

一类尘埃等离子体孤波解*

欧阳成^{1)†} 姚静菀²⁾ 石兰芳³⁾ 莫嘉琪^{2)‡}

1)(湖州师范学院, 湖州 313000)

2)(安徽师范大学数学系, 芜湖 241003)

3)(南京信息工程大学数学与统计学院, 南京 210044)

(2014年1月10日收到; 2014年2月14日收到修改稿)

研究了一类非线性尘埃等离子体孤波解. 首先对无扰动情形下的孤波解作了阐述, 接着用同伦映射方法, 构造了一个迭代, 并求出到了非线性尘埃等离子体扰动单孤波的行波解. 最后得到了对应模型的单孤波的各次近似解.

关键词: 等离子体, 同伦映射, 行波

PACS: 02.30.Jr

DOI: 10.7498/aps.63.110203

1 引言

近年来, 国内外学术界对于尘埃等离子体中的低频振动十分关注^[1,2]. 许多学者研究了尘埃孤波的调制稳定性问题^[3] 尘埃等离子体中非线性波的研究^[4], 尘埃包络孤波^[5] 尘埃颗粒大小及尘埃荷电量对尘埃等离子体中非线性波的影响^[6], 弱二维尘埃等离子体中尘埃波动在受到扰动时的稳定性^[3] 等问题.

对于等离子体系统一维KdV方程描述的孤波的碰撞问题已经进行了大量的研究, 包括孤波的正碰与追碰^[7]. 在横向非线性波, 可由KP(Kadomtsev-Petviashvili)方程来描述. 最近一些学者对二维Bose Einstein凝聚系统^[8]、等离子体系统^[9]及非线性晶格系统传播的孤波碰撞问题^[10]也做了许多的工作. 我们将利用同伦映射方法得到等离子体系统非线性广义KP方程的孤波解. 关于非线性问题, 近来, 很多近似方法被改进, 包括平均法, 匹配法, 边界层法和多重尺度法等. 作者等利用同伦映射等方法也讨论了一类非线性方程尘埃、

等离子、孤波等问题^[11-21]. 本文是利用同伦映射方法^[22,23]讨论了一类尘埃等离子体中非线性扰动孤波的行波解.

2 尘埃等离子体方程

对于二维低频尘埃波动, 冷尘埃等离子体满足的无量纲的流体力学方程组为

$$\frac{\partial n_d}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(n_d u_x) + \frac{\partial}{\partial y}(n_d u_y) = 0,$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = Z_d \frac{\partial \phi}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} = Z_d \frac{\partial \phi}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = Z_d n_d + n_e, -n_{il} - n_{ih},$$

$$n_e = A_{e0} \exp(\beta_1 s \phi), \quad n_{il} = A_{il0} \exp(-s \phi),$$

$$n_{ih} = A_{ih0} \exp(-s \phi), \quad n_{ih} = A_{ih0} \exp(-\beta s \phi),$$

其中 u_x , u_y 分别是尘埃流体在 x 与 y 的速度分量, n_d , m_d 分别是尘埃颗粒的密度和质量, $Q_d = eZ_d$

* 国家自然科学基金(批准号: 41275062, 11202106), 浙江省自然科学基金(批准号: LY13A010005)和江苏省自然科学基金(批准号: 13KJB170016)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: oyc@hutc.zj.cn

‡ 通讯作者. E-mail: mojqiaqi@mail.ahnu.edu.cn

是尘埃颗粒上的荷电量, 而

$$A_{e0} = \frac{n_{i10}}{Z_{d0}n_{d0}}, \quad A_{ih0} = \frac{n_{ih0}}{Z_{d0}n_{d0}},$$

$$\beta_1 = \frac{T_{i1}}{T_{ES}}, \quad \beta_2 = \frac{T_{iH}}{T_E}, \quad \beta = \frac{\beta_1}{\beta_2},$$

$$s = \frac{Z_{d0}n_{d0}T_eT_{ih}}{n_{e0}T_{ih}T_{i1} + n_{i10}T_eT_{ih} + n_{ih0}T_eT_{i1}},$$

T_e, T_{i1}, T_{ih} 分别表示电子、低温离子与高温离子的温度.

假设电子和离子的流动速度小于它们的热运动速度, 我们将用传统的摄动方法并作一些变量变换, 可获得如下典型的 KP 方程 [8,24]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial t} - 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right] + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (1)$$

能够得到方程 (1) 有如下一个单孤波行波解 [24]

$$u = -\frac{k^2}{2} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{kx + ly - \omega t}{2} \right], \quad (2)$$

其中 k, l 为常数, $\omega = 4/c^2$, c 是线性尘埃波动的传播速度, 振幅为 $-k^2/2$. 选取 $k = 1, l = 4, z = kx + ly - \omega t$, 由 (2) 式表示的单孤波行波的曲线参见图 1 所示. 选取 $k = l = \omega = 1$ 由 (2) 式表示的单孤波行波的 $0-xy$ 曲面参见图 2 所示.

