

具有固有频率涨落的记忆阻尼线性系统的随机共振*

谢文贤^{1)†} 李东平¹⁾ 许鹏飞¹⁾ 蔡力¹⁾ 靳艳飞²⁾

1)(西北工业大学应用数学系, 西安 710072)

2)(北京理工大学力学系, 北京 100081)

(2014年1月5日收到; 2014年1月28日收到修改稿)

研究了在内噪声、外噪声(固有频率涨落噪声)及周期激励信号共同作用下具有指数型记忆阻尼的广义 Langevin 方程的共振行为. 首先将其转化为等价的三维马尔可夫线性系统, 再利用 Shapiro-Loginov 公式和 Laplace 变换导出系统响应一阶矩和稳态响应振幅的解析表达式. 研究发现, 当系统参数满足 Routh-Hurwitz 稳定条件时, 稳态响应振幅随周期激励信号频率、记忆阻尼及外噪声参数的变化存在“真正”随机共振、传统随机共振和广义随机共振, 且随机共振随着系统记忆时间的增加而减弱. 数值模拟计算结果表明系统响应功率谱与理论结果相符.

关键词: 随机共振, 广义 Langevin 方程, 稳态响应振幅

PACS: 05.40.-a, 05.10.Gg, 02.50.-r

DOI: 10.7498/aps.63.100502

1 引言

多样不确定环境下动力系统的随机共振已成为物理、生物和化学等诸多领域的热点研究问题之一^[1-6]. 其中, 线性谐振子作为动力系统的基础性模型, 不同形式的激励噪声对其共振行为影响显著^[7-11]. 较之于传统的随机共振, Gitterman^[7,8] 在乘性色噪声或分段噪声驱动的线性谐振子中研究了一类广义随机共振. 针对系统频率或振子质量受到随机扰动而影响共振行为的研究也已开展^[9-11]. 文献^[9] 在研究受外部周期力驱动的频率涨落的线性谐振子的共振现象时, 发现稳态响应振幅存在“真实”随机共振. 而文献^[10] 考虑了环境介质分子对粒子的随机吸附而存在质量涨落, 研究发现质量涨落的线性谐振子存在“真实”共振、参数诱导共振等多种共振行为. 此外, 靳艳飞和胡海岩^[11] 对线性阻尼振子引入周期调制噪声外激励以及与之关联的乘性色噪声参数激励, 研究发现该类

系统存在传统随机共振、广义随机共振和“真实”随机共振, 且改变两噪声的强度比值可获得随机多共振现象.

具有记忆阻尼的非马尔可夫线性系统多用于描述粒子在复杂无序的非均匀环境(如黏性材料、稠密流体等)中的运动, 由于媒介对粒子速度的记忆性, 导致这类系统具有非马尔可夫性而出现反常扩散^[12-15]. 特别地, 针对指数型记忆阻尼, Siegle 等^[16] 给出了可行且最少维数的马尔可夫扩展方法, 文献^[17, 18] 则研究了由该类记忆阻尼所产生的弹道扩散. 随着此类系统的反常扩散研究增多, 其记忆阻尼项对系统随机共振的影响备受关注^[19,20]. 钟苏川等^[19] 将系统内噪声建模为分数阶高斯噪声, 利用分数阶 Langevin 方程观察到输出响应振幅的广义随机共振. Neiman 和 Sung^[20] 研究了内噪声和周期激励信号作用下的指数型记忆阻尼系统的共振行为, 发现记忆阻尼项通常抑制随机共振, 但该研究仅考虑了内噪声和周期激励信号的联合作用, 未同时考虑可能的、复杂的外部环境

* 国家自然科学基金(批准号: 11101333, 11302172, 11272051)和陕西省自然科学基金(批准号: 2011GQ1018)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: wenxianxie@nwpu.edu.cn

对系统的干扰而产生的随机共振现象.

基于指数型记忆核^[18], 本文研究了在周期激励信号驱动下具有内噪声的广义 Langevin 方程的共振行为, 且进一步考虑到外部环境对系统的影响, 使系统固有频率具有随机涨落, 并建模为非对称双态噪声. 在理论分析稳态响应振幅随系统参数变化所产生的随机共振的同时, 数值模拟了位移响应和响应功率谱以验证本文理论结果的有效性.

2 具有固有频率涨落的记忆阻尼线性系统

考虑由内噪声、外噪声及周期激励信号共同作用的记忆阻尼线性系统, 其广义 Langevin 方程为

$$\ddot{x}(t) + \int_0^t \gamma(t-t')\dot{x}(t')dt' + [\omega^2 + c\xi(t)]x(t) = A_0 \sin(\Omega t) + F(t). \quad (1)$$

这里, $x(t)$ 为粒子的位移, ω 为系统固有频率, A_0 和 Ω 为周期激励信号的振幅和频率, 系数 c 取值为 0 (不存在外噪声) 或 1 (存在外噪声). 系统记忆核函数 $\gamma(t)$ ^[18] 建模为

$$\gamma(t) = \gamma_0[\delta(t) - \tau^{-1} \exp(-t/\tau)],$$

其中, γ_0 为阻尼系数, τ 为记忆时间. 系统内噪声 $F(t)$ 与记忆核函数 $\gamma(t)$ 之间满足涨落耗散理论,

$$\langle F(t)F(t') \rangle = k_B T \gamma(|t-t'|),$$

其中, k_B 为玻尔兹曼常数, T 为系统环境的绝对温度.

