物 理 学 报 Acta Phys. Sin. Vol. 62, No. 9 (2013) 090201

磁层-电离层耦合过程中等离子体粒子运动的周期轨*

陈丽娟[1)†] 鲁世平[1)] 莫嘉琪[2)]

1) (南京信息工程大学数学与统计学院, 南京 210044)

2) (安徽师范大学数学系, 芜湖 241003)

(2012 年 10 月 26 日 收到; 2012 年 12 月 5 日 收到修改稿)

运用重合度理论探讨了一类非线性问题的周期解, 然后将其应用于磁层-电离层耦合过程中等离子体粒子运动模型的周期解问题的研究, 得到了一定条件下该模型存在周期轨的结果.

关键词: 非线性, 等离子体, 周期解

PACS: 02.30.Hq, 02.30.Ks, 52.30.–q, 52.35.–g **DOI:** 10.7498/aps.62.090201

1 引 言

在地球磁层中, 无碰撞等离子体占优势, 而在电离层中, 带电粒子与中性粒子的碰撞效应不可忽略, 垂直于磁场的电导率在这里达到最大值. 磁场在电学上把磁层与电离层联系在一起, 引起两个区域能量和动量的交换或耦合. 从某种意义来说, 磁层-电离层耦合是发生在这两个区域中不同物理过程的相互作用. 由于磁层和电离层被同样的磁力线联系在一起, 所以其间发生了强耦合. 这种相互作用对许多现象来说是重要的, 例如磁层和极区电离层中的等离子体对流、磁层亚暴、极光电位结构的形成 (通过这种电位结构, 极光电子被加速而形成极光)、高纬电场向低纬地区渗透以及场向电流的流动 [1−8].

等离子体粒子运动的基本方程是

$$m_j\frac{\mathrm{d}v_j}{\mathrm{d}t}=q_j\left(E+v_j\times B\right), \tag{1}$$

式中, m_j, q_j, v_j 分别是等离子体粒子 j 的质量、电荷、速度, E 和 B 分别是电场和磁场. 如果电场和磁场是均匀而定常的, 则可对所有粒子求解方程 (1). 但是在空间物理研究领域, 特别是磁层-电离层耦合过程中, 问题比较特殊, 这是因为等离子体的位置和速度在变化, 这些变化又会产生 (1) 式中的电磁场. 等离子体粒子和中性粒子常常彼此相互作用, 因此, 方程 (1) 必须包括对粒子运动产生滞后效应的碰撞项. 这样一来, 方程 (1) 就变成了非线性的物理过程, 只用一般的线性模式去研究其过程和内在机理是不够理想的, 通过求解来讨论其定性问题也就变得非常困难.

考虑到上述实际原因, 本文建立如下的磁层-电离层耦合过程中等离子体粒子运动的 n 维非线性模型:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+g\left(t,v(t)\right)+h\left(t,v(t-\tau)\right)=f(t), \tag{2}$$

其中 $v(t)=(v_1(t),v_2(t),\cdots,v_n(t))^{\mathrm{T}}\in R^n$, $t\in R$, g, $h\in C(R\times R^n,R^n)$, $f\in C(R,R^n)$, 时滞变量 $\tau>0$.

许多学者如莫嘉琪等人在大气物理、海洋气候、动力系统等方面利用数值分析等方法研究了一些非线性问题 [9−23], 而本文则借助于重合度理论研究了非线性时滞耦合系统 (2) 的周期轨存在性问题.

2 引 理

引理 1[24] 设 X,Y 是两个 Banach 空间, $L:D(L)\subset X\to Y$ 为指标为零的 Fredholm 算子, $\Omega\subset X$

* 国家自然科学基金 (批准号: 11271197)、教育部科学技术重点项目 (批准号: 207047) 和南京信息工程大学科研基金 (批准号: 20090202, 2012r101) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: clj_99@sohu.com

为有界开集, $N: X \to Y$ 为 $\overline{\Omega}$ 上 L 紧的, 如果下列条件满足:

1) 对任意的 $\lambda \in (0,1)$, $x \in \partial\Omega \cap D(L)$, 均有 $Lx \neq \lambda Nx$;

2) 对任意的 $x \in \mathrm{Ker}L \cap \partial\Omega$, 均有 $QNx \neq 0$;

3) $\deg\{JQN, \Omega \cap \mathrm{Ker}L, 0\} \neq 0$, 其中 $J: \mathrm{Im}Q \to \mathrm{Ker}L$ 同构.