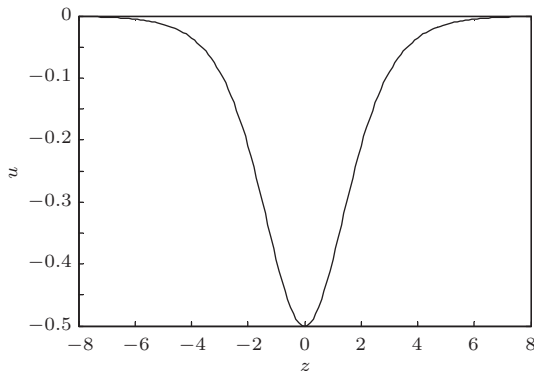


图 1 由 (2) 式表示的单孤波的曲线 ($k = l = \omega = 1$)

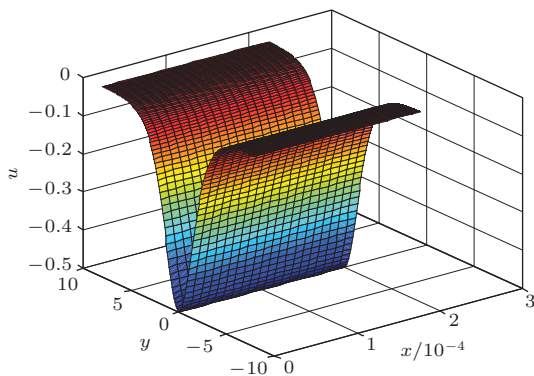


图 2 (网刊彩色) 由 (2) 式表示的单孤波的 $0-xy$ 曲面 ($k = l = \omega = 1$)

选取 $k = 1, l = 4, z = kx + ly - \omega t$ 时, 表示的单孤波行波的曲线参见图 3 所示. 选取 $k = 2, l = 4, \omega = 1$ 时, 表示的单孤波行波的 $0-xy$ 曲面参见图 4 所示. 也可以看出, 图 3 和图 4 的单孤波波形振幅 (2.0) 大于图 1 和图 2 的单孤波波形振幅 (0.5).

由尘埃单孤波行波的表示式和图 1 至图 4 的波形状况, 可以对尘埃的相关性态做出估计并进行预报, 并采取措施使由此造成的危害尽可能地达到很小.

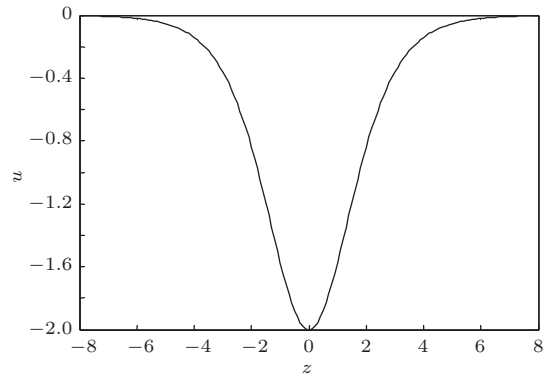


图 3 由 (2) 式表示的单孤波的曲线 ($k = 2, l = 4, \omega = 1$)

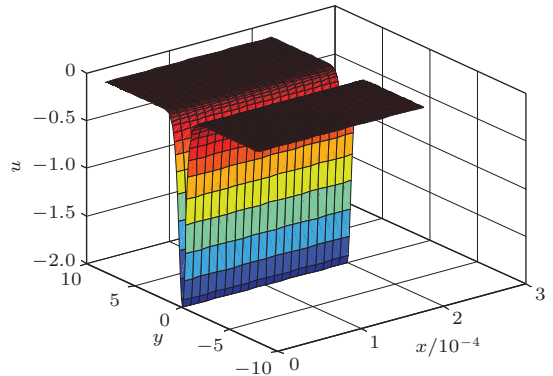


图 4 (网刊彩色) 由 (2) 式表示的单孤波的 $0-xy$ 曲面 ($k = 2, l = 4, \omega = 1$)

3 二维低频尘埃波动扰动方程的解

今考虑具有横向的非线性波高阶的扰动的有限小振幅的非线性波. 并针对由两种离子温度的尘埃等离子体, 在以任意夹角传播的孤离子立子的相互作用问题.

