具时变刚度的相对转动非线性动力系统的周期解问题*

李晓静† 陈绚青 严静

(江苏理工学院, 数理学院, 常州 213001)

(2012 年 11 月 18 日 收到; 2012 年 12 月 7 日 收到修改稿)

建立了一类具有时变刚度, 非线性阻尼力和强迫周期力项的相对转动非线性动力系统. 运用 Mawhin 重合度理论, 得到了该模型的周期解存在唯一性结果, 推广了已有的结果, 并且列举了具体的例子来说明本文的结果是新的.

关键词: 相对转动非线性动力系统, 时变刚度, 周期解, 存在唯一性

PACS: 02.30.Hq **DOI:** 10.7498/aps.62.090202

1 引 言

转动是自然界中最普遍的运动之一. 在研究转动运动和转动力学过程中, 自从 Carmeli 于 1985 年建立了转动相对论力学理论 [1,2], 1996 年 Luo[3,4] 建立了转动相对论分析力学理论, 此后, 转动系统相对性分析力学的研究日趋活跃, 转动相对论系统的研究受到学术界的广泛重视. 近年来, 在 Birkhoff 系统动力学基本理论, 几何理论及稳定性等研究领域取得了成果 [5–8]. 文献 [9, 10] 基于相对性原理, 建立了圆柱体任意两个横截面间的相对转动动力学模型, 并对系统进行了定性与定量分析. 文献 [11] 在系统势能为

$$U=\frac{1}{2}K(\theta_1-\theta_2)^2 \tag{1}$$

的条件下, 这里 K 为系统的扭转刚度, θ_1,θ_2 分别为弹性转轴两端面的转角, 研究了如下一类具有一般广义阻尼力和外扰激励的相对转动非线性系统

$$\ddot{\theta}_\triangle+a_1f(\dot{\theta}_\triangle)+a_2\theta_\triangle=F(t) \tag{2}$$

的稳定性问题, 其中 $\theta_\triangle=\theta_1-\theta_2$ 为相对转角, $f(\dot{\theta}_\triangle)$ 为相对转速 $\dot{\theta}_\triangle$ 的任意函数, 一般为非线性项. $F(t)$ 为强迫激励项, a_1,a_2 的具体意义见文献 [11]. 文献 [12] 在系统势能为

$$U=\frac{1}{2}K(\phi_2-\phi_1)^2 \tag{3}$$

的条件下, 这里 K 为系统的扭转刚度, ϕ_1,ϕ_2 分别为弹性转轴两端面的转角, 研究了如下一类相对转动非线性动力学方程

$$\ddot{x}+\omega_0^2x+\beta g(\dot{x})=f(t) \tag{4}$$

的稳定性问题, 其中 $x=\phi_1-\phi_2$ 为相对转角, $g(\dot{x})$ 为相对转速 $\dot{x}$ 的任意函数. $f(t)$ 为外干扰力或称为外激励, ω_0,β 的具体意义见文献 [12].

我们可以发现方程 (2), (4) 中, 线性项 $\theta_\triangle,x$ 前的系数为常数 a_2,ω_0^2, 这是因为我们在势能 (1), (3) 中取的刚度为常数 K. 但是在实际的工程物理结构上, 我们往往要考虑刚度为时变刚度, 即刚度是时间 t 的函数, 故本文在时变刚度为 $K=K(t)$, 即取系统的势能为

$$U=\frac{1}{2}K(t)(\theta_1-\theta_2)^2 \tag{5}$$

的条件下, 首先建立了如下一类具有时变刚度的相对转动非线性动力学系统:

$$x''+K_1f(x')+\omega_0^2K(t)x=F(t), \tag{6}$$

其中 $f(x')$ 为相对转速 x' 的任意函数, $F(t)$ 为外干扰力或称为外激励, 然后针对具有周期性载荷的相

* 国家自然科学基金 (批准号: 11071205, 11101349) 和江苏省自然科学基金 (批准号: BK2011042) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: lixiaojing14@jstu.edu.cn

对转动系统的非线性动力学方程, 运用 Mawhin 重合度理论, 得到了该方程周期解的存在性, 有界性和唯一性结果.