则方程 $Lx = Nx$ 在 $\overline{\Omega} \cap D(L)$ 上至少存在一个解.

3 理论探讨

现考虑方程 (2) 的 T 周期解存在性问题, T 为一正常数.

设 $X = C_T = \{x | x \in C(R, R^n),\ x(t+T) \equiv x(t)\}$, $\forall x \in C_T$,

定义 $|x(t)| = \sqrt{x(t)^{\mathrm{T}} x(t)}$, $|x|_\infty = \max\limits_{t\in[0,T]} |x(t)|$. 显然, X 是 Banach 空间.

定理 1 设 $\overline{f} = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$, 如果存在常数 $a > 0, b > 0, d > 0, l > 2$, 且满足条件

$$(\mathrm{H}_1) |v^T g(t,v)| \geqslant a|v|^l;$$

$$(\mathrm{H}_2) 0 < |h(t,v)| \leqslant b|v| + d;$$

$$(\mathrm{H}_3) aM^{l-1} - bM - \left(|\overline{f}| + d\right) > 0.$$

其中常数 M 是由不等式 $\alpha x^{l-1} - bx - (|f|_\infty + d) \leqslant 0$, $x \geqslant 0$ 所确定的 x 的上确界, 则方程 (2) 至少存在一个 T 周期解.

注 1 由 $f(x) = ax^{l-1} - bx - \left(|\overline{f}| + d\right)$ 关于 x 连续, 以及条件 (H_3) 知, 存在充分小的正数 ε, 令 $M_\varepsilon = M + \varepsilon$, 则 $f(M_\varepsilon) > 0$.

证明 我们分别定义算子 $L: D(L) \subset X \to X$, $Lv = v'$ 和 $N: X \to X$,

$$[Nv](t) = f(t) - g(t, v(t)) - h(t, v(t-\tau)), \qquad (3)$$

其中 $D(L) = C_T = \{v | v \in C_T, v' \in C(R, R^n)\}$.

易见, 方程 (2) 可转换成算子方程 $Lv = Nv$. 此外, 根据算子的定义, 不难得出

$$\mathrm{Ker}L = R^n,$$

$$\mathrm{Im}L = \left\{v \in X, \int_0^T v(s)\mathrm{d}s = 0\right\},$$

因此, L 是指标为零的 Fredholm 算子.

令投影算子 P, Q 分别为

$$P: X \to \mathrm{Ker}L, \quad Pv = v(0),$$

$$Q: X \to \mathrm{Im}Q, \quad Qv = \frac{1}{T}\int_0^T v(s)\mathrm{d}s,$$

则 $\mathrm{Ker}L = \mathrm{Im}P$, $\mathrm{Ker}Q = \mathrm{Im}L$.

令 $K: \mathrm{Im}L \to D(L) \cap \mathrm{Ker}P$ 表示 $L|_{D(L)\cap\mathrm{Ker}P}: D(L) \cap \mathrm{Ker}P \to \mathrm{Im}L$ 的唯一逆,

$$[Ky](t) = \int_0^t y(s)\mathrm{d}s \in D(L). \qquad (4)$$

由 (3), (4) 式易证 N 在 $\overline{\Omega}$ 上是 L 紧的, 其中 Ω 为 X 中的任意有界开集,

令 $\Omega_1 = \{v | v \in D(L) \subset C_T, \quad Lv = \lambda Nv, \lambda \in (0,1)\}$, 则 $\forall v \in \Omega_1$,

$$v'(t) = \lambda f(t) - \lambda g(t, v(t)) - \lambda h(t, v(t-\tau)). \qquad (5)$$