研究尘埃等离子体中的二维非线性波问题. 为能简要起见, 我们不考虑外磁场, 并假设波沿 x 方向传播, 高阶扰动在 y 方向. 尘埃等离子体中尘埃颗粒的质量远大于电子与离子质量. 对于二维低频尘埃声波, 冷尘埃等离子, 我们考虑尘埃等离子体中的低频振动具有扰动的无量纲广义非线性 KP

方程:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial t} - 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right] + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(u), \quad (3)$$

其中 $f(u)$ 为二维低频尘埃波动与电子和离子的流动速度相关的无量纲扰动项, 它是在现场场合中来自其他因素引起的扰动, 例如现场场合存在某些特殊磁场对尘埃波动与电子和离子的流动速度的干扰影响等. 在本文中设 $f(u)$ 是充分光滑的有界函数.

我们利用同伦映射方法 [22,23] 来得到尘埃等离子体中的低频振动广义 KP 方程 (3) 的近似孤波解. 引入一个同伦映射

$$H[u, p] = L[u] - L[v] + p \left[L[v] - 6u \frac{\partial u}{\partial x} - f(u) \right], \quad (4)$$

其中 p 为人工参数 [22,23], v 为方程 (3) 的初始近似, 算子 $L[u]$ 为

$$L[u] = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right] + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

显然. 由同伦映射 (4) 知, $H(u, 1) = 0$ 就是尘埃等离子体低频振动具有扰动的广义非线性 KP 方程 (3), 因此方程 (3) 的解就是 $H(u, p) = 0$ 的解当 $p \rightarrow 1$ 的情形.

设

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} u_i p^i. \quad (5)$$

将 (5) 式代入同伦映射 (4), 合并 p^i 的同次幂项, 并令各次幂的系数为零. 由 p^0 的系数为零, 得

$$L[u_0] = L[v]. \quad (6)$$

选取初始近似 v 为方程 (1) 的精确解 (2), 即

$$v(x, y, t) = -\frac{k^2}{2} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{kx + ly - \omega t}{2} \right].$$

于是由 (6) 式, 得

$$u_0(x, y, t) = -\frac{k^2}{2} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{kx + ly - \omega t}{2} \right]. \quad (7)$$

将 (5), (7) 式代入同伦映射 (4), 合并 p^i 的同次幂项. 由 p^1 的系数为零, 得

$$L[u_1] = f(u_0). \quad (8)$$

作行波变换:

$$z = kx + ly - \omega t, \quad (9)$$

于是 (8) 式为

$$\frac{d^4 u_1}{dz^4} - \frac{3l^2 - \omega k}{k^4} \frac{d^2 u_1}{dz^2} = \frac{1}{k^4} f(u_0). \quad (10)$$

不难得到线性方程 (10) 在零初始值下的解为

$$u_1(z) = \int_0^z \int_0^{\xi_1} \int_0^{\xi_2} \left[\frac{1}{k^4} f(u_0(\xi_2)) \times \left(\exp \left(\frac{\sqrt{3l^2 - \omega k}}{k^2} (\xi_1 - \xi_2) \right) + \exp \left(-\frac{\sqrt{3l^2 - \omega k}}{k^2} (\xi_1 - \xi_2) \right) \right) \right] \times d\xi_2 d\xi_1 d\xi. \quad (11)$$

由 (5) 式, 可得广义非线性 KP 方程 (3) 孤波的一次近似解

$$U_1(z) = -\frac{k^2}{2} \operatorname{sech}^2(z) + \int_0^z \int_0^{\xi_1} \int_0^{\xi_2} \left[\frac{1}{k^4} f(u_0(\xi_2)) \times \left(\exp \left(\frac{\sqrt{3l^2 - \omega k}}{k^2} (\xi_1 - \xi_2) \right) + \exp \left(-\frac{\sqrt{3l^2 - \omega k}}{k^2} (\xi_1 - \xi_2) \right) \right) \right] \times d\xi_2 d\xi_1 d\xi, \quad (12)$$

其中 u_0 由 (7) 式表示.

将行波变换 (9) 式代入 (12) 式, 得广义非线性 KP 方程 (3) 孤波的一次行波近似解

$$U_1(t, x, y) = u_0(t, x, y) + \int_0^{kx+ly-\omega t} \int_0^{\xi_1} \int_0^{\xi_2} \left[\frac{1}{k^4} f(u_0(\xi_2)) \times \left(\exp \left(\frac{\sqrt{3l^2 - \omega k}}{k^2} (\xi_1 - \xi_2) \right) + \exp \left(-\frac{\sqrt{3l^2 - \omega k}}{k^2} (\xi_1 - \xi_2) \right) \right) \right] \times d\xi_2 d\xi_1 d\xi. \quad (13)$$

将 (5) 式代入同伦映射 (4), 合并 p^i 的同次幂项. 由 p^2 的系数为零, 得

$$L[u_2] = 6u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + 6u_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} + f_u(u_0)u_1. \quad (14)$$