在现有文献中, 相对转动非线性系统的周期解问题的研究并不多见, 文献 [13] 在阻尼力项为齐次多项式的条件下, 研究了如下一类具有强迫周期力项的相对转动非线性动力学系统

$$\ddot{x}+\sum_{k=0}^{n} a_{2k+1}\dot{x}^{2k+1}+bx=F(t) \tag{7}$$

的周期解问题, 其中 $x=\theta_2-\theta_1$ 为相对转角, 这里 θ_1,θ_2 分别为弹性转轴两端面的转角, $F(t)=\dfrac{6}{J}(T_2-T_1)$, 这里 J 为弹性转轴的转动惯量, T_1,T_2 分别为弹性转轴两端面的外加力矩, 且设 $F(t)$ 是圆频率为 ω 的连续周期函数, 而系数 $b>0$, $a_1>0$, $a_{2k+1}\geqslant 0(k=1,2,\cdots,n)$, 作者们应用 Yoshizawa 关于非线性系统周期解的理论, 证明了系统周期解的存在性, 唯一性和有界性. 文献 [14] 研究了如下一类具有一般广义阻尼力的相对转动非线性动力学系统

$$x''+K_1 f(x')+K_2 x=F(t), \tag{8}$$

其中 $f(x')$ 为相对转速 x' 的任意函数, $F(t)$ 为外干扰力或称为外激励, K_1,K_2 的具体意义见文献 [14], 运用 Mawhin 重合度理论, 得到了该方程周期解的存在性, 有界性和唯一性结果.

显然方程 (2), (4), (7), (8) 是方程 (6) 的特殊情形, 故本文推广了已有的结论. 这种方法曾被作者成功解决了一些非线性问题的周期解问题 [14−19].

2 动力学模型

对于两质量的相对转动系统, 设 J_1,J_2 为相对转动系统集中质量的转动惯量, θ_1,θ_2 分别为两个集中质量的转角, $\dot{\theta}_1,\dot{\theta}_2$ 分别为两个集中质量的转速, $\ddot{\theta}_1,\ddot{\theta}_2$ 分别为两个集中质量的角加速度, F_1 和 F_2 分别是两个集中质量的外加力矩. 我们取阻尼力 (阻尼力矩) 为

$$F_1^{\mathrm{c}}=-f(\dot{\theta}_1-\dot{\theta}_2), \tag{9}$$

$$F_2^{\mathrm{c}}=f(\dot{\theta}_1-\dot{\theta}_2), \tag{10}$$

其中 $f(\dot{\theta}_1-\dot{\theta}_2)$ 为相对转速差的任意函数. 将 (9) 和 (10) 式代入动力学普遍方程

$$\sum_{i=1}^{n}(F_i^{(j)}-J_i\ddot{\theta}_i)\delta\theta_i=0, \tag{11}$$

其中 $F_i^{(j)}=F_i+F_i^{\mathrm{c}}$. 广义力 (广义力矩) 为

$$Q_r=\sum_{i=1}^{n}F_i^{(j)}\frac{\partial\theta_i}{\partial q_r}\quad(r=1,2), \tag{12}$$

其中 $q_r(r=1,2)$ 为广义坐标, n 为自由度数目. 将 (9) 和 (10) 式代入 (12) 式后得本系统的广义力 (广义力矩) 为

$$Q_1=F_1-f(\dot{\theta}_1-\dot{\theta}_2), \tag{13}$$

$$Q_2=F_2+f(\dot{\theta}_1-\dot{\theta}_2). \tag{14}$$

相对转动系统的动能为

$$E=\frac{1}{2}J_1\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}J_2\dot{\theta}_2^2, \tag{15}$$

且本系统的势能 U 由 (5) 式表示, 故将 (5), (9), (10) 和 (13)—(15) 式代入如下拉格朗日动力学方程:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial E}{\partial\dot{\theta}_r}-\frac{\partial E}{\partial\theta_r}+\frac{\partial U}{\partial\theta_r}=Q_r\quad(r=1,2),$$