本文考虑固有频率 ω 因受扰动而引入的乘性外噪声 $\xi(t)$, 即固有频率涨落噪声, $\xi(t)$ 建模为满足下述统计性质的双态噪声,

$$\begin{aligned} \langle \xi(t) \rangle &= 0, \\ \langle \xi(t)\xi(t') \rangle &= \sigma \exp[-\lambda|t-t'|], \end{aligned}$$

其中, σ 为噪声强度, λ 为噪声相关率, $\xi(t)$ 在 $\{M, -N\}$ 中取值, M 和 N 均为正数. 不妨设 M 到 $-N$ 的转换率为 p , 逆转换率为 q , $\xi(t)$ 的非对称性用 Δ 表示, 并有

$$\begin{aligned} \sigma &= MN, \\ \lambda &= p + q, \\ \Delta &= M - N. \end{aligned}$$

3 系统响应一阶矩及稳态响应振幅

引入新变量 $v(t)$, $u(t)$, 将系统 (1) 扩展为三维马尔可夫线性系统^[18], 具体方程如下:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= v(t), \\ \dot{v}(t) &= -\gamma_0 v(t) - [\omega^2 + c\xi(t)]x(t) \\ &\quad + A_0 \sin(\Omega t) + u(t) + \eta(t), \\ \dot{u}(t) &= \tau^{-1}[-u(t) + \gamma_0 v(t) - \eta(t)], \end{aligned} \quad (2)$$

其中 $\eta(t)$ 为高斯白噪声, 满足

$$\begin{aligned} \langle \eta(t) \rangle &= 0, \\ \langle \eta(t)\eta(t') \rangle &= 2k_B T \gamma_0 \delta(t-t'). \end{aligned}$$

同时, 假设 $\xi(t)$ 与 $\eta(t)$ 不存在互关联情形, 即 $\langle \xi(t)\eta(t) \rangle = 0$.

为叙述方便, 本文考虑外噪声存在的情形, 即 $c = 1$. 对方程 (2) 两边取统计平均, 可得到系统响应一阶矩的微分方程

$$\begin{aligned} \frac{d\langle x(t) \rangle}{dt} &= \langle v(t) \rangle, \\ \frac{d\langle v(t) \rangle}{dt} &= -\gamma_0 \langle v(t) \rangle - \omega^2 \langle x(t) \rangle \\ &\quad - \langle \xi(t)x(t) \rangle + A_0 \sin(\Omega t) + \langle u(t) \rangle, \\ \frac{d\langle u(t) \rangle}{dt} &= -\tau^{-1} \langle u(t) \rangle + \tau^{-1} \gamma_0 \langle v(t) \rangle. \end{aligned} \quad (3)$$

然后, 利用 Shapiro-Logvinov 公式^[21] 对 (3) 式中出现的新耦合项 $\langle \xi(t)x(t) \rangle$ 进行解耦, 得到 $\langle \xi(t)x(t) \rangle$ 所满足的方程为

$$\frac{d\langle \xi(t)x(t) \rangle}{dt} = \langle \xi(t)v(t) \rangle - \lambda \langle \xi(t)x(t) \rangle. \quad (4)$$

对 (4) 式中出现的新耦合项 $\langle \xi(t)v(t) \rangle$ 进行同样处理, 可得

$$\begin{aligned} \frac{d\langle \xi(t)v(t) \rangle}{dt} &= -(\lambda + \gamma_0) \langle \xi(t)v(t) \rangle - \omega^2 \langle \xi(t)x(t) \rangle - \langle \xi^2(t)x(t) \rangle \\ &\quad + \langle \xi(t)u(t) \rangle. \end{aligned} \quad (5)$$

另一方面, 由于 $\xi(t)$ 是双态噪声, (5) 式中高阶的相关函数 $\langle \xi^2(t)x(t) \rangle$ 可降阶为

$$\langle \xi^2(t)x(t) \rangle = \sigma \langle x(t) \rangle + \Delta \langle \xi(t)x(t) \rangle. \quad (6)$$

将 (6) 式代入 (5) 式, 整理后得到

$$\begin{aligned} \frac{d\langle \xi(t)v(t) \rangle}{dt} &= -(\lambda + \gamma_0) \langle \xi(t)v(t) \rangle - (\omega^2 + \Delta) \langle \xi(t)x(t) \rangle \\ &\quad - \sigma \langle x(t) \rangle + \langle \xi(t)u(t) \rangle. \end{aligned} \quad (7)$$

同样地, 耦合项 $\langle \xi(t)u(t) \rangle$ 可分解为

$$\frac{d\langle \xi(t)u(t) \rangle}{dt} = -(\lambda + \tau^{-1})\langle \xi(t)u(t) \rangle + \tau^{-1}\gamma_0\langle \xi(t)v(t) \rangle. \quad (8)$$

因此, (3), (4), (7), (8) 式联立为关于 $\langle x(t) \rangle$, $\langle v(t) \rangle$, $\langle u(t) \rangle$, $\langle \xi(t)x(t) \rangle$, $\langle \xi(t)v(t) \rangle$ 和 $\langle \xi(t)u(t) \rangle$ 的微分方程组. 为叙述方便, 记

$$z_1(t) = \langle x(t) \rangle,$$

$$\begin{aligned} z_2(t) &= \langle v(t) \rangle, \\ z_3(t) &= \langle u(t) \rangle, \\ z_4(t) &= \langle \xi(t)x(t) \rangle, \\ z_5(t) &= \langle \xi(t)v(t) \rangle, \\ z_6(t) &= \langle \xi(t)u(t) \rangle. \end{aligned}$$