在作行波变换 (9) 下, 方程 (14) 为

$$\frac{d^4 u_2}{dz^4} - \frac{3l^2 - \omega k}{k^4} \frac{d^2 u_2}{dz^2} = \frac{1}{k^4} \left(6ku_0 \frac{du_1}{dz} + 6ku_1 \frac{du_0}{dz} + f_u(u_0)u_1 \right). \quad (15)$$

线性方程 (15) 的解为

$$u_2(z) = \int_0^z \int_0^{\xi_1} \int_0^{\xi_2} \left[\frac{1}{k^4} \left(6ku_0 \frac{du_1}{dz} + 6ku_1 \frac{du_0}{dz} + f_u(u_0)u_1 \right) \right] \times d\xi_2 d\xi_1 d\xi$$

$$\begin{aligned} & \times \left(\exp \left(\frac{\sqrt{3l^2 - \omega k}}{k^2} (\xi_1 - \xi_2) \right) \right. \\ & \left. + \exp \left(- \frac{\sqrt{3l^2 - \omega k}}{k^2} (\xi_1 - \xi_2) \right) \right) \\ & \times d\xi_2 d\xi_1 d\xi. \end{aligned} \quad (16)$$

由(5), (11)和(16)式, 可得广义非线性KP方程(3)孤波的二次近似解

$$\begin{aligned} U_2(z) &= u_2(z) + \int_0^z \int_0^{\xi_1} \int_0^{\xi_2} \left[\frac{1}{k^4} \left(6ku_0(\xi_2) \frac{du_1(\xi_2)}{dz} \right. \right. \\ & \left. \left. + 6ku_1 \frac{du_0(\xi_2)}{dz} + f(u_0(\xi_2)) + f_u(u_0(\xi_2))u_1(\xi_2) \right) \right. \\ & \times \left(\exp \left(\frac{\sqrt{3l^2 - \omega k}}{k^2} (\xi_1 - \xi_2) \right) \right. \\ & \left. \left. + \exp \left(- \frac{\sqrt{3l^2 - \omega k}}{k^2} (\xi_1 - \xi_2) \right) \right) \right] \\ & \times d\xi_2 d\xi_1 d\xi, \end{aligned} \quad (17)$$

其中 u_0, u_1 分别由(7), (11)式表示

将行波变换(9)式代入(17)式, 得广义非线性KP方程(3)孤波的二次行波近似解

$$\begin{aligned} U_2(t, x, y) &= u_2(t, x, y) \\ & \times \int_0^{kx+ly-\omega t} \int_0^{\xi_1} \int_0^{\xi_2} \left[\frac{1}{k^4} \left(6ku_0(\xi_2) \frac{du_1(\xi_2)}{dz} \right. \right. \\ & \left. \left. + 6ku_1 \frac{du_0(\xi_2)}{dz} + f(u_0(\xi_2)) + f_u(u_0(\xi_2))u_1(\xi_2) \right) \right. \\ & \times \left(\exp \left(\frac{\sqrt{3l^2 - \omega k}}{k^2} (\xi_1 - \xi_2) \right) \right. \\ & \left. \left. + \exp \left(- \frac{\sqrt{3l^2 - \omega k}}{k^2} (\xi_1 - \xi_2) \right) \right) \right] \\ & \times d\xi_2 d\xi_1 d\xi. \end{aligned} \quad (18)$$

继续将(5),(7)式代入同伦映射(4)式, 合并 p^i 的同次幂项. 由 p^n ($n = 3, 4, \dots$) 的系数为零, 得

$$L[u_n] = F_n, \quad n = 3, 4, \dots, \quad (19)$$

其中

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{(n-1)!} \left[\frac{\partial^{n-1}}{\partial p^{n-1}} \left(6 \left(\sum_{i=0}^{\infty} u_i p^i \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{i=0}^{\infty} u_i p^i \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + f \left(\sum_{i=0}^{\infty} u_i p^i \right) \right) \right]_{p=0} \end{aligned}$$

为逐次已知的函数.

用同样的方法, 方程(19)孤波的行波解为

$$u_n(t, x, y)$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{kx+ly-\omega t} \int_0^{\xi_1} \int_0^{\xi_2} \left[\frac{1}{k^4} F_n(\xi_2) \right. \\ & \times \left(\exp \left(\frac{\sqrt{3l^2 - \omega k}}{k^2} (\xi_1 - \xi_2) \right) \right. \\ & \left. \left. + \exp \left(- \frac{\sqrt{3l^2 - \omega k}}{k^2} (\xi_1 - \xi_2) \right) \right) \right] \\ & \times d\xi_2 d\xi_1 d\xi, \\ & n = 3, 4, \dots. \end{aligned} \quad (20)$$