得

$$J_1\ddot{\theta}_1+f(\dot{\theta}_1-\dot{\theta}_2)+K(t)(\theta_1-\theta_2)=F_1, \tag{16}$$

$$J_2\ddot{\theta}_2-f(\dot{\theta}_1-\dot{\theta}_2)-K(t)(\theta_1-\theta_2)=F_2. \tag{17}$$

在工程中最关心相对转角的变化, 故将 (16) 式乘以 $\dfrac{1}{J_1}$ 减去 (17) 式乘以 $\dfrac{1}{J_2}$, 并令 $x=\theta_1-\theta_2$, $x'=\dot{\theta}_1-\dot{\theta}_2$, $x''=\ddot{\theta}_1-\ddot{\theta}_2$, $K_1=\dfrac{J_1+J_2}{J_1J_2}$, $\omega_0^2=\dfrac{J_1+J_2}{J_1J_2}$, $F(t)=\dfrac{J_2F_1-J_1F_2}{J_1J_2}$, 我们就得到了方程 (6), 即

$$x''+K_1f(x')+\omega_0^2K(t)x=F(t).$$

本文针对具有周期性载荷的相对转动系统的非线性动力学方程, 即我们假定 (6) 式中的 $K(t),F(t)$ 为连续且以 ω 为周期的函数, 考虑到 $K(t)$ 是刚度, 故假设 $K(t)>0,\forall t\in[0,\omega]$, 运用 Mawhin 重合度理论, 得到了该方程周期解的唯一性结果.

为了行文方便, 我们假定 $\int_0^{\omega}F(t)\mathrm{d}t=0$, 并取如下记号: $X=\{x|x\in C(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}),x(t+\omega)\equiv x(t)\}$, 其模为 $|\varphi|_0=\max\limits_{t\in[0,\omega]}|\varphi(t)|$, $\forall\varphi\in X$ 和 $Y=\{x|x\in C^1(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}),x(t+\omega)\equiv x(t)\}$, 其模为 $\|\varphi\|=\max\{|\varphi|_0,|\varphi'|_0\}$, $\forall\varphi\in Y$. 显然 X 和 Y 是两个 Banach 空间. 同时定义算子

$$L:D(L)\subset X\longrightarrow Y,Lx=x'' \tag{18}$$

和 $N:X\longrightarrow Y$,

$$[Nx](t)=-K_1f(x')-\omega_0^2K(t)x+F(t),\quad\forall t\in\boldsymbol{R}, \tag{19}$$

其中 $D(L)=\{x|x\in C^2(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}),x(t+\omega)\equiv x(t)\}$. 易见 $\mathrm{Ker}(L)=\boldsymbol{R}$, $\mathrm{Im}(L)=\{x|x\in Y,\int_0^\omega x(s)\mathrm{d}s\}$, 因此 L 是指标为零的 Fredholm 算子 [20]. 再定义投影算子

$$P:X\to \mathrm{Ker}L,\quad Px=x(0),$$

$$Q:Y\to \mathrm{Im}Q,\quad Qy=\frac{1}{\omega}\int_0^\omega y(s)\mathrm{d}s,$$

那么 $\mathrm{Im}P=\mathrm{Ker}L$, $\mathrm{Ker}Q=\mathrm{Im}L$. 令 $L_P=L|_{\mathrm{Ker}P\cap D(L)}:\mathrm{Ker}P\cap D(L)\longrightarrow \mathrm{Im}L$, 定义 $L_p^{-1}:\mathrm{Im}L\longrightarrow \mathrm{Ker}P\cap D(L)$ 为算子 L_P 的逆算子. 由数学分析的知识和周期函数的性质可知

$$[L_p^{-1}y](t)=-\frac{t}{\omega}\int_0^\omega(\omega-s)y(s)\mathrm{d}s+\int_0^t(t-s)y(s)\mathrm{d}s, \tag{20}$$

从 (19) 和 (20) 式可知, N 在 $\overline{\Omega}$ 是 L-紧的, 这里 Ω 是 X 中的任意有界开集.

3 系统周期解的存在性结果

定理 1 在系统 (6) 中, 如果 $f(0)=0,\omega_0^2|K|_0\omega^2<2$, 则系统 (6) 至少存在一个 ω-周期解.

