

粮仓内颗粒压力的测量: Janssen 行为及其偏差*

李智峰 彭政[†] 蒋亦民

(中南大学物理与电子学院, 长沙 410083)

(2013 年 12 月 28 日收到; 2014 年 1 月 14 日收到修改稿)

基于侧壁分为上下两部分的装置, 测量了圆柱对称颗粒系统(竖直粮仓)的压力随高度的变化, 并讨论了测得的仓内压力与 Janssen 理论模型的偏离情况. 实验结果显示无论是否对粮仓进行 Vanel 等建议的让“侧壁摩擦力充分动员”的底座缓慢下沉操作处理, 测得的仓内压力都有不同程度的偏离 Janssen 现象. 另外如果没有沉降处理, 在填充颗粒的荷载下侧壁会发生微弱下沉, 从而显著增大压力偏离的程度, 但沉降处理可将其消除. 这些结果表明, 粮仓的颗粒重量在仓底和沿侧壁边界上的分配情况受制备方式和装置变形的影响明显, 具体分布情况复杂多样. 因此颗粒物质的静应力弹性理论分析应该取应力边界条件.

关键词: 颗粒物质, 粮仓, Janssen 模型, 应力

PACS: 45.70.-n, 81.05.Rm, 47.80.Fg, 83.80.Fg

DOI: 10.7498/aps.63.104503

1 引言

能否支持静态剪切力的存在是区分液体(指牛顿流体)与固体的充分必要判据. 由于静应力张量 σ_{ij} 简化为压强 P , 不支持静剪切力的液体的静力学非常简单: 直接求解力平衡方程 $\nabla_i P = \rho g_i$ (考虑密度 ρ 均匀, g_i 为重力加速度矢量) 可得到空间位置 r_i 处的压强 $P = \rho g_i r_i$, 即托里拆利定律. 由于此压强公式在液体与容器壁交界处也成立, 进而不必再考虑液体静力学边界条件问题. 但对支持静态剪切力存在的固体样品, 分析其静应力 σ_{ij} 的空间分布就复杂很多, 单凭力平衡方程 $\nabla_j \sigma_{ij} = \rho g_i$ 不能完全求解, 还需要所研究样品的本构关系(如联系应力与应变的线性胡克定律)和问题的边界条件. 虽然快速流动的颗粒物质有类似液体的地方, 但圆柱形容器和其中装载的颗粒物质构成的静态系统(下面简称为粮仓)是存在剪切力的, 因此具有固体静力学的所有复杂性. 特别是颗粒物质与容器交界处的边界条件与颗粒填充的方式、填充时容器及其固定支架的变形、环境扰动、填充完的后续处理等

诸多制备历史因素和测量环境装置有关(以下将笼统地称为实验协议), 没有普适的具体公式可用.

上述复杂性和困难使得粮仓的静应力分布成为一个近年来得到很多研究、但仍不能彻底解决的颗粒物理力学问题^[1-14]. 绝大多数文献报道的工作均与德国工程师 Janssen 提出的一个连续介质模型有密切关系^[15,16], 它主要有以下两点猜测: 第一点是虽然仓内颗粒物质的径向应力 σ_{rr} 和轴向应力 σ_{zz} 是随位置变化的, 但比值 $J = \sigma_{rr}/\sigma_{zz}$ (简称转向比) 保持为常数不变, 这可看作是粮仓的本构关系; 第二点是关于边界条件的猜测, 即侧壁边界处的摩擦系数 $\mu = \sigma_{rz}/\sigma_{rr}$ 从仓顶到仓底保持常数不变, 同时第一点的本构关系在侧壁处也成立. 特别值得强调的是, 这里的 J 和 μ 值一般与样品制备历史、容器的固定支撑情况等实验协议有关, 并不是颗粒物质的材料常数. μ 能在从负到正的一个范围里取值, 并可在侧壁悬浮的情况下等于零^[12,14]. 另外虽然工程领域有“转向比 J 与库仑内摩擦角 φ 之间存在 $J = 1 - \sin \varphi$ 的 Jaky 关系”的说法^[17,18], 这意味着 J 是像 φ 一样的材料参数, 但近来的实验发现许多粮仓似乎并不满足 Jaky 关系^[11]. 因为 J

* 国家自然科学基金(批准号: 10904175, 11274390)资助的课题.

[†] 通讯作者. E-mail: zpeng@csu.edu.cn

和 μ 值都不是完全被颗粒材料所确定的, Janssen 的本构关系和边界条件肯定都不是普适的材料特征. 认识到这些, 我们就不难理解为何十几年前的一些基于 Janssen 本构关系建立颗粒物质静力学的理论尝试 (如文献 [19, 20] 中报道的模型) 都没有取得成功.

作为一个简单的圆柱对称 (Couette 几何) 系统, 解决粮仓的静应力分布问题对颗粒物理基础研究而言无疑是重要的. 如果仍围绕 Janssen 提出的方法考虑此问题, 我们需要澄清在哪些实验协议下上述的两个猜测成立 (无论 J 和 μ 值如何), 而在哪些实验协议下不成立或有偏差. 由于受到应力测量方法的限制, 如伴随静力测量时探头会发生微弱的移动变化、粮仓内部应力无法观测、小面积探头会由于尺寸效应出现测量值涨落大的现象等等, 从而导致直接观测分析 Janssen 猜测是很困难的. 目前这方面的研究仍处于积累发展阶段.