将(7), (13), (18),(20)式代入(5)式, 并令 $p \rightarrow 1$, 便得到

$$\begin{aligned} U(t, x, y) &= - \frac{k^2}{2} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{kx + ly - \omega t}{2} \right] \\ & + \int_0^{kx+ly-\omega t} \int_0^{\xi_1} \int_0^{\xi_2} \left[\frac{1}{k^4} \left(f(u_0(\xi_2)) \right. \right. \\ & \left. \left. + f_u(u_0(\xi_2))u_1(\xi_2) + \sum_{n=3}^{\infty} F_n(\xi_2)u_{n-1}(\xi_2) \right) \right. \\ & \times \left(\exp \left(\frac{\sqrt{3l^2 - \omega k}}{k^2} (\xi_1 - \xi_2) \right) \right. \\ & \left. \left. + \exp \left(- \frac{\sqrt{3l^2 - \omega k}}{k^2} (\xi_1 - \xi_2) \right) \right) \right] \\ & \times d\xi_2 d\xi_1 d\xi. \end{aligned} \quad (21)$$

能够证明由(21)式表示的 $U(t, x, y)$ 是收敛的, 并为二维低频尘埃波动扰动方程(3)的精确解^[22], 而 $U_m(t, x, y) = \sum_{i=1}^m u_i(kx + ly - \omega t)$, 即

$$\begin{aligned} U_m(t, x, y) &= - \frac{k^2}{2} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{kx + ly - \omega t}{2} \right] \\ & + \int_0^{kx+ly-\omega t} \int_0^{\xi_1} \int_0^{\xi_2} \left[\frac{1}{k^4} \left(f(u_0(\xi_2)) \right. \right. \\ & \left. \left. + f_u(u_0(\xi_2))u_1(\xi_2) + \sum_{i=3}^m F_i(\xi_2)u_{m-1}(\xi_2) \right) \right. \\ & \times \left(\exp \left(\frac{\sqrt{3l^2 - \omega k}}{k^2} (\xi_1 - \xi_2) \right) \right. \\ & \left. \left. + \exp \left(- \frac{\sqrt{3l^2 - \omega k}}{k^2} (\xi_1 - \xi_2) \right) \right) \right] d\xi_2 d\xi_1 d\xi. \end{aligned}$$

为二维低频尘埃波动扰动方程(3)孤波的第 m 次行波近似解

4 举 例

现在来考虑两个简单的例子.

例1 设尘埃等离子体中的低频振动非线性广义KP方程(3)的具有二维空间低频尘埃等离子体周期性线性扰动项为

$$f = A \cos(kx + ly - ct),$$

其中 k, l 为常数, c 是二维空间尘埃等离子体波动的传播速度. 这时由方程(3), 尘埃等离子体中具有线性扰动项的非线性广义KP方程为

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial t} - 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right] + 3 \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = A \cos(kx + ly - ct). \quad (22)$$

用同伦映射关系式(4). 由方程(7), 取方程(22)初始近似 u_0 为孤波

$$u_0(z) = U_0(z) = -\frac{k^2}{2} \operatorname{sech}^2(z). \quad (23)$$

即

$$u_0(t, x, y) = U_0(t, x, y) = -\frac{k^2}{2} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{kx + ly - \omega t}{2} \right]. \quad (24)$$

由(11), (13),(18)式, 可分别得到

$$u_1(z) = \frac{A}{k^4} \int_0^z \int_0^{\xi_1} \int_0^{\xi_2} \left[\cos(\xi_2) \times \left(\exp \left(\frac{\sqrt{3l^2 - ck}}{k^2} (\xi_1 - \xi_2) \right) + \exp \left(-\frac{\sqrt{3l^2 - ck}}{k^2} (\xi_1 - \xi_2) \right) \right) \right] \times d\xi_2 d\xi_1 d\xi, \quad (25)$$

$$u_1(t, x, y) = \frac{A}{k^4} \int_0^{kx+ly-ct} \int_0^{\xi_1} \int_0^{\xi_2} \left[\cos(\xi_2) \times \left(\exp \left(\frac{\sqrt{3l^2 - ck}}{k^2} (\xi_1 - \xi_2) \right) + \exp \left(-\frac{\sqrt{3l^2 - ck}}{k^2} (\xi_1 - \xi_2) \right) \right) \right] \times d\xi_2 d\xi_1 d\xi, \quad (26)$$

$$u_2(t, x, y) = \int_0^{kx+ly-\omega t} \int_0^{\xi_1} \int_0^{\xi_2} \left[\frac{1}{k^4} \left(6ku_0(\xi_2) \times \frac{du_1(\xi_2)}{dz} + 6ku_1(\xi_2) \frac{du_0(\xi_2)}{dz} \right) \times \left(\exp \left(\frac{\sqrt{3l^2 - ck}}{k^2} (\xi_1 - \xi_2) \right) \right) \right]$$

$$+ \exp \left(-\frac{\sqrt{3l^2 - ck}}{k^2} (\xi_1 - \xi_2) \right) \times d\xi_2 d\xi_1 d\xi. \quad (27)$$

