, Hammack J L 1982 *J. Fluid Mech.* **118** 285
- [9] Helfrich K R, Melville W K 1986 *J. Fluid Mech.* **167** 285
- [10] Michallet H, Barthelemy E 1998 *J. Fluid Mech.* **366** 159
- [11] Grue J, Jensen A, Rusan P O, Sevein J K 1999 *J. Fluid Mech.* **380** 257
- [12] Svein J K, Guo Y, Davies P A, Grue J 2002 *J. Fluid Mech.* **469** 161
- [13] Walker S A, Martin A J, EASSON W J, Evans W A B 2003 *J. Waterw. Port Coastal Ocean Eng.* **5** 210
- [14] Brandt P, Rubino A, Alpers W, Backhaus J O 1997 *J. Phys. Oceanogr.* **27** 648
- [15] Grimshaw R, Slunyaev A, Pelinovsky E 2010 *Chaos* **20** 013102
- [16] Du T, Yan X H, Timothy D 2010 *Chin. J. Oceanol. Limnol.* **28** 658
- [17] Funakoshi M, Oikawa M 1986 *J. Phys. Soc. Jpn.* **55** 128
- [18] Xu Z, Yin B S, Hou Y J 2010 *Chin. J. Oceanol. Limnol.* **28** 1049
- [19] Choi W, Camassa R 1999 *J. Fluid Mech.* **396** 1
- [20] Miyata M 1985 *Mer. Tokyo* **23** 43
- [21] Ruiz Z A, Nachbin A 2008 *Commun. Math. Sci.* **2** 385
- [22] Debsarma S, Das K P, Kirby J T 2010 *J. Fluid Mech.* **654** 281
- [23] Camassa R, Choi W, Michallet H, Rusan P O, Svein J K 2006 *J. Fluid Mech.* **549** 1
- [24] Wessels F, Hutter K 1996 *J. Phys. Oceanogr.* **26** 5
- [25] Maderich V, Talipova T, Grimshaw R, Terletska K, Brovchenko I, Pelinovsky E, Choi B H 2010 *Phys. Fluids* **22** 1

Wave-making experiments and theoretical models for internal solitary waves in a two-layer fluid of finite depth*

Huang Wen-Hao You Yun-Xiang[†] Wang Xu Hu Tian-Qun

(State Key Laboratory of Ocean Engineering, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240, China)

(Received 11 August 2012; revised manuscript received 5 November 2012)

Abstract

A laboratory wave-making method is developed for the internal solitary wave under the condition of giving its amplitude produced by oppositely and horizontally pushing two vertical plates placed separately in the upper- and lower-layer fluids of a large-scale density stratified tank where based on the Miyata-Choi-Camassa (MCC) theoretical model, the layer-mean velocities of the upper- and lower-layer fluids induced by the internal solitary wave are used as the velocities of the two plates. On this basis, a series of experiments is conducted to explore the applicability conditions for internal solitary wave theories with stationary solutions which are Korteweg-de Vries (KdV), extended KdV (eKdV), MCC and modified KdV (mKdV) models in a two-layer fluid of finite depth respectively. It is shown that for the nonlinear parameter ε and the dispersion parameter μ defined by the total water depth, there exists a critical dispersion parameter μ_0 , in the case of $\mu < \mu_0$, the KdV model is applicable for $\varepsilon \leq \mu$, the eKdV model is applicable for $\mu < \varepsilon \leq \sqrt{\mu}$, as well as the MCC model is applicable for $\varepsilon > \sqrt{\mu}$. However, in the case of $\mu \geq \mu_0$, the MCC model is still applicable for a wide range of ε . Furthermore, for the case where the ratio of depth between the upper- and lower-layer fluids is not close to its critical value, the mKdV model is mainly applicable for the case where the amplitude of the internal solitary wave is close to its theoretical limiting amplitude, however, the MCC model is also applicable for such a case. The investigation quantitatively characterizes the applicability conditions for four classes of internal solitary wave theories, and provides an important theoretical foundation for what kinds of theories can be chosen to model internal solitary waves in the ocean.

Keywords: two-layer fluid, internal solitary wave, double-plate wave-making, critical dispersion parameter

PACS: 47.35.Fg, 47.55.-t, 47.80.Cb, 47.85.Dh

DOI: 10.7498/aps.62.084705

* Project supported by the National High Technology Research and Development Program of China (Grant No. 2010AA09z305) and the Specialized Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education of China (Grant No. 20110073130003).

[†] Corresponding author. E-mail: youyx@sjtu.edu.cn