对于一个填充质量为 M_0 , 高度为 H , 半径为 R 的粮仓, 如果记深度 z 处沿垂直方向的仓内压力 $M = \iint \sigma_{zz} da/g$ (单位为 kg, 面积元 da 的积分区域是圆柱的横截面), Janssen 两个猜测给出的一个重要推论是 [1,2]:

$$M = \frac{M_0 \lambda}{H} \left[1 - \exp \left(-\frac{z}{\lambda} \right) \right], \quad (1)$$

其中 $\lambda = R/2\mu J$. 取 z 等于仓高 H , (1) 式给出了仓底的视在质量 $M_a = M(z = H)$. 大多数文献中的实验工作局限于将粮仓底座设计成与侧壁分离的活塞, 测量不同填充质量 M_0 下的仓底 M_a , 通过考察它们是否满足 (1) 式来间接了解两个猜测的成立情况 (简称“ M_0 - M_a ”方法). 目前从这类实验得到的比较普遍的看法是: 对于从固定高度用直接流入颗粒的方法制备的粮仓, 还需要补充某些后续处理方法才可得到比较符合 (1) 式的结果, 但仍可能有小偏差. 如 Vanel 等提出的“仓底活塞缓慢沉降 [4]”、上拉侧壁 [5]、反复扰动寻找最小视在质量 [10] 等等. 这似乎给人这样的印象, 即没有经过后续处理的粮仓会严重偏离 Janssen 模型. 本文注意到此结论不一定准确, 因为“ M_0 - M_a ”方法需要制备多个不同高度的粮仓, 违反 (1) 式也可能是由于它们的 λ 值不相同的缘故. 考虑到前面提到 J 和 μ 都不是材料参数, 进而 λ 值的确有随填充高度的不同而不同的可能. 因此仍存在填充完毕不再做后续处理时粮仓不一定会严重违反 Janssen 模型的可能, 因为每个不同高度的粮仓仍可能符合 (1) 式, 只不

过 λ 值不同而已. 换言之, “ M_0 - M_a ”方法里的后续处理可能只是用来保证不同高度粮仓的 λ 值达到趋同, 不一定是出现 Janssen 行为的必要措施. 值得注意的是, 实际工程中遇到的真实粮仓几乎都是直接填充而成的, 没有这些复杂多样的后续处理, 但它们的力学设计和安全分析常用简单方便的 Janssen 模型进行评估 [21]. 因此测量没有后续处理的粮仓应力及其与 Janssen 模型的符合或偏离程度对相关工程有启发和帮助.

为研究后续处理与 (1) 式的关系, 本文将对一批填充质量 M_0 固定不变 (同时仓高 H 也不变) 的、有和没有仓底沉降处理的粮仓直接测量仓内压力 $M(z)$ 随深度的变化. 本文测量原理是将侧壁在不同深度 z 处断开为上下两部分, 然后同时监测仓底活塞的 M_a 和下侧壁与颗粒物质之间的静摩擦力 M_{down} , 由此可得到 $M(z)$, 简称为“ M_z - M_a ”方法 (图 1). 值得注意的是, 由于 M_0 不变, 如果忽略上下侧壁之间的、远小于颗粒直径的断开缝隙的影响, 按照同样实验协议制备的样品在不同 z 处应该具有相同的 λ 值. 这时“ M_z - M_a ”方法可直接观测按照某实验协议制备的粮仓与 (1) 式的符合情况. 本文结果显示: 无论有还是没有仓底活塞沉降, 粮仓静压力都大体符合 (1) 式, 但仍存在明显偏差; 有活塞沉降时, 偏差主要发生在靠近顶部区域, 这在定性上与文献 [4] 中观测的偏差一致, 而没有沉降时偏差主要出现在仓底区域. 另外有无活塞沉降最大的区别是 (1) 式中的 λ 值不同, 后者约比前者大 3 倍.

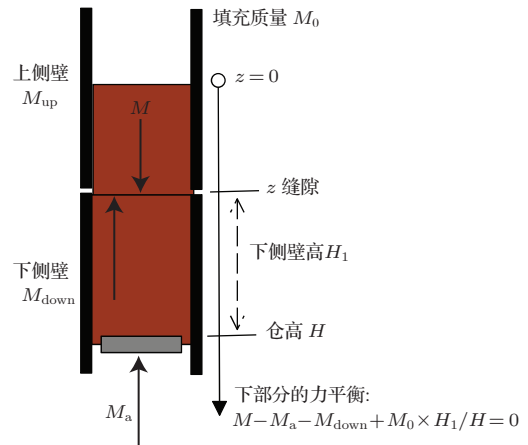


图1 粮仓内部压力 M 的测量原理示意图

最近对粮仓应力做更加全面测量开始得到一些研究者的关注. 如文献 [9] 用软弹性材料做粮仓的侧壁, 通过分析其弹性变形情况可得到沿粮仓侧壁的切向和法向应力分布. 目前用热中子散射技术

可探测顶部加压几十兆帕以上高压的粮仓的所有应力分量空间分布^[8]. 本文粮仓与前者区别是侧壁基本刚性, 与后者区别是仓内压力低(几个千帕的数量级). 上述实验数据相互补充, 将有助于逐步解决长期困扰我们的粮仓系统应力问题.