因此, 由(23), (25)—(27)式, 可得到了尘埃等离子体中的低频振动非线性广义KP方程(22)的一次, 二次近似

$$U_1(t, x, y) = -\frac{k^2}{2} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{kx + ly - ct}{2} \right] + \frac{A}{k^4} \int_0^{kx+ly-ct} \int_0^{\xi_1} \cos(\xi_2) \times \left(\exp \left(\frac{\sqrt{3l^2 - ck}}{k^2} (\xi_1 - \xi_2) \right) + \exp \left(-\frac{\sqrt{3l^2 - ck}}{k^2} (\xi_1 - \xi_2) \right) \right) \times d\xi_2 d\xi_1 d\xi, \quad (28)$$

$$U_2(t, x, y) = -\frac{k^2}{2} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{kx + ly - ct}{2} \right] + \frac{A}{k^4} \int_0^{kx+ly-ct} \int_0^{\xi_1} \int_0^{\xi_2} \left[\cos(\xi_2) + \left(6ku_0(\xi_2) \frac{du_1(\xi_2)}{dz} + 6ku_1(\xi_2) \frac{du_0(\xi_2)}{dz} \right) \times \left(\exp \left(\frac{\sqrt{3l^2 - ck}}{k^2} (\xi_1 - \xi_2) \right) + \exp \left(-\frac{\sqrt{3l^2 - ck}}{k^2} (\xi_1 - \xi_2) \right) \right) \right] \times d\xi_2 d\xi_1 d\xi, \quad (29)$$

其中 u_0, u_1 分别由(23),(25)式表示.

例2 设尘埃等离子体中的低频振动非线性广义KP方程(3)的扰动项为 $f = \varepsilon \exp u$ ($0 < \varepsilon \ll 1$). 这时由方程(3), 尘埃等离子体中具有扰动的非线性广义KP方程为

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial t} - 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right] + 3 \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = \varepsilon \exp u. \quad (30)$$

用同伦映射关系式(4). 由方程(7), 取方程(30)初始近似 u_0 为孤波

$$u_0(z) = U_0(z) = -\frac{k^2}{2} \operatorname{sech}^2(z). \quad (31)$$

即

$$u_0(t, x, y) = U_0(t, x, y) = -\frac{k^2}{2} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{kx + ly - \omega t}{2} \right]. \quad (32)$$

由 (11), (13),(18) 式, 可分别得到

$$\begin{aligned}
 & u_1(z) \\
 &= \int_0^z \int_0^{\xi_1} \int_0^{\xi_2} \left[\frac{\varepsilon}{k^4} \exp u_0(\xi_2) \right. \\
 &\quad \times \left(\exp \left(\frac{\sqrt{3l^2 - \omega k}}{k^2} (\xi_1 - \xi_2) \right) \right. \\
 &\quad \left. \left. + \exp \left(- \frac{\sqrt{3l^2 - \omega k}}{k^2} (\xi_1 - \xi_2) \right) \right) \right] \\
 &\quad \times d\xi_2 d\xi_1 d\xi, \tag{33}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & u_1(t, x, y) \\
 &= \int_0^{kx+ly-\omega t} \int_0^{\xi_1} \int_0^{\xi_2} \left[\frac{\varepsilon}{k^4} \exp u_0(\xi_2) \right. \\
 &\quad \times \left(\exp \left(\frac{\sqrt{3l^2 - \omega k}}{k^2} (\xi_1 - \xi_2) \right) \right. \\
 &\quad \left. \left. + \exp \left(- \frac{\sqrt{3l^2 - \omega k}}{k^2} (\xi_1 - \xi_2) \right) \right) \right] \\
 &\quad \times d\xi_2 d\xi_1 d\xi, \tag{34}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & u_2(t, x, y) \\
 &= \int_0^{kx+ly-\omega t} \int_0^{\xi_1} \int_0^{\xi_2} \left[\frac{1}{k^4} (6ku_0(\xi_2) \right. \\
 &\quad \times \frac{du_1(\xi_2)}{dz} + 6ku_1 \frac{du_0(\xi_2)}{dz} \\
 &\quad + \varepsilon(\exp u_0(\xi_2))u_1(\xi_2)) \\
 &\quad \times \left(\exp \left(\frac{\sqrt{3l^2 - \omega k}}{k^2} (\xi_1 - \xi_2) \right) \right. \\
 &\quad \left. \left. + \exp \left(- \frac{\sqrt{3l^2 - \omega k}}{k^2} (\xi_1 - \xi_2) \right) \right) \right] \\
 &\quad \times d\xi_2 d\xi_1 d\xi. \tag{35}
 \end{aligned}$$