然后, 对新标记下的方程组做 Laplace 变换, 得到

$$\begin{cases} s\hat{z}_1(s) - \hat{z}_2(s) = z_1(0), \\ \omega^2\hat{z}_1(s) + (s + \gamma_0)\hat{z}_2(s) - \hat{z}_3(s) + \hat{z}_4(s) = z_2(0) + (A_0\Omega)/(s^2 + \Omega^2), \\ -\gamma_0\hat{z}_2(s) + (s\tau + 1)\hat{z}_3(s) = \tau z_3(0), \\ (s + \lambda)\hat{z}_4(s) - \hat{z}_5(s) = z_4(0), \\ \sigma\hat{z}_1(s) + (\omega^2 + \Delta)\hat{z}_4(s) + (s + \lambda + \gamma_0)\hat{z}_5(s) - \hat{z}_6(s) = z_5(0), \\ -\gamma_0\hat{z}_5(s) + (s\tau + \lambda\tau + 1)\hat{z}_6(s) = z_6(0), \end{cases} \quad (9)$$

其中, $z_i(0)$ 为初始值, $\hat{z}_i(s)$ 为 $z_i(t)$ 的 Laplace 变换 ($i = 1, 2, \dots, 6$).

由 (9) 式可得到 s 域上 $\hat{z}_i(s)$ ($i = 1, 2, \dots, 6$) 的解析表达式, 其中

$$\hat{z}_1(s) = g_2(s)/g_1(s) + [g_3(s)A_0\Omega]/[g_1(s)(s^2 + \Omega^2)]. \quad (10)$$

这里,

$$g_1(s) = (s + \lambda)m_1m_3 + m_2m_3 - \sigma\tau^{-2}(s\tau + 1)(s\tau + \lambda\tau + 1), \quad (11)$$

$$\begin{aligned} g_2(s) &= \tau^{-1}[(s + \gamma_0)(s\tau + 1) - \gamma_0] \\ &\times [(s + \lambda)m_1 + m_2]z_1(0) \\ &+ \tau^{-1}(s\tau + 1)[(s + \lambda)m_1 + m_2]z_2(0) \\ &+ [(s + \lambda)m_1 + m_2]z_3(0) \\ &- \tau^{-1}(s\tau + 1)m_1z_4(0) \\ &- \tau^{-2}(s\tau + 1)(s\tau + \lambda\tau + 1)z_5(0) \\ &- \tau^{-1}(s\tau + 1)z_6(0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_3(s) &= \tau^{-1}(s\tau + 1)[(s + \lambda)m_1 + m_2], \quad (12) \\ m_1 &= \tau^{-1}[(s + \lambda + \gamma_0)(s\tau + \lambda\tau + 1) - \gamma_0], \\ m_2 &= \tau^{-1}(\omega^2 + \Delta)(s\tau + \lambda\tau + 1), \\ m_3 &= \tau^{-1}[(s^2 + s\gamma_0 + \omega^2)(s\tau + 1) - s\gamma_0]. \end{aligned}$$

最后, 对 (10) 式做逆 Laplace 变换, 得到系统响应一阶矩 $z_1(t) = \langle x(t) \rangle$ 的解析表达式为

$$\langle x(t) \rangle = G_0(t)$$

$$+ A_0 \int_0^t G_1(t - t') \sin(\Omega t') dt', \quad (13)$$

其中, $G_0(t)$ 和 $G_1(t)$ 分别为 $g_2(s)/g_1(s)$ 和 $g_3(s)/g_1(s)$ 的逆 Laplace 变换. 特别地, $g_3(s)/g_1(s)$ 可看作系统传递函数, 同时为保证系统响应一阶矩 $\langle x(t) \rangle$ 的稳定性, 系统传递函数分母所对应的特征方程 $g_1(s) = 0$ 不能存在具有正实部的根, 从而根据 Routh-Hurwitz 稳定性判定依据得到

$$\begin{aligned} a_3b_1 - a_5b_2 &> 0, \\ a_3b_1b_2 - a_5b_2^2 - b_1b_3 &> 0, \\ 2a_0a_3a_5b_1b_2 - a_0a_3^2b_1^2 - a_0a_5^2b_2^2 - b_1^3b_3^3 &> 0, \end{aligned} \quad (14)$$

其中, a_i ($i = 0, 1, \dots, 5$) 和 b_j ($j = 1, 2, 3$) 的表达式见附录 A.

下面均在使得 (14) 式成立的参数范围内展开讨论. 在充分长的时间后, 考虑到初始条件对 (13) 式 $\langle x(t) \rangle$ 的影响逐渐消失, 从而系统响应一阶稳态矩为

$$\begin{aligned} \langle x(t) \rangle_{as} &= \langle x(t) \rangle|_{t \rightarrow \infty} \\ &= A_0 \int_0^t G_1(t - t') \sin(\Omega t') dt' \\ &= A \sin(\Omega t + \varphi), \end{aligned} \quad (15)$$

其中, A 和 φ 分别为系统的输出稳态响应振幅和初相位.