2 实验

2.1 装置和测量方法

实验装置如图2所示. 粮仓的侧壁被分成了上下两个部分, 两部分各为一个内径 $D = 10\text{ cm}$, 壁厚为 2 cm , 长度 $L = 50\text{ cm}$ 的铝制圆筒(各重约 10 kg), 其中上筒固定在角钢支架上, 下筒直接压在环形压力传感器(其示数为 M_{down})上, 压力传感器量程为 30 kg , 精度为 1 g . 上下筒在实验过程中不接触, 且间隙小于 1 mm . 粮仓底部为一个直径为 9.8 cm 的铝制活塞, 活塞通过硬连接杆固定在底部压力传感器(其示数为 M_{a})上, 底部压力传感器的量程和精度与环形压力传感器的量程和精度相同. 底部压力传感器放置在一个电控的步进电机升降台上, 通过升降台可自由地调节活塞在下筒中的高度, 并保证在缓慢升降过程中活塞与器壁不接触. 实验采用的颗粒材料是直径 d 介于 $4.5\text{--}5\text{ mm}$ 的球形玻璃珠(玻璃密度约为 2.5 g/cm^3). 粮仓系统以固定点源的方式制备, 即通过漏斗式料仓从粮仓中心位置固定下料, 每次实验下料的颗粒质量恒定 ($M_0 = 6.23\text{ kg}$), 对应的填充高度 $H = 50\text{ cm}$, 堆积分数约为 0.64 . 由于底部活塞位置有上下移动, 为保证下料过程相对粮仓的冲击高度相同, 料仓的出料口探入粮仓内部, 并在每次下料之前做位置调节, 保持其出料高度距底部活塞约为 55 cm . 通过调节底部活塞的高度可以改变粮仓高度 H 在上下筒之间的分配比例, $z + H_1 = H$, 其中 z 和 H_1 分别为粮仓颗粒在上筒和下筒的高度(图1). 实验中调节 H_1 在 $5\text{--}45\text{ cm}$ 之间变化, 然后实时同步地测量 M_{a} 与 M_{down} 随不同 H_1 的变化关系.

颗粒物质静力学实验的一个最大困难是装置的微弱变形都可能对样品的力学状态产生显著干扰. 由于受传感器变形的限制, 图2装置中的仓底活塞和下侧壁在加载过程中都有微小的整体下沉的现象, 其力学干扰程度目前还无法避免和评估. 但上侧壁在加载时的整体下沉导致的力学效果可通过调节固定它的横梁的坚固程度加以考察. 本文分别对仓底活塞固定, 活塞下降处理后以及 1 kg 加

载的条件下, 上侧壁向下变形大约为 $34, 6, 3\text{ }\mu\text{m}$ 的3种不同加固情况的 M_{a} 和 M_{down} 随 z 的变化进行了系统测量.

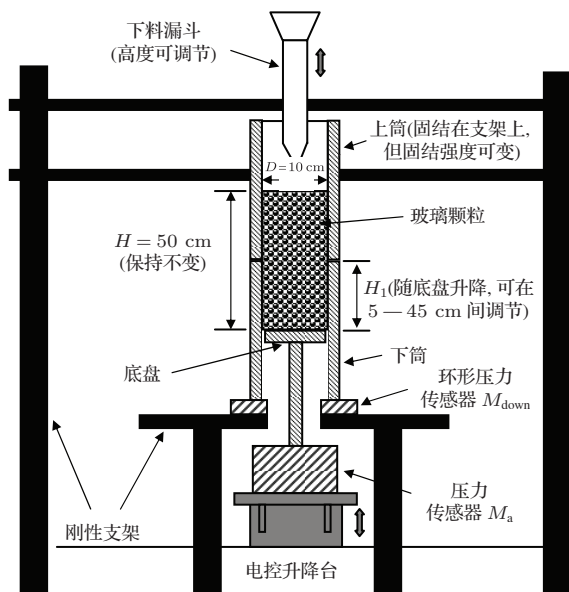


图2 测量粮仓内部压力的实验装置图

2.2 固定仓底

按照上面的方法从固定高度的点源流入 $M_0 = 6.23\text{ kg}$ 的颗粒, 保持仓底活塞固定(电控升降台不下降), 待系统进入力学稳定后, 从底部压力传感器读取 M_{a} 值. 整个实验中, 对于不同的上侧壁加固情况和 z 值, 读取了 600 个 M_{a} 值. 经分析后没有发现它们与侧壁加固情况和 z 的变化有系统的关联. 视在质量平均值 $\langle M_{\text{a}} \rangle = 1.76\text{ kg}$. 图3所示的实线为这 600 多个 M_{a} 相对于 $\langle M_{\text{a}} \rangle$ 的涨落分布. 由于标准方差不是很大(约 9.2%), 可以认为本文重复制备的所有粮仓的高度 H , 填充质量 M_0 , 视在质量 M_{a} 都是恒定的. 目前对 M_{a} 值存在 9.2% 涨落的原因还不能解释, 很可能是制备历史过程中的一些不可控制的复杂因素所致, 诸如装置和力探测器的微小变形, 系统的几何准直误差, 特别是粮仓从流动填充到静止会经历一个复杂的、非均匀类液态-固态转变等等. 值得强调的是, M_{a} 对上侧壁的向下微小变形似乎不是很敏感, 即对于 3 种不同的上筒横梁加固情况, M_{a} 没有系统变化.

图4为测得的下侧壁与颗粒物质之间的静摩擦力 M_{down} 随 z 的变化, 其中的误差棒是 15 个测量数据的标准方差. 从图4可以看出, 当上侧壁变形为 $34\text{ }\mu\text{m/kg}$ 时, M_{down} 随 z 的变化明显地不同于上侧壁变形为 $6, 3\text{ }\mu\text{m/kg}$ 的情况(它们基本一致),

表明侧壁的整体竖向微小下沉对其摩擦力的影响很大, 我们需要将其减小到每千克几个微米的程度方可避免此影响. 由于前面提到的视在质量 M_a 并不受此影响, 这个力学现象应该只在上下侧壁之间发生, 没有扩展到仓底.

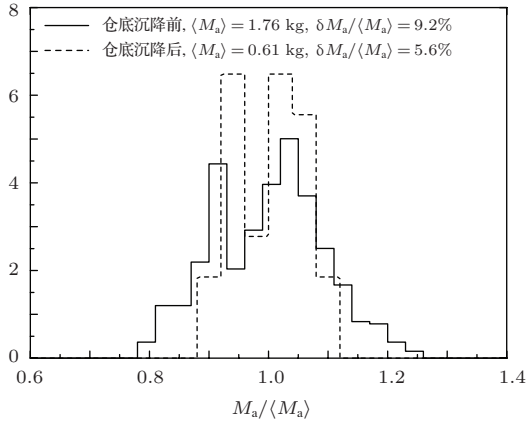


图3 仓底视在质量 M_a 的涨落分布

2.3 仓底活塞下降

为考察 Vanel 等^[4]提出的“仓底活塞缓慢下降”这一后续处理对 M_a 和 M_{down} 的影响, 我们如前所述地制备好高度为 H 的粮仓系统后, 通过步进电机将底部活塞缓慢匀速下降 5000 步长后停止 (下降速度约为 1 mm/s), 实验记录 M_a 和 M_{down} 随下降深度的变化, 每个 z 处重复实验 3 次, 结果如图 5 所示, 横坐标为升降台步进电机所走的步长, 1000 步为 0.24 mm. 对粮仓做仓底下降的后续处理

会显著改变 M_a 和 M_{down} .

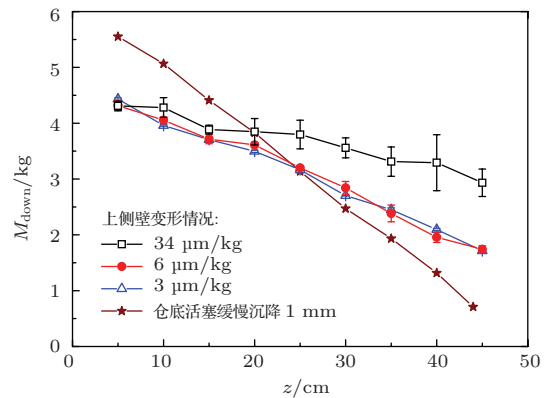


图4 上侧壁变形情况不同时, 下侧壁摩擦力 M_{down} 随 z 的变化

由图 5 (a) 可知, 不同 z 处的视在质量 M_a 都随着活塞的下降而急剧减小, 并在下降约 2000 步 (约 0.48 mm) 后几乎都达到了饱和值. 值得注意的是, 图 5 (a) 的不同曲线有较好的重叠现象, 这表明侧壁缝隙位置 z 的变化对 M_a 的影响不大. 另外上侧壁的不同加固程度对 M_a 几乎没有影响. 经多次重复实验, 沉降后视在质量的平均值 $\langle M_a \rangle = 0.61$ kg, 约为沉降前视在质量的 1/3, 其涨落分布直方图如图 3 的虚线所示. 另外可以看出仓底沉降能明显减弱 M_a 的涨落 (将 $M_a / \langle M_a \rangle$ 的标准方差减小至 5.6%), 也就是, 仓底沉降的操作的确有 Vanel 等认为的减缓粮仓制备过程中不确定因素影响的效果. 但就本文实验而言这个涨落的变化似乎并不重要, 因为只有不到 4 个百分点的差别.

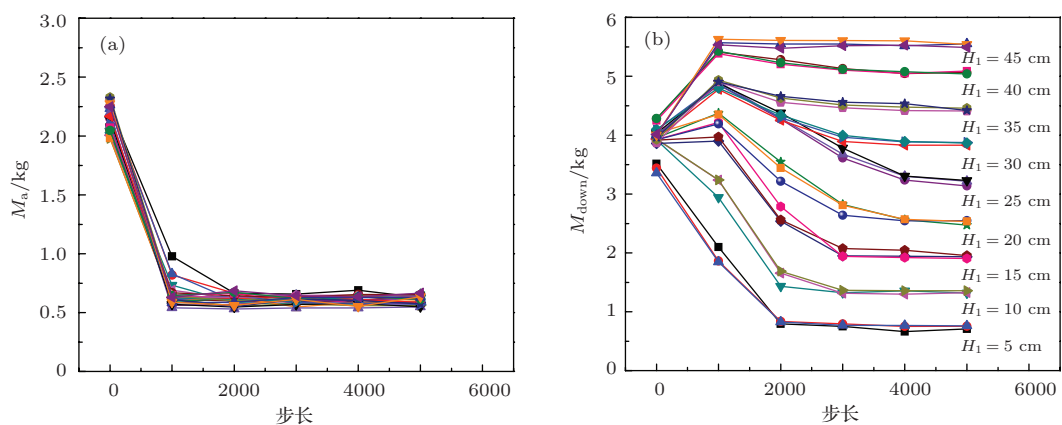


图5 (网刊彩色) H_1 不同时, 视在质量 M_a 和下侧壁质量 M_{down} 随活塞下降深度的变化 上侧壁固定程度为 $34 \mu\text{m}/\text{kg}$ (a) M_a 随活塞下降深度的变化; (b) M_{down} 随活塞下降深度的变化

与 M_a 对比, 图 5 (b) 所示的下侧壁静摩擦力 M_{down} 的变化行为更复杂一些. 当 $H_1 > 15$ cm 时会先增加后减小的行为, 然后在活塞下降

约 4000 步后也都几乎达到了各自的饱和值. 按照 Vanel 等提出的方法, 仓底活塞下降的后续处理有增大颗粒物质与侧壁之间的静摩擦力的效果, 使

得它被“充分动员”到接近最大静摩擦后活塞再继续下沉, 从而 M_a 和 M_{down} 不再受活塞下降的影响, 即达到饱和值. 值得指出的是, 图 5 (b) 显示的 M_{down} 减小现象表明 Vanel 等提出的方法至少不是沿着整个粮仓侧壁都成立. 特别是随着活塞的下降, 靠近底部的侧壁摩擦力不但没有被“充分动员”而增加, 反而减弱了.

仔细观察图 5 (a) 和 (b) 可以发现, M_a 和 M_{down} 并不是在同样的活塞下降深度达到饱和, M_{down} 要相对滞后一些. 这意味着即使底部活塞的压力 M_a 达到饱和, 即上下侧壁的总摩擦力 $M_0 - M_a$ 已达到恒定值, 静摩擦力在上下筒之间的分配还可以有不同的比例. 也就是同样的仓底压力 M_a 可能对应不同的侧壁静摩擦力分布. 注意这些现象都是偏离 Janssen 行为的, 进而显示粮仓的局域宏观力学行为比原来人们想象的复杂.

3 分析及讨论

取决于不同的实验协议, 实际粮仓的力学情况应该是复杂多样的, 其中有与 Janssen 模型及其两个猜测符合得很好的粮仓, 但也会有很多与它有偏离的粮仓. 围绕这个著名模型开展分析讨论, 并力图澄清此模型适用情形及其偏差情况是目前有关研究的一个基本思路. 由于本文测量了 Janssen 模型的推论 (1) 式中的所有量, 我们可通过它进一步了解一些 Janssen 行为及其偏离情况.

首先, 根据 Janssen 猜测, (1) 式中的参数 $\lambda = R/(2\mu J)$ 为常数, 取决于 $\mu \cdot J$ 乘积 (即 σ_{rz}/σ_{zz}). 利用在仓底 $z = H$ 处 (1) 式化为 $M = M_a$, 可得到本文粮仓的 λ 值. 本文实测的视在质量的涨落很小, 利用无沉降和沉降后的平均值 $\langle M_a \rangle = 1.76$ 和 0.61 kg, 得到仓底无沉降的粮仓 $\lambda = 14.6$ cm, 沉降后 λ 减小到 4.9 cm. 这个近 3 倍的变化表明即使对于那些符合 Janssen 猜测的粮仓, 参数 λ 或 $\mu \cdot J$ 乘积的值也与实验协议有关, 不是颗粒物质的材料性质. 目前可以肯定的是侧壁与颗粒物质的摩擦系数 μ 肯定与实验协议有关 (注意文中的“摩擦系数”仅指交界面上的切向力与法向力的比值, 不是“最大静摩擦系数”, 后者才是由交界面两边材料可确定的性质). 但还无法确认转向比 J 值是否也与实验协议有关. 澄清这个问题需要单独测量 μ 或 J , 这超出了本文实验的能力范围.

利用下侧壁内的颗粒物质的力平衡条件, 实验

测得的仓内压力 (图 1)

$$M = M_a + M_{\text{down}} - M_0 \left(1 - \frac{z}{H} \right), \quad (2)$$

可直接将测量得到的 M 与 (1) 式的计算结果比较以了解偏离 Janssen 情况, 结果如图 6 (a) 和图 7 (a) 所示. 另一个方法是比较上侧壁与颗粒物质之间的静摩擦力 (单位为 kg) M_{up} 的测量值和预测值, 其测量值:

$$M_{\text{up}} = M_0 - M_a - M_{\text{down}}, \quad (3)$$

积分 (1) 式可得到 Janssen 模型对 M_{up} 的预测值:

$$M_{\text{up}} = \frac{M_0 \lambda}{H} \left[\frac{z}{\lambda} - 1 + \exp \left(- \frac{z}{\lambda} \right) \right], \quad (4)$$

结果如图 6 (b) 和图 7 (b) 所示. 注意在仓顶 $z = 0$ 时, 有 $M_{\text{up}} = M = 0$ 和 $M_{\text{down}} = M_0 - M_a$; 在仓底 $z = H$ 时, 有 $M_{\text{up}} = M_0 - M_a$, $M_{\text{down}} = 0$ 和 $M = M_a$. 由于参数 λ 是用仓底处的测量值确定的, 图 6 和图 7 的仓底点处的测量值将落在 Janssen 预测值上, 因此偏差只在仓顶和仓底之间发生. 从图 6 和图 7 可以看到: 无论在仓底活塞沉降前还是沉降后, 偏差都明显可见, 仓内压力 M 的测量值都明显大于 Janssen 预测值 (图 6 (a) 和图 7 (a)); 沉降前 M 的最大偏差大致在靠近仓底的 $z/\lambda \sim 3$ 处, 沉降后它有向仓顶方向移动到 $z/\lambda \sim 1.5$ 的现象; 对上侧壁做加固, 能大幅度减小沉降前 M 与 Janssen 预测值的偏差, 但不能完全消除. 沉降后的测量值基本与这个加固无关, 这意味着加载时上侧壁每千克几十微米向下移动的效应能通过仓底缓慢下降的后续处理加以清除; 所有这些偏差在图 6 (b) 和图 7 (b) 所示的 M_{up} 随 z 的变化曲线中都有对应的体现.

值得提到的是, 图 6 (a) 所示的仓内压力 M 大于 Janssen 预测值的现象在早期 Vanel 等 [4] 用“ $M_0 - M_a$ ”方法做的测量工作中也存在, 但偏离程度要弱很多. 目前我们还不清楚这个分歧的具体原因. 从实验方法看, 本文与文献 [4] 存在以下区别. 首先本文采用的“ $M_z - M_a$ ”方法与 Vanel 等利用的“ $M_0 - M_a$ ”方法是有差别的, 主要是前者的填充质量 (或仓高) 恒定, 而后者的填充质量是变化的. 虽然都考虑了仓底沉降的后续处理, 两者仍可能存在分歧. 另外我们的装置尺寸比他们的装置尺寸大很多 (粮仓直径约大 3 倍, 颗粒粒径大 1 倍). 由于大装置测量探头的受力和变形比较大, 样品与测量装置之间可能会有较大的力学耦合, 这也许会加大测量值与 Janssen 模型的偏差.

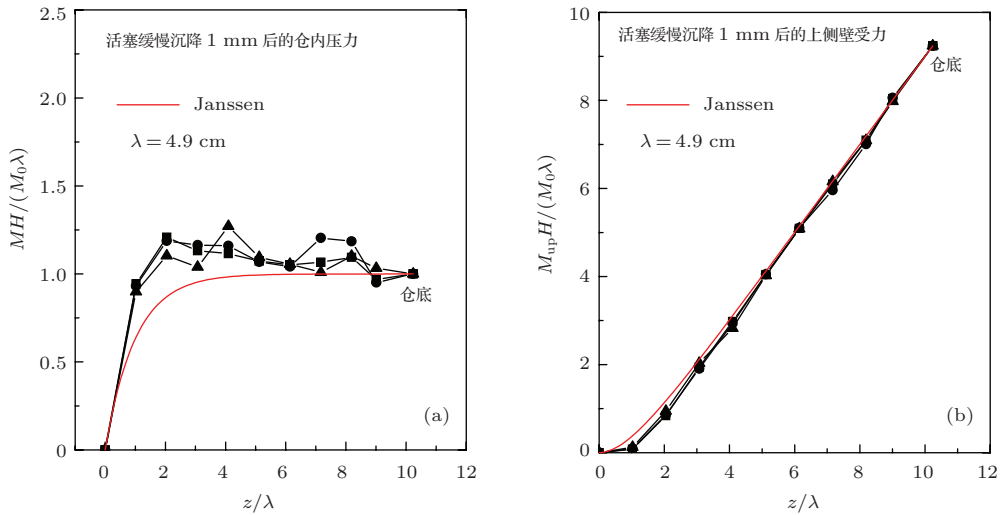


图6 (网刊彩色) 仓底活塞缓慢沉降 1 mm 后, 仓内压力和上侧壁摩擦力的测量值分别与 (1) 式和 (4) 式的计算结果的比较. 在不同 z 处重复测量 3 次. (a) 仓内压力的测量值与 (1) 式的计算结果的比较; (b) 上侧壁摩擦力的测量值与 (4) 式的计算结果的比较