因此, 由 (31)—(35) 式, 可得到了尘埃等离子体中的低频振动非线性广义 KP 方程 (30) 的一次, 二次近似

$$\begin{aligned}
 & U_1(t, x, y) \\
 &= - \frac{k^2}{2} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{kx + ly - \omega t}{2} \right] \\
 &\quad + \frac{1}{k^4} \int_0^{kx+ly-\omega t} \int_0^{\xi_1} \int_0^{\xi_2} \left[\varepsilon(\exp u_0(\xi_2)) \right. \\
 &\quad \times \left(\exp \left(\frac{\sqrt{3l^2 - \omega k}}{k^2} (\xi_1 - \xi_2) \right) \right. \\
 &\quad \left. \left. + \exp \left(- \frac{\sqrt{3l^2 - \omega k}}{k^2} (\xi_1 - \xi_2) \right) \right) \right] \\
 &\quad \times d\xi_2 d\xi_1 d\xi, \tag{36} \\
 & U_2(t, x, y)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= - \frac{k^2}{2} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{kx + ly - \omega t}{2} \right] \\
 &\quad + \frac{1}{k^4} \int_0^{kx+ly-\omega t} \int_0^{\xi_1} \int_0^{\xi_2} \left[\varepsilon(\exp u_0(\xi_2)) \right. \\
 &\quad + \varepsilon(\exp u_0(\xi_2))u_1(\xi_2)) \\
 &\quad + \left(6ku_0(\xi_2) \frac{du_1(\xi_2)}{dz} + 6ku_1(\xi_2) \frac{du_0(\xi_2)}{dz} \right) \\
 &\quad \times \left(\exp \left(\frac{\sqrt{3l^2 - \omega k}}{k^2} (\xi_1 - \xi_2) \right) \right. \\
 &\quad \left. \left. + \exp \left(- \frac{\sqrt{3l^2 - \omega k}}{k^2} (\xi_1 - \xi_2) \right) \right) \right] \\
 &\quad \times d\xi_2 d\xi_1 d\xi, \tag{37}
 \end{aligned}$$

其中 u_0, u_1 分别由 (31),(33) 式表示.

在 (32), (36), (37) 式中, 选取 $k = l = \omega = 1, \varepsilon = 0.01, z = kx + ly - \omega t$, 可以得到尘埃等离子体中的低频振动非线性广义 KP 方程 (30) 的孤波的零次, 一次, 二次近似解 $U_i (i = 0, 1, 2)$ 的曲线图形 (参见图 5 所示).

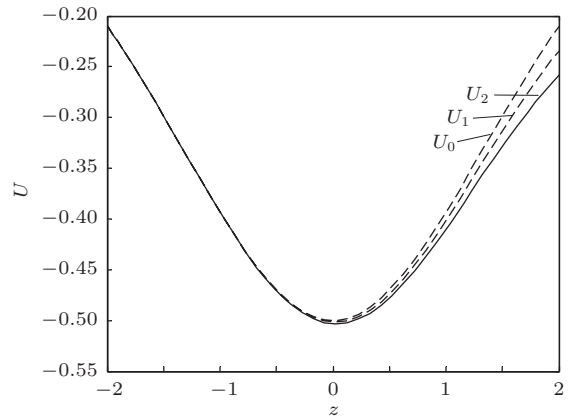


图 5 方程 (23) 的孤波的近似曲线 ($k = l = \omega = 1, \varepsilon = 0.01$)

继续利用同伦映射 (4), 可得到尘埃等离子体中的低频振动非线性广义 KP 方程 (30) 的更高次近似 $U_m(t, x, y)$, 而极限函数

$$U(t, x, y) = \lim_{m \rightarrow \infty} U_m(t, x, y)$$

就是尘埃等离子体中的低频振动具有扰动的非线性广义 KP 方程 (30) 孤波的精解.

我们还可用不动点定理 [25] 证明尘埃等离子体中具有扰动的非线性广义 KP 方程 (30) 孤波的精解 U_{exa} 与各次近似解析解 U_m 的如下精度表示式:

$$U_{\text{exa}} = U_m + O(\varepsilon^m), \quad 0 < \varepsilon \ll 1$$

由上式可以看出, 利用同伦映射方法求 BKK 扰动模型孤波的近似解具有良好的精度.

5 结 论

用同伦映射方法, 选取选择合理的初始近似, 能较快速度地得到高精度的近似解.

由本文得到的具有扰动的广义 KP 方程 (3) 是尘埃等离子体中的低频振动单孤波近似解, 可求得相应的物理性态. 例如, 通过求出的各孤波的波峰值, 并采取相应措施避免各孤波由于共振现象而出现的超高密度电荷的聚集, 而导致的放电击穿现象等等. 关于这方面的情形, 本文不再进一步讨论.