证明 考虑方程 $Lx=\lambda Nx$, $\lambda\in(0,1)$, 其中 L 和 N 分别由 (18) 和 (19) 式所定义. 如果 $x(t)$ 是算子方程 $Lx=\lambda Nx$, $\lambda\in(0,1)$ 的任一解, 则

$$x''+\lambda K_1 f(x')+\lambda\omega_0^2K(t)x=\lambda F(t). \tag{21}$$

假设 t_1 和 t_2 分别为函数 $x(t)$ 的最大值点和最小值点, 则 $x'(t_1)=0$, $x'(t_2)=0$, $x''(t_1)\leqslant 0$, $x''(t_2)\geqslant 0$, 所以由条件 $f(0)=0$ 可知 $-\omega_0^2K(t_1)x(t_1)+F(t_1)\leqslant 0$, $-\omega_0^2K(t_2)x(t_2)+F(t_2)\geqslant 0$, 结合 $K(t),F(t),x(t)$ 的连续性, 易见存在常数 $\xi\in\boldsymbol{R}$ 使得 $-\omega_0^2K(\xi)x(\xi)+F(\xi)=0$, 故

$$|x(\xi)|\leqslant\frac{|F|_0}{\omega_0^2|K|_{min}}, \tag{22}$$

其中 $|K|_{\min}=\min\limits_{t\in[0,\omega]}|K(t)|$. 令 $\xi=k\omega+t_0$, 其中 $t_0\in[0,\omega]$ 且 k 是一个整数, 于是根据 (22) 式, 我们有 $|x(t_0)|\leqslant\dfrac{|F|_0}{\omega_0^2|K|_{\min}}$, 利用关系 $|x(t)|=|x(t_0)+\int_{t_0}^t x'(s)\mathrm{d}s|\leqslant\dfrac{|F|_0}{\omega_0^2|K|_{\min}}+\int_0^\omega|x'(s)|\mathrm{d}s$, $\forall t\in[0,\omega]$, 我们可以得到

$$|x|_0\leqslant\frac{|F|_0}{\omega_0^2|K|_{\min}}+\omega|x'|_0. \tag{23}$$

另一方面, 由李晓静的文献 [19] 的引理 2.1, 我们知道

$$|x'|_0\leqslant\frac{1}{2}\int_0^\omega|x''(t)|\mathrm{d}t. \tag{24}$$

在方程 (21) 两边乘以 $x''(t)$, 并从 0 到 ω 积分我们有

$$\int_0^\omega|x''(t)|^2\mathrm{d}t+\lambda\omega_0^2\int_0^\omega K(t)x(t)x''(t)\mathrm{d}t=\lambda\int_0^\omega F(t)x''(t)\mathrm{d}t,$$

结合 (23), (24) 式和 Hölder 不等式我们有

$$\int_0^\omega|x''(t)|^2\mathrm{d}t\leqslant\frac{\omega_0^2|K|_0\omega^2}{2}\int_0^\omega|x''(t)|^2\mathrm{d}t+\frac{|F|_0(|K|_0+|K|_{\min})\sqrt{\omega}}{|K|_{\min}}\left(\int_0^\omega|x''(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2},$$

结合条件 $\omega_0^2|K|_0\omega^2<2$ 可知存在 $M_1>0$, 使得

$$\int_0^\omega|x''(t)|^2\mathrm{d}t\leqslant M_1.$$

由 (24) 式, 我们有 $|x'|_0\leqslant\dfrac{\sqrt{\omega}}{2}\left(\int_0^\omega|x''(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}$, 从而存在 $M_2>0$, 使得

$$|x'|_0\leqslant M_2. \tag{25}$$

结合 (23) 和 (25) 式我们有

$$|x|_0\leqslant\frac{|F|_0}{\omega_0^2|K|_{\min}}+\omega M_2:=M_3.$$

令 $M=\max\{M_2,M_3\}$, $\Omega=\{x\in X:|x^{(i)}|_0<M,i=0,1\}$ 和 $\Omega_1=\{x\in\partial\Omega:x\in\mathrm{Ker}L\}$, 则 $\forall x\in\partial\Omega_1$,

$$QNx=-\frac{\omega_0^2}{\omega}x\int_0^\omega K(t)\mathrm{d}t\neq 0.$$

另一方面, 考虑到 $\int_0^\omega K(t)\mathrm{d}t>0$, 故令 $J:\mathrm{Im}Q\longrightarrow\mathrm{Ker}L$ 为恒同映射, 且取变换

$$H(x,\mu)=-\mu x+(1-\mu)JQNx,\quad (x,\mu)\in\Omega\times[0,1],$$

那么, $\forall(x,\mu)\in(\partial\Omega\cap\mathrm{Ker}L)\times[0,1]$, 我们有

$$H(x,\mu)=-\frac{\omega_0^2(1-\mu)}{\omega}x\int_0^\omega K(t)\mathrm{d}t-\mu x\neq 0.$$

因此

$$\begin{aligned}&\deg\{JQN,\Omega\cap\mathrm{Ker}L,0\}\\=&\deg\{H(x,0),\Omega\cap\mathrm{Ker}L,0\}\\=&\deg\{H(x,1),\Omega\cap\mathrm{Ker}L,0\}\end{aligned}$$

$$=\deg\{-I,\Omega\cap \mathrm{Ker}L,0\}\neq 0,$$

根据 Mawhin 重合度拓展定理 [20], 我们可知, 方程 (6) 至少存在一个 ω 周期解.

4 系统周期解的唯一性结果

定理 2 在系统 (6) 中, 如果 $f(0)=0$, $\omega_0^2|K|_0\omega^2<2$, $\omega_0^2|K'|_0\omega^2<2K_1$, 且对 $\forall x,y$, 满足 $(f(x)-f(y))(x-y)\geqslant |x-y|^2$, 则系统 (6) 存在唯一一个 ω 周期解.

证明 定理 1 已经证明了方程 (6) 至少存在一个 ω 周期解. 假设 $u(t)$ 和 $v(t)$ 是方程 (6) 的两个不同 ω 周期解, 令 $z(t)=u(t)-v(t)$, 则

$$\begin{aligned}&z''(t)+K_1(f(u'(t))-f(v'(t)))\\&\quad+\omega_0^2K(t)z(t)\\&=0.\end{aligned}\tag{26}$$

假设 t_1 和 t_2 分别为函数 $z(t)$ 的最大值点和最小值点, 则由 (26) 式可知 $z(t_1)\geqslant 0$, $z(t_2)\leqslant 0$, 结合 $z(t)$ 的连续性, 易见存在常数 $\xi\in \boldsymbol{R}$ 使得 $z(\xi)=0$, 从而由数学分析知识可知 $|z|_0\leqslant\int_0^\omega|z'(t)|\mathrm{d}t$. 在 (26) 式两边同乘以 $(u(t)-v(t))'$ 并从 0 到 ω 上积分, 并由 $|z|_0\leqslant\int_0^\omega|z'(t)|\mathrm{d}t$ 式和条件对 $\forall x,y$, 满足 $(f(x)-f(y))(x-y)\geqslant|x-y|^2$ 可知

$$K_1\int_0^\omega|z'(t)|^2\mathrm{d}t\leqslant\frac{\omega_0^2|K'|_0\omega^2}{2}\int_0^\omega|z'(t)|^2\mathrm{d}t.$$

由条件 $\omega_0^2|K'|_0\omega^2<2K_1$ 和 $|z|_0\leqslant\int_0^\omega|z'(t)|\mathrm{d}t$ 式可知上式意味着 $z(t)\equiv z'(t)\equiv 0$, 即相对转动非线性动力系统 (6) 有唯一 ω 周期解.

5 具体例子

考虑系统

$$x''+f(x')+\frac{1}{(2\pi)^4}(\cos t+\frac{3}{2})x=\sin t,\tag{27}$$

其中函数 f 满足 $f(0)=0$, 且对 $\forall x,y$, 满足 $(f(x)-f(y))(x-y)\geqslant|x-y|^2$, 此时 $K_1=1$, $\omega_0^2=\dfrac{1}{(2\pi)^4}$, $K(t)=\cos t+\dfrac{3}{2}$, 显然, 系统 (27) 满足定理 2 的所有条件, 故由定理 2 可得系统 (27) 存在唯一的一个 2π 周期解.

6 结 论

1. 本文针对一类具有时变刚度, 一般广义阻尼力和强迫周期力项的相对转动非线性动力学模型. 运用 Mawhin 重合度理论, 得到了该模型的周期解存在唯一性结果, 推广了已有的结果.

2. 文献 [13] 研究的方程 (7) 和文献 [14] 研究的方程 (8) 是本文研究方程 (6) 当 $K(t)$ 为常数时的特殊情形.

3 从我们举的例子可以发现我们的刚度 $K(t)=\cos t+\dfrac{3}{2}$, 并不是常数, 所以不能用文献 [13, 14] 的结论研究系统 (28), 故本文的结果推广和改进了文献 [13, 14] 的相应工作.

[1] Carmeli M 1985 *Found. Phys.* **15** 175

[2] Carmeli M 1986 *Int. J. Theor. Phys.* **15** 89

[3] Luo S K 1996 *J. Beijing Inst. Technol.* **16(S1)** 154 (in Chinese) [罗绍凯 1996 北京理工大学学报 **16(S1)** 154]

[4] Luo S K 1998 *Appl. Math. Mech.* **19** 45

[5] Luo S K, Chen X W, Fu J L 2001 *Chin. Phys.* **10** 271

[6] Luo S K 2002 *Chin. Phy. Lett.* **19** 449

[7] Luo S K, Chen X W, Guo Y X 2002 *Chin. Phys.* **11** 429

[8] Luo S K, Chen X W, Guo Y X 2002 *Chin. Phys.* **11** 523

[9] Wang K 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3987 (in Chinese) [王坤 2005 物理学报 **54** 3987]

[10] Zhao W, Liu B, Shi P M, Jiang J S 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3852 (in Chinese) [赵武, 刘彬, 时培明, 蒋金水 2006 物理学报 **55** 3852]

[11] Shi P M, Liu B 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3678 (in Chinese) [时培明, 刘彬 2007 物理学报 **56** 3678]

[12] Meng Z, Liu B 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6194 (in Chinese) [孟宗, 刘彬 2007 物理学报 **56** 6194]

[13] Wang K, Guan X P, Qiao J M 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 3648(in Chinese) [王坤, 关新平, 乔杰敏 2010 物理学报 **59** 3648]

[14] Li X J, Chen X Q 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 210201 (in Chinese) [李晓静, 陈绚青 2012 物理学报 **61** 210201]

[15] Li X J 2007 *Chin. Phys.* **16** 2837

[16] Li X J 2008 *Chin. Phys.* B **17** 1946

[17] Li X J 2010 *Chin. Phys.* B **19** 020202

[18] Li X J 2010 *Chin. Phys.* B **19** 030201

[19] Xiaojing Li 2009 *Nonlinear Analysis* **71** 2764

[20] Gaines R E, Mawhin J L 1977 *Coincidence Degree and Nonlinear Differential Equations*, Berlin: Springer

The periodic solution problem of a relative rotation nonlinear dynamic system with time-varying stiffness*

Li Xiao-Jing† Chen Xuan-Qing Yan Jing

(*College of Mathematics and Physics, Jiangsu University of Technology, Changzhou* 213001, *China*)

(Received 18 November 2012; revised manuscript received 7 December 2012)

Abstract

Firstly, the relative rotation nonlinear dynamic system is established, which contains time-varying stiffness, commonly damping force and compulsive periodic force. Secondly, some results of the existence and uniqueness of periodic solutions of the system are obtained by using the continuation theorem of coincidence degree theory. The significance is that we generalize the results published in the literature. Furthermore, an example is given to illustrate that our results are new.

Keywords: relative rotation nonlinear dynamic system, time-varying stiffness, periodic solution, existence and uniqueness

PACS: 02.30.Hq **DOI:** 10.7498/aps.62.090202

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11071205, 11101349), and the Natural Science Foundation of Jiangsu Province, China (Grant No. BK2011042).

† Corresponding author. E-mail: lixiaojing14@jstu.edu.cn