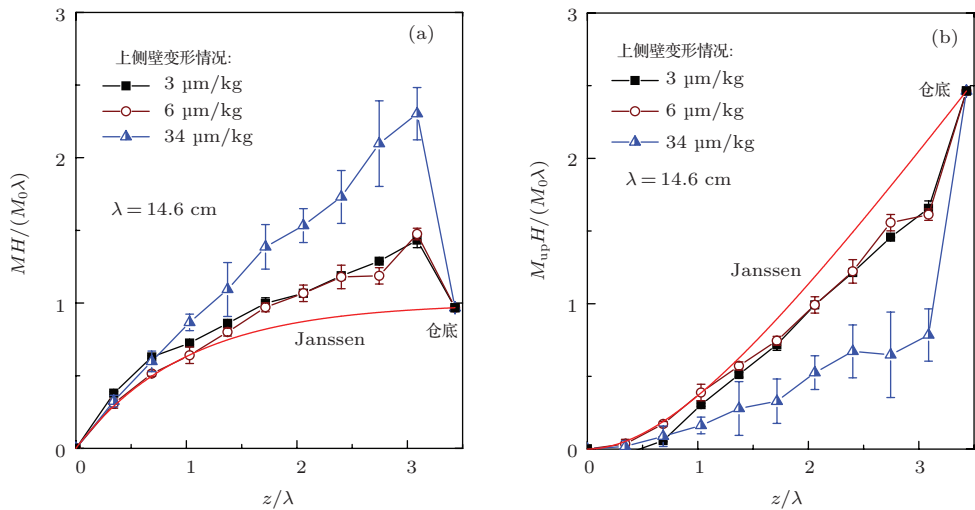


图7 仓底活塞无下沉操作时, 仓内压力和上侧壁摩擦力的测量值分别与 (1) 式和 (4) 式的计算结果的比较. 误差棒是 15 个数据的标准方差. (a) 仓内压力的测量值与 (1) 式的计算结果的比较; (b) 上侧壁摩擦力的测量值与 (4) 式的计算结果的比较

理论上讲, 研究粮仓的一个目标是期望澄清侧壁和底部刚性边界条件下的颗粒圆柱 (即 Couette 几何) 的力学行为. 实际装置是否接近这个刚性极限是一个值得注意的问题. 对于本文尺寸大小的粮仓, 我们通过不同程度加固上侧壁的方法对此作了简单考察. 由图 7 可知, 对于 M_{up} , 它的刚性极限似乎在每千克几个微米的变形以下, 而对于 M_a , 其基本不受每千克几十微米的变形的影响. 这提醒我们仅靠观测仓底视在质量了解粮仓应力是有局限性的.

前面提到可将粮仓静力学分为本构关系和边界条件两部分. 探测本构关系需要深入到颗粒物质内部, 只能用热中子散射、声波、或其他能穿透粮仓

的复杂实验手段. 原则上讲本文和大部分文献报道的工作只能探测和研究边界条件 (这要相对容易, 用普通测力探头即可), 无法对粮仓的本构关系提供直接的看法或证据. 粮仓的边界条件一般与实验协议有很大关系, 具体情况与 Janssen 猜测不同, 目前对它还没有全面彻底的了解清楚. 如果认可静态粮仓的颗粒物质在宏观上是一个非线性弹性体 (因为存在静剪切力), 那么其应力分布就可以用经典弹性理论框架分析. 这时将需要完整的边界条件. 文献 [6] 利用颗粒固体流体动力学理论得到了一个颗粒物质弹性势能模型, 以仓底和侧壁处没有弹性位移和侧壁处的摩擦系数 μ 为常数作为边界条件, 数值计算了粮仓问题的弹性解, 发现应力分布很好

地符合 Janssen 猜测, 并且 J 值也大致符合 Jaky 关系. 显然对于那些偏离 Janssen 模型或 Jaky 关系的粮仓, 需要用沿侧壁的切向应力和法向应力作为弹性分析的边界条件. 由于制备过程采用的各种复杂实验协议都不好理论分析, 粮仓的应力边界条件目前只能通过实验手段研究.

4 结 论

采用将侧壁断开成上下两部分, 并能同时检测填充颗粒沿竖直方向作用于下侧壁的力 M_{down} 和仓底的力 M_a 的实验装置, 本文测量了给定高度粮仓的内压力 $M(z)$ 沿竖直方向的变化. 为考察不同制备处理方式和仓壁受力微弱下沉等因素对仓内压力的影响, 及仓内压力测量值与 Janssen 模型预测结果的符合情况, 我们用上述装置对上侧壁 3 种不同加固程度和文献 [4] 提出的“缓慢下降仓底使得侧壁摩擦力充分激活”等情形的 $M(z)$ 进行了研究. 观测数据显示, 无论是否采纳仓底下降的处理, $M(z)$ 都会偏离 Janssen 预测. 没有仓底下降时, 如果上侧壁在颗粒作用下发生较大下沉, 其部分摩擦力可能转移到下侧壁, 从而显著增加与 Janssen 预测的偏离程度. 仓底下降后偏离情况会有所减小, 并且能清除上侧壁下沉带来的影响. 另外 M_a 受上侧壁下沉的影响不大, 但仓底下降会使其减小约 2/3. 这些结果表明, 粮仓中的颗粒重量在仓底和沿侧壁边界上的分布是复杂多样的, 受样品制备方式和装置变形的影响明显. 鉴于这种情况, 颗粒物质静应力的非线性弹性理论分析应该以应力边界条件为主 (即第二类诺依曼型边界条件).

参考文献

[1] de Gennes P G 1999 *Rev. Mod. Phys.* **71** S374

- [2] Lu K Q, Liu J X 2004 *Physics* **33** 629 (in Chinese) [陆坤权, 刘奇星 2004 物理 **33** 629]
- [3] Evesque P, de Gennes P G 1998 *CR. Acad. Sci. Paris Série Iib* **326** 761
- [4] Vanel L, Claudin P, Bouchaud J P, Cates M E, Wittmer J P 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 1439
- [5] Bertho Y, Frédérique G D, Hulin J P 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 144301
- [6] Brauer K, Pfitzner M, Krimer D O, Mayer M, Jiang Y M, Liu M 2006 *Phys. Rev. E* **74** 061311
- [7] Abdul Q, Shi Q, Liang X, Sun G 2010 *Chin. Phys. B* **19** 034601
- [8] Wensrich C, Kisi E, Zhang J, Kirstein O 2012 *Granul. Matter* **14** 671
- [9] Cambau T, Hure J, Marthelot J 2013 *Phys. Rev. E* **88** 022204
- [10] Li X, Jiang Y, Peng Z 2010 *J. Shandong Univ. (Natural Science)* **45** 101 (in Chinese) [李湘群, 蒋亦民, 彭政 2010 山东大学学报 (理学版) **45** 101]
- [11] Wang L Z, Jiang Y M, Peng Z, Zheng H P 2011 *Chin. Sci. Bull.* **56** 1091 (in Chinese) [王璐珠, 蒋亦民, 彭政, 郑鹤鹏 2011 科学通报 **56** 1091]
- [12] Peng Z, Li X Q, Jiang L, Fu L P, Jiang Y M 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2090 (in Chinese) [彭政, 李湘群, 蒋礼, 符力平, 蒋亦民 2009 物理学报 **58** 2090]
- [13] Zheng H P, Jiang Y M 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 7919 (in Chinese) [郑鹤鹏, 蒋亦民 2008 物理学报 **57** 7919]
- [14] Jiang Y M, Zheng H P 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 7360 (in Chinese) [蒋亦民, 郑鹤鹏 2008 物理学报 **57** 7360]
- [15] Janssen H A 1895 *Z. Ver. Deutch. Ing.* **39** 1045
- [16] Sperl M 2006 *Granul. Matter* **8** 59
- [17] Kwade A, Schulze D, Schwedes J 1994 *Beton Stahlbetonbau* **89** 58
- [18] Kwade A, Schulze D, Schwedes J 1994 *Powder Handling Process.* **6** 199
- [19] Wittmer J, Claudin P, Cates M, Bouchaud J 1996 *Nature* **382** 336
- [20] Wittmer J, Claudin P, Cates M 1997 *J. Phys. I (France)* **7** 39
- [21] National Standard of P. R. China GBJ 77-85 1988 *Reinforced Concrete Silo Design Specification* (Beijing: China Planning Press) (in Chinese) [中华人民共和国国家标准 GBJ 77-85 1988 钢筋混凝土筒仓设计规范 (北京: 中国计划出版社)]

Measurements of granular pressure in silo: Janssen behaviour and deviation*

Li Zhi-Feng Peng Zheng[†] Jiang Yi-Min

(School of Physics and Electronics, Central South University, Changsha 410083, China)

(Received 28 December 2013; revised manuscript received 14 January 2014)

Abstract

Variations of pressure along the vertical direction in a cylindrical silo are measured, of which the side wall is comprised of two separated up and down parts. The deviation of the measured results from the so-called Janssen model of silo stress is discussed. The measurements show that certain deviations from the model are always observed, no matter whether the slowly downward motion of silo bottom by “fully mobilized friction” as suggested by Vanel et al is carried on. Moreover without mobilizing the friction, the deviation may increase considerably if a tiny sink of the upper side-wall caused by weight of filled grains is present. The effect can be however eliminated by the friction mobilized. These indicate that distributions of grain weight at the bottom and lateral wall are complex and variant, and dependent on preparation manner and deformation of experiment setup. So stress boundary conditions need to be taken into account in the nonlinear elastic theory for analyzing static stress distribution of granular matter.

Keywords: granular matter, silo, Janssen model, stress

PACS: 45.70.-n, 81.05.Rm, 47.80.Fg, 83.80.Fg

DOI: [10.7498/aps.63.104503](https://doi.org/10.7498/aps.63.104503)

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10904175, 11274390).

[†] Corresponding author. E-mail: zpeng@csu.edu.cn