令 t_0 是 $|v(t)|$ 的最大值点, 则 t_0 也为 $|v(t)|^2$ 的最大值点, 从而

$$\frac{\mathrm{d}|v(t)|^2}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=t_0} = 2v^{\mathrm{T}}(t_0)v'(t_0) = 0. \qquad (6)$$

在方程 (5) 两边同时左乘 $v^{\mathrm{T}}(t)$, 再将 $t = t_0$ 代入, 得

$$\begin{aligned} v^{\mathrm{T}}(t_0)v'(t_0) = {} & \lambda v^{\mathrm{T}}(t_0) f(t_0) - \lambda v^{\mathrm{T}}(t_0) g(t_0, v(t_0)) \\ & - \lambda v^{\mathrm{T}}(t_0) h(t_0, v(t_0-\tau)), \end{aligned}$$

结合 (6) 式, 得

$$\begin{aligned} |v^{\mathrm{T}}(t_0) g(t_0, v(t_0))| \leqslant {} & |v^{\mathrm{T}}(t_0) f(t_0)| \\ & + |v^{\mathrm{T}}(t_0) h(t_0, v(t_0-\tau))|. \end{aligned}$$

由定理中条件 (H_1), (H_2), 有

$$\begin{aligned} a|v(t_0)|^l \leqslant {} & |v(t_0)| \cdot |f(t_0)| \\ & + |v(t_0)| \cdot (b|v(t_0-\tau)| + d) \\ \leqslant {} & |v(t_0)| \cdot |f|_\infty + b|v(t_0)|^2 + d|v(t_0)|. \end{aligned}$$

即

$$a|v(t_0)|^{l-1} - b|v(t_0)| - (|f|_\infty + d) \leqslant 0. \qquad (7)$$

由 (7) 式中 $l > 2$, 从而存在 $M > 0$, 使得 $|v|_\infty \leqslant M$.

令 $\Omega = \{v \,|\, |v|_\infty < M_\varepsilon\}$, $\forall v \in \partial\Omega \cap \mathrm{Ker}L$, 有 $v = c \in R^n$ 且 $|c| = M_\varepsilon$,

$$\begin{aligned} QNc &= \frac{1}{T}\int_0^T [f(t) - g(t,c) - h(t,c)]\mathrm{d}t \\ &= \overline{f} - \frac{1}{T}\int_0^T [g(t,c) + h(t,c)]\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

当 $c^{\mathrm{T}} g(t,c) \leqslant -a|c|^l$,

$$\begin{aligned} c^{\mathrm{T}} QNc = {} & c^{\mathrm{T}}\overline{f} - \frac{1}{T}\int_0^{\mathrm{T}} c^{\mathrm{T}} g(t,c)\mathrm{d}t \\ & - \frac{1}{T}\int_0^{\mathrm{T}} c^{\mathrm{T}} h(t,c)\,\mathrm{d}t \\ \geqslant {} & c^{\mathrm{T}}\overline{f} + a|c|^l - \frac{1}{T}\int_0^T |c^{\mathrm{T}}| \cdot |H(t,c)|\mathrm{d}t \\ > {} & c^{\mathrm{T}}\overline{f} + a|c|^l - (b|c| + d)|c| \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&> -|c^{\mathrm{T}}|\cdot|\overline{f}| + a|c|^l - (b|c| + d)|c| \\
&= M_\varepsilon\left[aM_\varepsilon^{l-1} - bM_\varepsilon - \left(|\overline{f}| + d\right)\right] > 0.
\end{aligned}
$$

当 $c^{\mathrm{T}}g(t,c) \geqslant a|c|^l$,

$$
\begin{aligned}
c^{\mathrm{T}}QNc &= c^{\mathrm{T}}\overline{f} - \frac{1}{T}\int_0^T c^{\mathrm{T}}g(t,c)\mathrm{d}t \\
&\quad - \frac{1}{T}\int_0^T c^{\mathrm{T}}h(t,c)\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant c^{\mathrm{T}}\overline{f} - a|c|^l + \frac{1}{T}\int_0^T |c^{\mathrm{T}}|\cdot|H(t,c)|\mathrm{d}t \\
&< |c^{\mathrm{T}}|\cdot|\overline{f}| - a|c|^l + (b|c| + d)|c| \\
&= -M_\varepsilon\left[aM_\varepsilon^{l-1} - bM_\varepsilon - \left(|\overline{f}| + d\right)\right] < 0.
\end{aligned}
$$

由注 1 得: $\forall v \in \partial\Omega \cap \mathrm{Ker}L$, $v^{\mathrm{T}}QNv \neq 0$, 从而有 $QNv \neq 0$ 即 $Nv \notin \mathrm{Im}L$.

再令 $J: \mathrm{Im}Q \to \mathrm{Ker}L$, $Jv = v$.

当 $v^{\mathrm{T}}g(t,v) \leqslant -a|v|^l$, 作同伦

$$
H(v,\xi) = \xi v + (1-\xi)JQNv, \quad \xi \in [0,1],
$$

且

$$
\begin{aligned}
v^{\mathrm{T}}H(v,\xi) &= \xi|v|^2 + (1-\xi)v^{\mathrm{T}}QNv > 0, \\
&\forall v \in \partial\Omega \cap \mathrm{Ker}L.
\end{aligned}
$$

即 $H(v,\xi) \neq 0, \forall v \in \partial\Omega \cap \mathrm{Ker}L, \xi \in [0,1]$. 因此,

$$
\begin{aligned}
&\deg(JQN, \Omega \cap \mathrm{Ker}L, 0) \\
&= \deg(H(v,0), \Omega \cap \mathrm{Ker}L, 0) \\
&= \deg(H(v,1), \Omega \cap \mathrm{Ker}L, 0) \\
&= \deg(I, \Omega \cap \mathrm{Ker}L, 0) \neq 0.
\end{aligned}
$$

当 $v^{\mathrm{T}}g(t,v) \geqslant a|v|^l$, 作同伦

$$
H(v,\xi) = -\xi v + (1-\xi)JQNv, \quad \xi \in [0,1],
$$

且

$$
\begin{aligned}
v^{\mathrm{T}}H(v,\xi) &= -\xi|v|^2 + (1-\xi)v^{\mathrm{T}}QNv < 0, \\
&\forall v \in \partial\Omega \cap \mathrm{Ker}L,
\end{aligned}
$$

即 $H(v,\xi) \neq 0, \forall v \in \partial\Omega \cap \mathrm{Ker}L, \xi \in [0,1]$. 因此,

$$
\begin{aligned}
&\deg(JQN, \Omega \cap \mathrm{Ker}L, 0) \\
&= \deg(H(v,0), \Omega \cap \mathrm{Ker}L, 0) \\
&= \deg(H(v,1), \Omega \cap \mathrm{Ker}L, 0) \\
&= \deg(-I, \Omega \cap \mathrm{Ker}L, 0) \neq 0.
\end{aligned}
$$

由引理 1, 可知方程 (2) 至少存在一个 T 周期解.

4 结 论

磁层顶、磁层和电离层被地磁场磁力线穿连在一起, 在这些不同的区域之间发生着动量和能量的交换. 因此, 发生在各个区域中的动力学过程必然相互作用, 相互调节, 产生一种新型的物理过程. 在等离子体输运过程中, 磁层等离子体与电离层发生复杂的相互作用, 从而等离子体粒子运动由基本方程 (1) 转化成难以求解的非线性时滞耦合系统 (2). 这种转化是非常重要的, 因为 (2) 式不仅控制着空间等离子体的微观 (或局部) 过程, 也控制着它的宏观 (或全球) 过程. 虽然我们的目的既在微观意义上, 也在宏观意义上认识能量流动及其转换过程, 但是这两类过程的时间特征非常不同, 过程中现象的空间尺度也非常不同. 因此, 对磁层-电离层耦合过程中等离子体粒子运动模型的周期性、稳定性以及同宿性等一系列定性研究, 有助于我们预报磁层-电离层系统中最基本和最复杂的扰动 - 亚暴何时发生和怎样发生.