参考文献

- [1] Rao N N, Shukla P K, Yu M Y 1990 *Planet. Space Sci.* **38** 543
- [2] Shukla P K, Silin V P 1992 *Phys. Script.* **45** 508
- [3] Chen J H, Duan W S 2007 *Phys. Plasmas* **14** 083702
- [4] Duan W S, Shi Y R 2003 *Chaos, Solitons Fract.* **18** 321
- [5] Duan W S, Parkes J L, Li M M 2005 *Phys. Plasmas* **12** 022106
- [6] Meuris P 1997 *Planet Space Sci.* **45** 449
- [7] Han J N, Yang X X, Tiao T X, Duan W S 2008 *Phys. Lett. A* **372** 4817
- [8] Li S C, Han J N, Duan W S 2009 *Physica B* **404** 1235
- [9] Han J N, Du S L, Duan W S 2008 *Phys. Plasmas* **15** 112104
- [10] Yang X X, Duan W S, Han J N, Li S C 2008 *Chin Phys. B* **17** 2985
- [11] Han X L, Zhao Z Jm Cheng R J, Mo J Q 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 040203 (in Chinese) [韩祥临, 赵振江, 程荣军, 莫嘉琪 2013 物理学报 **62** 040203]
- [12] Han X L, Du Z J Mo J Q 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 200208 (in Chinese) [韩祥临, 杜增吉, 莫嘉琪 2012 物理学报, **61** 200208]
- [13] Ouyang C, Cheng L H, Mo J Q 2012 *Chin. Phys. B* **215** 050203
- [14] Ouyang C, Lin W T, Cheng R J, Mo J Q 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 060201 (in Chinese) [欧阳成, 林万涛, 程荣军, 莫嘉琪 2013 物理学报 **62** 060201]
- [15] Yao J S, Lin W T, Du Z J, Mo J Q 2012 *Chinese Physics B* **21** 120205
- [16] Shi L F, Mo J Q 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 040203
- [17] Shi L F, Lin W T, Lin Y H, Mo J Q 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 010201 (in Chinese) [石兰芳, 林万涛, 林一骅, 莫嘉琪 2013 物理学报 **62** 010201]
- [18] Shi L F, Zhou X C, Mo J Q 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 230202 (in Chinese) [石兰芳, 周先春, 莫嘉琪 2013 物理学报 **62** 230202]
- [19] Mo J Q 2010 *Chin. Phys. B* **19** 010203
- [20] Mo J Q, Lin Y H, Lin W T 2010 *Chin. Phys. B* **19** 030202
- [21] Mo J Q, Lin W T, Lin Y H 2011 *Chin. Phys. B* **20** 070205
- [22] Liao S J 2004 *Beyond Perturbation: Introduction to the Homotopy Analysis Method* (New York: CRC Press Co.)
- [23] He J H 2002 *Approximate Analytical Methods in Engineering and Sciences* (Zhengzhou: Henan Science and Technology Press) (in Chinese) [何吉欢 2002 工程和科学计算中的近似非线性分析方法 (郑州河南科学技术出版社)]
- [24] Zhong S R 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2178 (in Chinese) [仲生仁 2010 物理学报 **59** 2178]
- [25] de Jager, E M, Jiang Furu 1996 *The Theory of Singular Perturbation* (Amsterdam: North-Holland Publishing Co.)

Solitary wave solution for a class of dusty plasma*

Ouyang Cheng^{1)†} Yao Jing-Sun²⁾ Shi Lan-Fang³⁾ Mo Jia-Qi^{2)‡}

1) (*Huzhou Teachers College, Huzhou 313000, China*)

2) (*Department of Mathematics, Anhui Normal University, Wuhu, 241003, China*)

3) (*College of Mathematics and Statistics, Nanjing University of Information Science & Technology, Nanjing 210044, China*)

(Received 10 January 2014; revised manuscript received 14 February 2014)

Abstract

A class of nonlinear solitary waves in dusty plasma is considered. Firstly, a non-disturbed solitary wave solution is stated. Then the iteration is constructed by using the homotopic mapping, and the traveling wave solution of the nonlinear single-disturbed solitary waves in dusty plasma is obtained. Finally, every degree of approximate solutions for corresponding single solitary wave model can be found.

Keywords: dusty plasma, homotopic mapping, traveling wave

PACS: 02.30.Jr

DOI: [10.7498/aps.63.110203](https://doi.org/10.7498/aps.63.110203)

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 41275062, 11202106), the Natural Science Foundation of Zhejiang Province, China (Grant No. LY13A010005), and the Natural Sciences Foundation from the Universities of Jiangsu Province, China (Grant No. 13KJB170016).

† Corresponding author. E-mail: oyc@hutc.zj.cn

‡ Corresponding author. E-mail: mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn