物理学报 Acta Phys. Sin. Vol. 63, No. 11 (2014) 110301

介观 RLC 电路的密度矩阵的量子耗散*

范洪义 何锐†

(中国科学技术大学材料科学与工程系, 合肥 230026)

(2014 年 1 月 10 日收到; 2014 年 1 月 25 日收到修改稿)

本文首次采用求解密度矩阵的振幅衰减主方程来研究介观 RLC 电路的量子耗散. 我们考虑到电路实际上处在热环境中, 就尝试用 (经约化了热库自由度以后) 密度矩阵的振幅耗散主方程来研究介观 RLC 电路的量子衰减, 即将电路看作是一个哈密顿稳态系统 (不显含时), 而该系统对应的密度矩阵是处在振幅耗散通道中 (耗散系数由回路的品质因数决定) 随着时间演化, 我们求出该回路密度矩阵的量子耗散及回路能量的衰减规律. 我们采用纠缠态表象和有序算符内的积分 (求和) 技术探讨此问题, 可以给出终态密度矩阵的解析形式, 具有简捷的特点.

关键词: 介观 RLC 电路, 耗散通道, 主方程, 纠缠态表象

PACS: 03.65.–Ca, 03.65.Yz **DOI:** 10.7498/aps.63.110301

1 引 言

介观电路的量子化是研究量子计算机和超导量子电路的一个重要课题[1−7]. 路易瑟尔[1]首先将介观 L-C(电感 L 和电容 C) 电路量子化为谐振子. 即把电荷量子化为坐标算符 q, 电流 I 乘上电感 L 量子化为动量算符 $p = L\,(\mathrm{d}q/\mathrm{d}t)$, ($[q,p] = \mathrm{i}\hbar$). 随后, 不少文章讨论了较复杂回路的量子化[3−7]. 路易瑟尔的研究了绝对零度下的量子涨落, 没有考虑有限温度. 但是电路运行处在热环境中, 尤其是在电路中存在电阻时会产生焦耳热, 所以我们在文献[2]中曾讨论了有限温度下的单个 L-C 电路的量子涨落. 对于存在电阻 R 时介观 RLC 电路的量子化, 也引起了许多作者的关注[8−12], 以往的处理都是把 RLC 电路看作为阻尼振子, 其量子化是采用海森堡方程讨论含时振子的产生算符和湮没算符的演化. 本文将采取一个全新的观点和方法, 我们考虑到电路实际上处在热环境中, 就尝试用 (经约化了热库自由度以后) 密度矩阵的振幅耗散主方程来研究介观 RLC 电路的量子衰减, 即将电路看作是一个哈密顿稳态系统 (不显含时), 而该系统对应的密度矩阵是处在振幅耗散通道中 (耗散系数由回路的品质因数) 随着时间演化, 这样做的优点是避免量子化含时系统所产生的困难, 物理图像较清晰, 计算结果能很好地反映回路因电阻存在随时间的能量损失. 采用纠缠态表象[13−15]和有序算符内的积分技术[16,17]我们首次求出该回路密度矩阵量子耗散的解析形式.

2 量子化介观 RLC 电路的密度算符

当将电阻 R 连接到 LC 回路中, 则经典的 RLC 电路的运动方程为

$$L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2}+R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+\frac{q}{C}=0,$$

电阻的能量损耗为 $R\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}q$, 量子化后变为 $\dfrac{1}{2}R\Big(q\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}q\Big)$(这里考虑到 q 与 $\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ 的非对易性), 由 $p = L\,(\mathrm{d}q/\mathrm{d}t)$, 则相应的 RLC 回路的量子哈密顿量为

$$H=\frac{1}{2L}p^2+\frac{1}{2C}q^2+\frac{R}{2L}\left(pq+qp\right). \tag{1}$$

用

$$a=\sqrt{2L\hbar\omega}\left(L\omega q+ip\right),$$

∗ 国家自然科学基金 (批准号: 11175113) 和中央高校基本科研业务费专项资金 (批准号: WK2060140013) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: heruim@mail.ustc.edu.cn

$$a^\dagger = \sqrt{2L\hbar\omega}\,(L\omega q - ip)\,, \tag{2}$$

这里$\omega = 1/\sqrt{LC}$是没有电阻存在时的LC回路的共振频率. 由(2)式, 我们有

$$q = \frac{a+a^\dagger}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\hbar}{\omega L}},\ p = \frac{a-a^\dagger}{\sqrt{2}i}\sqrt{\omega\hbar L}. \tag{3}$$