[1] Shangchu Y J, W B M H 2005 *Magnetosphere-Ionosphere Coupling* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [上出洋介.W. 鲍明翰著, 徐文耀译 2002 磁层-电离层耦合 (北京: 科学出版社)]

[2] Huang G L 2009 *Astrophysics Space Science* **321** 79

[3] Aschwanden M 2002 *Space Science Review* **101** 1

[4] Huang G L 2000 *J. Plasma Physics* **64** 249

[5] Baldwin D E, Bernstein I B, Weenink M P H 1969 *Advanced in plasma physics* (New York: Wiley) p145

[6] Sakai J I 2005 *Astrophysical Journal* **622** L157

[7] Grechnev V V 2003 *Astrophysical Journal* **588** 1163

[8] Siarkowski M, Falewicz R 2004 *Astronomy and Astrophysics* **428** 219

[9] Mo J Q, Chen X F 2010 *Chin. Phys.* B **19** 100203

[10] Mo J Q, Lin Y H, Lin W T 2010 *Chin. Phys.* B **19** 030202

[11] Mo J Q 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2930 (in Chinese) [莫嘉琪 2009 物理学报 **58** 2930]

[12] Mo J Q 2009 *Science in China Ser.* G **39** 568

[13] Mo J Q, Lin Y H, Lin W T 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 6692 (in Chinese) [莫嘉琪, 林一骅, 林万涛 2009 物理学报 **58** 6692]

[14] Mo J Q 2010 *Chin. Phys.* B **19** 010203

[15] Mo J Q 2010 *Commun. Theor Phys.* **53** 440

[16] Mo J Q 2009 *Chin. Phys. Lett.* **26** 010204

[17] Mo J Q 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 020202 (in Chinese) [莫嘉琪 2011 物理学报 **60** 020202]

[18] Mo J Q 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 030203 (in Chinese) [莫嘉琪 2011 物理学报 **60** 030203]

[19] Wu Q K 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 068820 (in Chinese) [吴钦宽 2011 物理学报 **60** 068820]

[20] Wu Q K 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1561 (in Chinese) [吴钦宽 2006 物

理学报 **55** 1561]
[21] Li X J 2008 *Chin. Phys*. B **17** 1946
[22] He J H 2002 *Approximate Analytical Methods in Engineering and Sciences* (Zhengzhou: Henan Science and Technology Press) (in Chinese) [何吉欢 2002 工程和科学计算中的近似非线性分析方法 (郑州: 河南科学技术出版社)]
[23] Liu C P 2000 *Acta Phys. Sin*. **49** 1904 (in Chinese) [刘春平 2000 物理学报 **49** 1904]
[24] Gaines R E, Mawhin J L 1977 *Coincidence Degree and Nonlinear Differential Equations* (Berlin: Springer)

The periodic orbits of sport model of plasmas particle in the process of magnetosphere-ionosphere coupling*

Chen Li-Juan[1)†] Lu Shi-Ping[1)] Mo Jia-Qi[2)]

1) (*School of Mathematics and Statistics, Nanjing University of Information Science and Technology, Nanjing* 210044, *China*)

2) (*Department of Mathematics, Anhui Normal University, Wuhu* 241003, *China*)

(Received 26 October 2012; revised manuscript received 5 December 2012)

Abstract

Using Mawhin's continuation theorem, we discussed the existence of periodic solution for a class of nonlinear problem, and then investigated the problem of periodic solution of sport model of plasmas particle in the process of magnetosphere-ionosphere coupling. A result on the existence of periodic solution to the model is obtained.

Keywords: nonlinear, plasmas, periodic solution

PACS: 02.30.Hq, 02.30.Ks, 52.30.–q, 52.35.–g **DOI:** 10.7498/aps.62.090201

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11271197), the Science and Technology in Ministry of Education of China (Grant No. 207047), and the Science Foundation in NUIST of China (Grant Nos. 20090202, 2012r101).

† Corresponding author. E-mail: clj_99@sohu.com