根据 (11), (12), (15) 式, 得到 A 和 φ 的表达

式为

$$A = A_0 \sqrt{(f_1^2 + f_2^2)/(f_3^2 + f_4^2)},$$

$$\varphi = \arctan[(f_1 f_4 - f_2 f_3)/(f_1 f_3 + f_2 f_4)], \quad (16)$$

其中系数 $f_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 的表达式见附录 B.

4 系统稳态响应振幅的共振行为和数值验证

下面我们讨论 (16) 式中稳态响应振幅 A 随周期激励信号频率 Ω 、记忆时间 τ 、外噪声强度 σ 及外噪声相关率 λ 的变化所产生的共振行为. 同时, 给出了位移响应和响应功率谱的数值模拟以验证理论分析结果.

4.1 稳态响应振幅的共振行为

系统稳态响应振幅 A/A_0 是周期激励信号频率 Ω 的函数, 图 1 (a) 和 (b) 分别描述了此函数随着系统固有频率 ω 和记忆时间 τ 的变化. 图 1 (a) 中, 系统稳态响应振幅 A/A_0 随周期激励信号频率 Ω 的变化曲线出现共振峰, 随着固有频率 ω 的增大, 共振峰向 Ω 增大的方向移动, 且峰值降低. 因此, 只有当 ω 和 Ω 满足某种特定关系时, 由信号驱动的系统输出响应强度才能达到最大值, 该现象类似于在简谐激励力下线性振子发生的共振, 称其为“真实”

随机共振 [8]. 但随着记忆时间 τ 的增大, 图 1 (b) 所示的共振峰位置不变, 而峰值降低, 故适当减小记忆时间可增强系统对外部驱动信号的响应强度.

图 2 描述了系统稳态响应振幅 A/A_0 随记忆时间 τ 变化的非单调行为. 图 2 (a) 给出了以阻尼系数 γ_0 为参数的 A/A_0 - τ 曲线, 三条曲线均出现了共振峰, 即本文系统具有广义的随机共振. 当 $\tau < 1.8$ (对应红色临界点) 时, 随着 γ_0 的增加, A/A_0 的峰值逐渐升高, 共振增强. 当 $\tau > 1.8$ 时, 随着 γ_0 的增加, A/A_0 的值逐渐减小, 系统响应减弱. 在复杂无序的非均匀环境中, 不同的介质对粒子运动所产生的记忆效应存在一定的差异. 较短的记忆时间将使得稳态响应振幅达到最大值, 随着介质对粒子历史速度记忆时间的延长, 系统响应减弱, 共振现象甚至消失, 而阻尼系数却使得系统存在影响稳态响应振幅输出的临界记忆时间. 在实验环境下, 因为记忆时间的选取局限于一定的范围, 所以上述结论有一定的参考价值. 系统的记忆性是由内部环境运动所引发. 图 2 (b) 给出了外部环境对 A/A_0 - τ 曲线变化的影响, 随着外噪声的非对称性 Δ 的增大, A/A_0 的峰值降低, 共振峰位置向右移动, 但峰的形状保持不变. 这说明增大 Δ 值除影响系统的响应强度外, 还会延缓共振行为的出现. 为简化参数取值, 图 2—图 4 所示的曲线均取 $\Omega = 0.6, \omega = 1.2$.

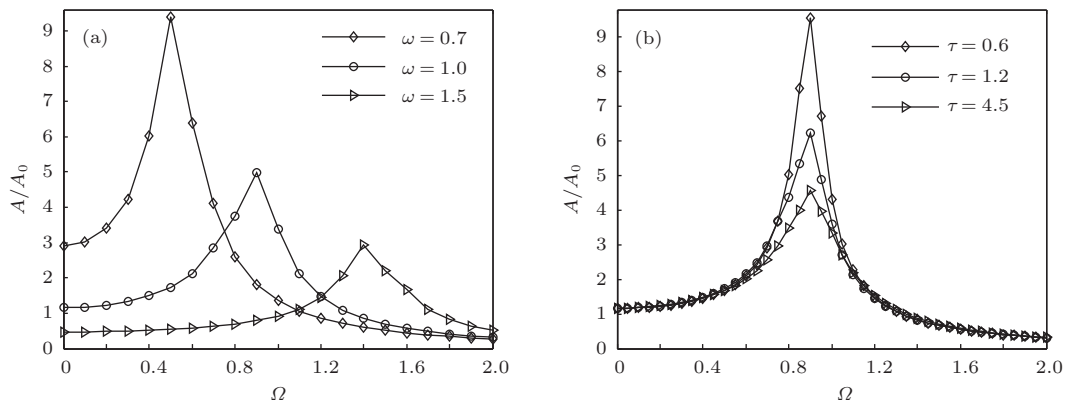


图 1 系统稳态响应振幅 A/A_0 随周期激励信号频率 Ω 的变化 $\gamma_0 = 0.2, \Delta = 0.4, \lambda = 3.0, \sigma = 1.5$. (a) 系统固有频率 ω 不同时 A/A_0 随 Ω 的变化, $\tau = 2.0$; (b) 记忆时间 τ 不同时 A/A_0 随 Ω 的变化, $\omega = 1.0$

系统稳态响应振幅 A/A_0 也是外噪声强度 σ 的函数, 图 3 (a) 和 (b) 分别描述了此函数随外噪声的非对称性 Δ 和记忆核的阻尼系数 γ_0 的变化. A/A_0 随 σ 的变化出现了一个共振峰, 呈现出传统随机共振. 从图 3 (a) 可以看出: 当 $\sigma < 1.7$ (对应红色临界点) 时, A/A_0 - σ 曲线单调递增, 但 A/A_0 随着 Δ 的增