所以(1)式改写为(略去零点能)

$$H = \omega a^\dagger a + \chi^* a^{\dagger 2} + \chi a^2, \tag{4}$$

这里χ由电阻与电感的比决定

$$\chi = -\mathrm{i}\frac{R}{2L}, \tag{5}$$

其相应的归一化密度算符为

$$\begin{aligned}\rho_0 =& \mathrm{e}^{-\beta H}/\mathrm{Tr}\,\mathrm{e}^{-\beta H}\\ =& \exp[-\beta(\omega a^\dagger a + \chi^* a^{\dagger 2} + \chi a^2)]/\mathrm{Tr}\,\mathrm{e}^{-\beta H},\end{aligned} \tag{6}$$

这里$\beta = 1/kT$, k是玻尔兹曼常数. 利用算符恒等式[18]

$$\begin{aligned}&\exp[f a^\dagger a + g a^{\dagger 2} + k a^2]\\ =&\,\mathrm{e}^{-f/2}\exp\left(\frac{g a^{\dagger 2}}{\Delta\coth\Delta - f}\right)\\ &\times\exp\left[(a^\dagger a + \frac{1}{2})\ln\frac{\Delta h\Delta}{\Delta - f\tanh\Delta}\right]\\ &\times\exp\left(\frac{k a^2}{\Delta\coth\Delta - f}\right),\\ &\Delta^2 = f^2 - 4kg,\end{aligned} \tag{7}$$

(它也可以不用李代数知识而直接由简单的算符代数推导出来[19]), 我们可以将方程(6)右边的指数算符分解为

$$\begin{aligned}&(\mathrm{Tr}\,\mathrm{e}^{-\beta H})\rho_0\\ =&\sqrt{\lambda\,\mathrm{e}^{\beta\omega}}\exp(E^* a^{\dagger 2})\exp(a^\dagger a\ln\lambda)\exp(E a^2),\end{aligned} \tag{8}$$

这里

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{D}{\omega\sinh(\beta D) + D\cosh(\beta D)},\\ E &= \frac{-\lambda}{D}\chi\sinh(\beta D),\\ D^2 &= \omega^2 - 4|\chi|^2.\end{aligned} \tag{9}$$

用$\exp(a^\dagger a\ln\lambda) = :\exp[(\lambda-1)a^\dagger a]:$, 这里$: :$代表正规乘积, 我们计算它的配分函数

$$\begin{aligned}Z(\beta) =& \mathrm{Tr}\,\mathrm{e}^{-\beta H}\\ =&\sqrt{\lambda\,\mathrm{e}^{\beta\omega}}\mathrm{Tr}[\exp(E^* a^{\dagger 2}) :\exp[(\lambda-1)a^\dagger a]:\\ &\exp(E a^2)].\end{aligned} \tag{10}$$

利用相干态$|z\rangle = \exp[-|z|^2/2 + z a^\dagger]|0\rangle$的完备性关系[19]

$$\begin{aligned}&\int\frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi}|z\rangle\langle z|\\ =&\int\frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi} :\mathrm{e}^{-|z|^2 + z a^\dagger + z^* a - a^\dagger a}: = 1\end{aligned} \tag{11}$$

和积分公式

$$\begin{aligned}&\int\frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi}\exp(\zeta|z|^2 + \xi z + \eta z^* + f z^2 + g z^{*2})\\ =&\frac{1}{\sqrt{\zeta^2 - 4fg}}\exp\left(\frac{-\zeta\xi\eta + \xi^2 g + \eta^2 f}{\zeta^2 - 4fg}\right).\end{aligned} \tag{12}$$