加而减小, 这与图 2 (b) 所示的现象 ($\sigma = 1.5$) 一致; 当 $\sigma > 1.7$ 时, A/A_0 - σ 曲线出现显著变化, 随着 Δ 的增加, 共振峰位置向右移动, 且峰值依次升高. 由此可知, 在一定参数条件下, 外噪声有助于增强系统对外部驱动信号的响应强度, 随着非对称性 Δ 的增大, 该作用增强. 但在图 3 (b) 中, 随着 γ_0 的增大,

共振峰位置向左移动, 峰值降低, 且当 γ_0 增大到一定值时共振峰甚至消失, 即系统阻尼使响应减弱, 这符合物理直观. 显然, 针对记忆系统引入乘性外噪声的情形, 粒子受外部环境干扰而使得运动复杂多变, 增强外噪声的输入, 系统响应强度增加, 相应的随机共振增强. 而阻尼效应来自系统内部环境, 对共振行为呈现抑制作用. 这说明粒子所处的内环

境和外环境决定了系统是否并存增强随机共振现象和抑制共振现象.

图4(a)和(b)分别给出了以外噪声强度 σ 和记忆时间 τ 为参数的 $\frac{A}{A_0}$ - λ 曲线. 系统稳态响应振幅 A/A_0 为噪声相关率 λ 的非单调函数, 出现了一个共振峰, 即为广义随机共振. 在图4(a)中, 随着 σ 的增加, 共振峰位置向右移动且峰值升高. 由此可

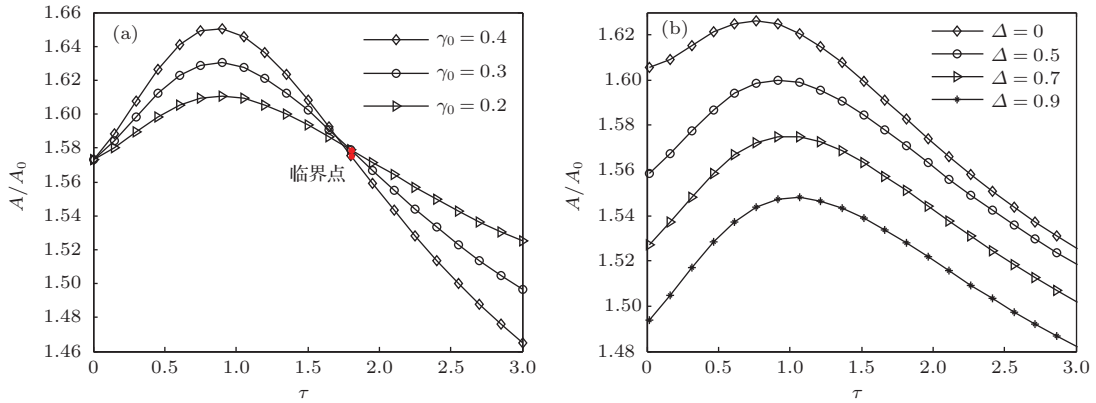


图2 (网刊彩色) 系统稳态响应振幅 A/A_0 随记忆时间 τ 的变化 $\lambda = 1.0, \sigma = 1.5$. (a) 阻尼系数 γ_0 不同时 A/A_0 随 τ 的变化, $\Delta = 0.4$; (b) 外噪声的非对称性 Δ 不同时 A/A_0 随 τ 的变化, $\gamma_0 = 0.2$

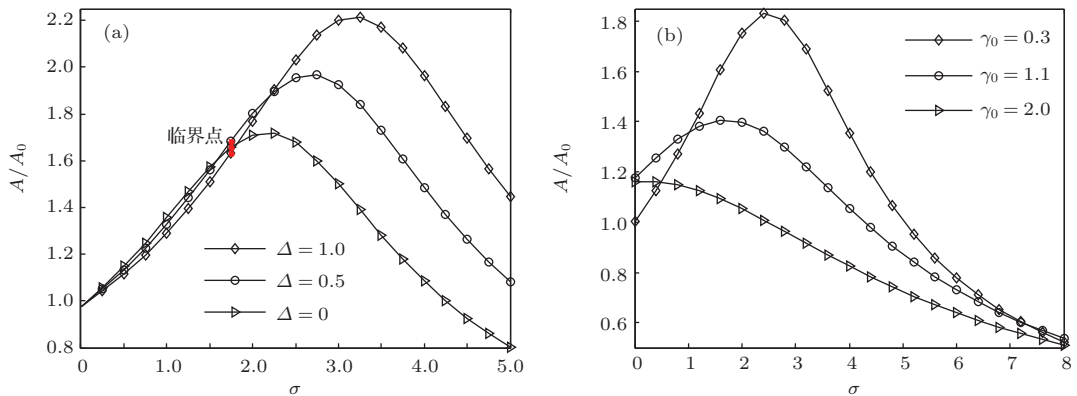


图3 (网刊彩色) 系统稳态响应振幅 A/A_0 随外噪声强度 σ 的变化 $\tau = 2.0, \lambda = 1.0$. (a) 外噪声的非对称性 Δ 不同时 A/A_0 随 σ 的变化, $\gamma_0 = 0.2$; (b) 阻尼系数 γ_0 不同时 A/A_0 随 σ 的变化, $\Delta = 0.4$

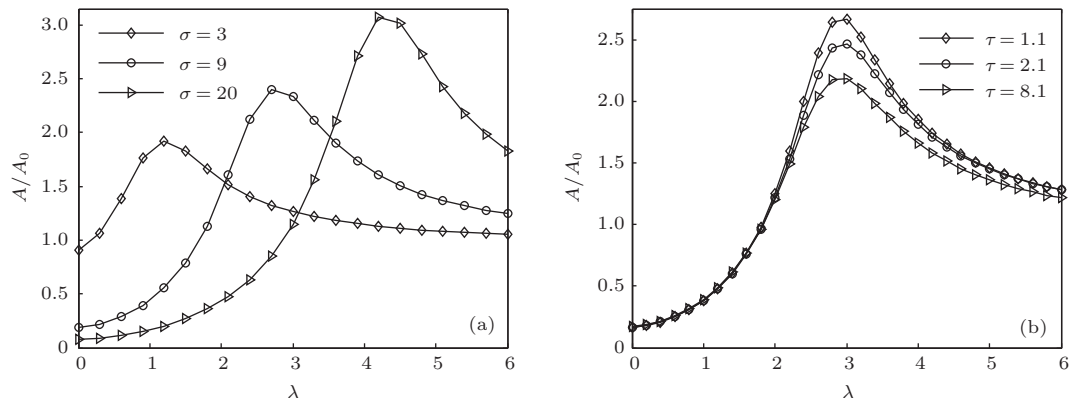


图4 系统稳态响应振幅 A/A_0 随噪声相关率 λ 的变化 $\gamma_0 = 0.2, \Delta = 0.4$. (a) 外噪声强度 σ 不同时 A/A_0 随 λ 的变化, $\tau = 2.0$; (b) 记忆时间 τ 不同时 A/A_0 随 λ 的变化, $\sigma = 10$

见, 外噪声的相关率和强度对增强系统输出响应的作
用呈现出正相关关系. 由于噪声强度和相率是刻
画双态噪声的两个重要特征参数, 对于不同系统
背景, 可通过有效控制噪声参数的调整来获取系
统输出响应. 图 4(b) 描述了共振行为受内部环境
记忆性的影响, 随着 τ 的增加, 共振峰值降低,
系统响应减弱, 这类似于图 1(b) 所示的现象. 结
果表明, 在复杂无序的非均匀环境中, 随着介质
对粒子历史速度记忆时间的延长, 周期激励信号
下系统的输出

响应强度会减弱.

4.2 数值验证

运用四阶 Runge-Kutta 算法对方程 (2) 进行数
值模拟, 采样间隔为 0.05 s, 得到如图 5(a) 所
示的位移响应时间历程图. 相比于系统无外噪声
激励 ($c = 0$) 情形, 增加外部乘性非对称双态
噪声 ($c = 1$) 将使得位移响应波动加剧, 这符
合复杂无序的非均匀环境中粒子的运动行为.

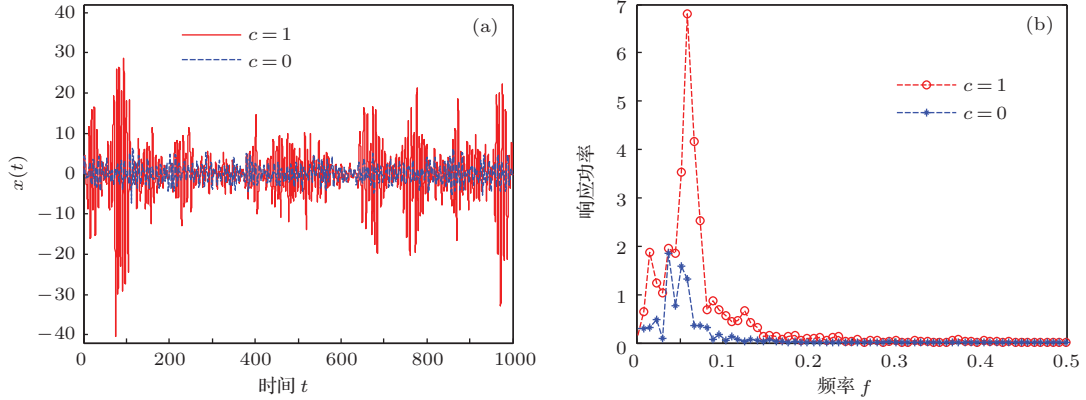


图 5 (网刊彩色) 有(无)外噪声情形下, 系统 (1) 的位移响应和响应功率谱 $k_B = 1.4, T = 1.1, \gamma_0 = 0.2, M = 1.44, N = 1.04, \lambda = 3.0, \tau = 2.0, \omega = 1.0, \Omega = 0.6$. (a) 位移响应; (b) 响应功率谱

进一步, 对时间序列数值做快速 Fourier 变换,
采样频率为 5, 得到的系统响应功率谱如图 5(b)
所示. 在图 5(b) 中, 响应功率谱随频率的变化
出现针状尖峰, 表明由周期激励信号驱动的记
忆阻尼线性系统呈现出随机共振现象, 对于存
在外噪声 ($c = 1$) 情形, 具有固有频率涨落
的系统 (1) 的随机共振行为得到显著增强.

此外, 随着记忆时间的适当延长, 系统共振峰
值降低, 输出信号响应强度减弱. 通过数值计
算系统响应功率谱验证了系统 (1) 随机共振
现象的存在. 系统会受到不同噪声的干扰, 在
介质对速度具有记忆性的非均匀环境中, 布
朗粒子存在的质量涨落或周期信号频率及相
位存在的涨落对随机共振的影响还有待研究.
同时, 对于具有更加复杂的记忆阻尼 (如内
噪声为 Mittag-Leffler 噪声、简谐速率噪声
等) 的非马尔可夫系统的随机共振也有待进
一步研究.

5 结 论

本文研究了由内噪声、外噪声及周期激励
信号共同作用的具有固有频率涨落的记忆阻
尼线性系统的随机共振. 记忆核为指数型的
广义 Langevin 方程, 该系统嵌入为三维马
尔可夫线性系统, 并推导出系统响应一阶矩
和稳态响应振幅的解析表达式. 分析发现:
稳态响应振幅随周期激励信号频率和固有
频率的变化出现“真实”随机共振; 稳态响
应振幅随外噪声强度的变化出现传统随机
共振, 在一定范围内, 外噪声的非对称性会
增强系统输出响应, 而系统阻尼作用则相反;
稳态响应振幅随记忆时间和外噪声相率的
变化出现广义随机共振, 且阻尼系数对于
共振行为的影响存在临界记忆时间.

附录 A $a_i (i = 0, 1, \dots, 5)$ 和 $b_j (j = 1, 2, 3)$ 的具体表达式

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \tau^{-1}[\omega^2\lambda(\lambda^2 + \lambda\gamma_0 + \omega^2 + \Delta) - \lambda\sigma] \\
 &\quad + \tau^{-2}[\omega^2(\omega^2 + \lambda^2 + \Delta) - \sigma], \\
 a_1 &= \omega^2\lambda(\lambda^2 + \lambda\gamma_0 + \omega^2 + \Delta) - \lambda\sigma \\
 &\quad + 2\tau^{-1}[\omega^4(1 + \Delta) + \omega^2\lambda(2\lambda + \gamma_0) - \sigma] \\
 &\quad + 2\tau^{-2}\omega^2\lambda, \\
 a_2 &= \lambda(\lambda + \gamma_0)(3\omega^2 + \lambda\gamma_0) + \omega^4 + \Delta\omega^2 \\
 &\quad + \Delta\lambda\gamma_0 - \sigma + \tau^{-1}[2\omega^2(3\lambda + \gamma_0) \\
 &\quad + \lambda^2(\lambda + 2\gamma_0) + \Delta(\lambda + \gamma_0)] \\
 &\quad + \tau^{-2}[2\omega^2 + \lambda^2 + \Delta],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_3 &= (2\lambda + \gamma_0)(2\omega^2 + 2\lambda\gamma_0) + \Delta(\lambda + \gamma_0) \\
 &\quad + \tau^{-1}[3\omega^2 + 2\lambda^2 + 4\lambda\gamma_0 + 2\Delta] + 2\tau^{-2}\lambda, \\
 a_4 &= 2\omega^2 + 5\lambda\gamma_0 + 3\lambda^2 + \gamma_0^2 \\
 &\quad + \Delta + \tau^{-1}[5\lambda + 2\gamma_0] + \tau^{-2}, \\
 a_5 &= 3\lambda + 2\gamma_0 + 2\tau^{-1}, \\
 b_1 &= (a_4a_5 - a_3a_6)/a_5, \\
 b_2 &= (a_2a_5 - a_1a_6)/a_5, \\
 b_3 &= (a_1a_4a_5 - a_1a_3a_6 - a_0a_5^2)/a_5.
 \end{aligned}$$

附录B 系数 $f_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 的具体表达式

$$\begin{aligned}
 f_1 &= -\tau^{-2}(\lambda\tau + 1)(2\lambda\tau + \gamma_0\tau + 1)\Omega^2 \\
 &\quad - \tau^{-2}(\omega^2 + \Delta)(\Omega^2\tau^2 - \lambda\tau - 1) \\
 &\quad + \tau^{-2}(\Omega^2\tau - \lambda)(\Omega^2\tau - \lambda^2\tau - \lambda\tau\gamma_0 - \lambda), \\
 f_2 &= \tau^{-2}\Omega(2\lambda\tau + \gamma_0\tau + 1)(\Omega^2\tau - \lambda) \\
 &\quad - \tau^{-1}\Omega(\lambda\tau + 2)(\omega^2 + \Delta) \\
 &\quad + \tau^{-2}\Omega(\lambda\tau + 1)(\Omega^2\tau - \lambda^2\tau - \lambda\tau\gamma_0 - \lambda), \\
 f_3 &= \tau^{-2}[(\Omega^2 - \omega^2)(\Omega^2\tau^2 - \lambda\tau - 1) \\
 &\quad - \tau\gamma_0\Omega^2(\lambda\tau + 1)](\omega^2 + \Delta) \\
 &\quad + \tau^{-2}\sigma(\Omega^2\tau^2 - \lambda\tau - 1) \\
 &\quad + \tau^{-2}[(\Omega^2 - \omega^2)(\tau\Omega^2 - \lambda) - \lambda\tau\gamma_0\Omega^2] \\
 &\quad \times [(\lambda + \gamma_0)(\lambda\tau + 1) - \Omega^2\tau - \gamma_0] \\
 &\quad + \tau^{-2}\Omega[(\Omega^2 - \omega^2)(\lambda\tau + 1)\Omega \\
 &\quad + \tau\gamma_0\Omega^3](2\lambda\tau + \gamma_0\tau + 1), \\
 f_4 &= \tau^{-2}[(\Omega^2 - \omega^2)(\lambda\tau + 1)\Omega + \tau\gamma_0\Omega^3] \\
 &\quad \times [(\lambda + \gamma_0)(\lambda\tau + 1) - \Omega^2\tau - \gamma_0] \\
 &\quad + \tau^{-1}[(\Omega^2 - \omega^2)(\lambda\tau + 2) + \tau\gamma_0\Omega^2] \\
 &\quad \times (\omega^2 + \Delta)\Omega + \tau^{-1}\sigma(\lambda\tau + 2)\Omega \\
 &\quad - \tau^{-2}\Omega[(\Omega^2 - \omega^2)(\tau\Omega^2 - \lambda) - \lambda\tau\gamma_0\Omega^2] \\
 &\quad \times (2\lambda\tau + \gamma_0\tau + 1).
 \end{aligned}$$

参考文献

- [1] Kang Y M, Xu J X, Xie Y 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2712 (in Chinese) [康艳梅, 徐健学, 谢勇 2003 物理学报 **52** 2712]
- [2] Tian Y, Huang L, Luo M K 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 050502 (in Chinese) [田艳, 黄丽, 罗懋康 2013 物理学报 **62** 050502]
- [3] Ning L J, Xu W 2007 *Physica A* **382** 415
- [4] Xu W, Jin Y F, Xu M, Li W 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5027 (in Chinese) [徐伟, 靳艳飞, 徐猛, 李伟 2005 物理学报 **54** 5027]
- [5] Berdichevsky V, Gitterman M 1999 *Phys. Rev. E* **60** 1494
- [6] Zhang L Y, Jin G X, Cao L, Wang Z Y 2012 *Chin. Phys. B* **21** 120502
- [7] Gitterman M 2012 *Physica A* **391** 5343
- [8] Gitterman M 2004 *Phys. Rev. E* **69** 041101
- [9] Zhang L Y, Jin G X, Cao L 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 080502 (in Chinese) [张良英, 金国祥, 曹力 2012 物理学报 **61** 080502]
- [10] Yu T, Zhang L, Luo M K 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 120504 (in Chinese) [蔚涛, 张路, 罗懋康 2013 物理学报 **62** 120504]
- [11] Jin Y F, Hu H Y 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2895 (in Chinese) [靳艳飞, 胡海岩 2009 物理学报 **58** 2895]
- [12] Mankin R, Laas K, Sauga A 2011 *Phys. Rev. E* **83** 061131
- [13] Despósito M A, Viñales A D 2009 *Phys. Rev. E* **80** 021111
- [14] Viñales A D, Wang K G, Despósito M A 2009 *Phys. Rev. E* **80** 011101
- [15] Bao J D, Song Y L, Ji Q, Zhuo Y Z 2005 *Phys. Rev. E* **72** 011113
- [16] Siegle P, Goychuk I, Talkner P, Hänggi P 2010 *Phys. Rev. E* **81** 011136
- [17] Bao J D, Zhuo Y Z 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 138104
- [18] Bao J D, Bai Z W 2005 *Chin. Phys. Lett.* **22** 1845
- [19] Zhong S C, Gao S L, Wei K, Ma H 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 170501 (in Chinese) [钟苏川, 高仕龙, 韦鹏, 马洪 2012 物理学报 **61** 170501]
- [20] Neiman A, Sung W 1996 *Phys. Lett. A* **223** 341
- [21] Shapiro V E, Loginov V M 1978 *Physica A* **91** 563

Stochastic resonance of a memorial-damped linear system with natural frequency fluctuation*

Xie Wen-Xian^{1)†} Li Dong-Ping¹⁾ Xu Peng-Fei¹⁾ Cai Li¹⁾ Jin Yan-Fei²⁾

1) (*Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China*)

2) (*Department of Mechanics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China*)

(Received 5 January 2014; revised manuscript received 28 January 2014)

Abstract

The stochastic resonance is investigated in the generalized Langevin equation with exponential memory kernel subjected to the joint action of internal noise, external noise and external sinusoidal forcing. The system is converted into three-dimensional Markovian Langevin equations. Furthermore, using the Shapiro-Loginov formula and the Laplace transformation technique, the exact expressions of the first moment and the steady response amplitude are obtained. The research results show that with the variations of external sinusoidal force frequency and the parameters of memory kernel and external noise, the system presents bona-fide stochastic resonance, conventional stochastic resonance and stochastic resonance in a broad sense under the condition of Routh-Hurwitz stability. In addition, the stochastic resonance can be weakened as the memory time increases. Moreover, the numerical results of power spectrum of system are in agreement with the analytic results.

Keywords: stochastic resonance, generalized Langevin equation, steady response amplitude

PACS: 05.40.-a, 05.10.Gg, 02.50.-r

DOI: [10.7498/aps.63.100502](https://doi.org/10.7498/aps.63.100502)

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11101333, 11302172, 11272051) and the Natural Science Foundation of Shaanxi Province, China (Grant No. 2011GQ1018).

† Corresponding author. E-mail: wenxianxie@nwpu.edu.cn