我们得

$$\begin{aligned}Z(\beta) =&\sqrt{\lambda\,\mathrm{e}^{\beta\omega}}\mathrm{Tr}\Big[\exp(E^* a^{\dagger 2}) :\exp[(\lambda-1)a^\dagger a]:\\ &\times\exp(E a^2)\int\frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi}|z\rangle\langle z|\Big]\\ =&\sqrt{\lambda\,\mathrm{e}^{\beta\omega}}\int\frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi}\langle z|\exp(E^* a^{\dagger 2})\\ &\times :\exp[(\lambda-1)a^\dagger a]: \exp(E a^2)|z\rangle\\ =&\sqrt{\lambda\,\mathrm{e}^{\beta\omega}}\int\frac{\mathrm{d}^2 z}{\pi}\exp[E^* z^{*2} + E z^2\\ &+ (\lambda-1)|z|^2]\\ =&\frac{\sqrt{\lambda\,\mathrm{e}^{\beta\omega}}}{\sqrt{(1-\lambda)^2 - 4|E|^2}}\\ =&\frac{\mathrm{e}^{\beta\omega/2}}{2\sinh(\beta D/2)},\end{aligned} \tag{13}$$

这里

$$\sqrt{(1-\lambda)^2 - 4|E|^2} = 2\sqrt{\lambda}\sinh(\beta D/2) \equiv A. \tag{14}$$

此等式的证明见附录A. 因此

$$\begin{aligned}\rho_0 =&\sqrt{\lambda\,\mathrm{e}^{\beta\omega}}\exp(E^* a^{\dagger 2})\exp(a^\dagger a\ln\lambda)\\ &\times\exp(E a^2)\Big/\left[\frac{\mathrm{e}^{\beta\omega/2}}{2\sinh(\beta D/2)}\right]\\ =&A\exp(E^* a^{\dagger 2})\exp(a^\dagger a\ln\lambda)\exp(E a^2),\end{aligned} \tag{15}$$

这里$\mathrm{Tr}\rho_0 = 1$.

3 表征密度算符在耗散通道演化的主方程解

描述振幅衰减的密度算符的主方程是[20]

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = \kappa(2a\rho a^\dagger - a^\dagger a\rho - \rho a^\dagger a), \tag{16}$$

κ是通道衰减率, 针对RLC回路而言, 对照(1)式, 取为$\kappa = R/(2L)$. 为了直接解方程, 我们引入双模纠缠态[13–15]

$$|\eta\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\eta|^2 + \eta a^\dagger - \eta^*\tilde{a}^\dagger + a^\dagger\tilde{a}^\dagger\right)|0\tilde{0}\rangle, \tag{17}$$

这里 $\tilde{a}^\dagger$ 是独立于实模 $a^\dagger$ 的虚模产生算符, $|\tilde{0}\rangle$ 被 $\tilde{a}$ 湮没, $[\tilde{a},\tilde{a}^\dagger]=1$, $[a,\tilde{a}^\dagger]=0$. $|\eta\rangle$ 满足本征方程

$$\begin{aligned}&(a-\tilde{a}^\dagger)|\eta\rangle=\eta|\eta\rangle,\ (a^\dagger-\tilde{a})|\eta\rangle=\eta^*|\eta\rangle,\\&\langle\eta|(a^\dagger-\tilde{a})=\eta^*\langle\eta|,\ \langle\eta|(a-\tilde{a}^\dagger)=\eta\langle\eta|.\end{aligned}\tag{18}$$

将 (16) 式的两边作用在态 $|I\rangle\equiv|\eta=0\rangle$ 上并标记 $|\rho\rangle\equiv\rho|I\rangle$, 我们得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\rho\rangle=\kappa(2a\rho a^\dagger-a^\dagger a\rho-\rho a^\dagger a)|I\rangle.\tag{19}$$

注意到

$$a|I\rangle=\tilde{a}^\dagger|I\rangle, a^\dagger|I\rangle=\tilde{a}|I\rangle, a^\dagger a|I\rangle=\tilde{a}^\dagger\tilde{a}|I\rangle,\tag{20}$$

方程 (19) 变换为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\rho\rangle=\kappa(2a\tilde{a}-a^\dagger a-\tilde{a}^\dagger\tilde{a})|\rho\rangle,\tag{21}$$

其形式解是

$$|\rho\rangle=\exp\{\kappa t(2a\tilde{a}-a^\dagger a-\tilde{a}^\dagger\tilde{a})\}|\rho_0\rangle.\tag{22}$$

在 (21) 式中 $|\rho_0\rangle\equiv\rho_0|I\rangle$, ρ_0 是初始密度算符. 将 (22) 式投影到热纠缠态表象 $\langle\eta|$, 并利用对应关系式

$$\begin{aligned}\langle\eta|\tilde{a}&=-\left(\frac{\partial}{\partial\eta}+\frac{\eta^*}{2}\right)\langle\eta|,\\\langle\eta|a&=\left(\frac{\partial}{\partial\eta^*}+\frac{\eta}{2}\right)\langle\eta|,\\\langle\eta|\tilde{a}^\dagger&=\left(\frac{\partial}{\partial\eta^*}-\frac{\eta}{2}\right)\langle\eta|,\\\langle\eta|a^\dagger&=-\left(\frac{\partial}{\partial\eta}-\frac{\eta^*}{2}\right)\langle\eta|,\end{aligned}\tag{23}$$

和本征方程 (18) 得

$$\begin{aligned}\langle\eta|\rho\rangle=&\exp\left[-\kappa t\eta^*\left(\frac{\partial}{\partial\eta^*}+\frac{\eta}{2}\right)\right.\\&\left.-\kappa t\eta\left(\frac{\partial}{\partial\eta}+\frac{\eta^*}{2}\right)\right]\langle\eta|\rho_0\rangle\\=&\exp\left[-\kappa t\left(\eta\eta^*+\eta^*\frac{\partial}{\partial\eta^*}+\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\right]\\&\times\langle\eta|\rho_0\rangle.\end{aligned}\tag{24}$$

注意到 $\eta=r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, $r=|\eta|$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\eta}&=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\mathrm{i}}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right),\\\frac{\partial}{\partial\eta^*}&=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\mathrm{i}}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\end{aligned}\tag{25}$$

和

$$\eta^*\frac{\partial}{\partial\eta^*}+\eta\frac{\partial}{\partial\eta}=r\frac{\partial}{\partial r},\quad\left[r\frac{\partial}{\partial r},r^2\right]=2r^2,\tag{26}$$

以及算符恒等式

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\lambda(A+\sigma B)}&=\mathrm{e}^{\lambda A}\exp[\sigma B(1-\mathrm{e}^{-\lambda\tau})/\tau]\\&=\exp[\sigma B(\mathrm{e}^{\lambda\tau}-1)/\tau]\,\mathrm{e}^{\lambda A}.\end{aligned}\tag{27}$$

注意上式成立的条件是 $[A,B]=\tau B$. 可将 (24) 式改写为

$$\begin{aligned}\langle\eta|\rho\rangle&=\exp\left[-\kappa t\left(r^2+r\frac{\partial}{\partial r}\right)\right]\langle\eta|\rho_0\rangle\\&=\mathrm{e}^{-r^2(1-\mathrm{e}^{-2\kappa t})/2}\exp\left(-\kappa\mathrm{Tr}\frac{\partial}{\partial r}\right)\langle r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}|\rho_0\rangle\\&=\mathrm{e}^{-T|\eta|^2/2}\langle\eta\,\mathrm{e}^{-\kappa t}|\rho_0\rangle,\end{aligned}\tag{28}$$

这里 $T=1-\mathrm{e}^{-2\kappa t}$. 利用完备性关系 $\int\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\pi}|\eta\rangle\langle\eta|=1$ 和积分 (12) 式以及 (28) 式, 我们可得

$$\begin{aligned}|\rho\rangle=&\int\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\pi}|\eta\rangle\langle\eta|\rho\rangle\\=&\int\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\pi}|\eta\rangle\,\mathrm{e}^{-T|\eta|^2/2}\langle\eta\,\mathrm{e}^{-\kappa t}|\rho_0\rangle\\=&\int\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\pi}:\exp[-|\eta|^2+\eta(a^\dagger-\mathrm{e}^{-\kappa t}\tilde{a})\\&+\eta^*(a\,\mathrm{e}^{-\kappa t}-\tilde{a}^\dagger)+a^\dagger\tilde{a}^\dagger\\&+a\tilde{a}-a^\dagger a-\tilde{a}^\dagger\tilde{a}]:|\rho_0\rangle\\=&:\exp\{(a^\dagger-\mathrm{e}^{-\kappa t}\tilde{a})(a\,\mathrm{e}^{-\kappa t}-\tilde{a}^\dagger)+a^\dagger\tilde{a}^\dagger\\&+a\tilde{a}-a^\dagger a-\tilde{a}^\dagger\tilde{a}\}:|\rho_0\rangle\\=&:\exp\{(1-\mathrm{e}^{-2\kappa t})a\tilde{a}\\&+(\mathrm{e}^{-\kappa t}-1)(a^\dagger a+\tilde{a}^\dagger\tilde{a})\}:|\rho_0\rangle\\=&\exp[-\kappa t(a^\dagger a+\tilde{a}^\dagger\tilde{a})]\exp[(1-\mathrm{e}^{-2\kappa t})a\tilde{a}]|\rho_0\rangle\\=&\exp[-\kappa t(a^\dagger a+\tilde{a}^\dagger\tilde{a})]\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{T^n}{n!}a^n\tilde{a}^n\rho_0|I\rangle\\=&\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{T^n}{n!}\mathrm{e}^{-\kappa ta^\dagger a}a^n\rho_0a^{\dagger n}\,\mathrm{e}^{-\kappa ta^\dagger a}|I\rangle.\end{aligned}\tag{29}$$

所以在耗散通道内密度算符的主方程解为

$$\rho(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{T^n}{n!}\mathrm{e}^{-\kappa ta^\dagger a}a^n\rho_0a^{\dagger n}\,\mathrm{e}^{-\kappa ta^\dagger a}.\tag{30}$$

将其写成Kraus算符的形式为

$$\rho(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}M_n\rho_0M_n^\dagger,\ M_n=\frac{T^n}{n!}\mathrm{e}^{-\kappa ta^\dagger a}a^n.\tag{31}$$

4 *RLC* 电路密度矩阵随时间演化的规律: 反正规排序形式

将 (15) 式代入 (30) 式, 我们有

$$\begin{aligned}\rho(t)=&A\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{T^n}{n!}\mathrm{e}^{-\kappa ta^\dagger a}a^n\exp(E^*a^{\dagger2})\\&\times\exp(a^\dagger a\ln\lambda)\exp(Ea^2)a^{\dagger n}\,\mathrm{e}^{-\kappa ta^\dagger a}.\end{aligned}\tag{32}$$

根据公式

$$\begin{aligned}&\exp\left[a^{\dagger}a\ln B\right]f\left(a^{\dagger}\right)\exp\left[-a^{\dagger}a\ln B\right]\\=&f\left(Ba^{\dagger}\right),\\&\exp\left[a^{\dagger}a\ln B\right]f\left(a\right)\exp\left[-a^{\dagger}a\ln B\right]\\=&f\left(a/B\right),\end{aligned}\tag{33}$$

得

$$\begin{aligned}\rho(t)=&A\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{T^{n}\,\mathrm{e}^{2\kappa tn}}{n!}a^{n}\exp(E^{*}\,\mathrm{e}^{-2\kappa t}a^{\dagger 2})\\&\times\exp[(\ln\lambda-2\kappa t)a^{\dagger}a]\\&\times\exp(E\,\mathrm{e}^{-2\kappa t}a^{2})a^{\dagger n},\end{aligned}\tag{34}$$

这里

$$\begin{aligned}&\exp[(\ln\lambda-2\kappa t)a^{\dagger}a]\\=&:\exp\left[\left(\mathrm{e}^{\ln\lambda-2\kappa t}-1\right)a^{\dagger}a\right]:\\=&:\exp\left[\left(\lambda\,\mathrm{e}^{-2\kappa t}-1\right)a^{\dagger}a\right]:,\end{aligned}\tag{35}$$

$:\ :$ 标记正规序. 由于在 a^{n} 和 $a^{\dagger n}$ 之间存在

$$\exp(E^{*}\,\mathrm{e}^{-2\kappa t}a^{\dagger 2}),\quad \exp[(\ln\lambda-2\kappa t)a^{\dagger}a],\\ \exp(E\,\mathrm{e}^{-2\kappa t}a^{2})$$

三项, 所以在对 n 进行求和时遇到困难, 解决这个难题的方法是把这三项转换成反正规排序的形式, 为此, 我们利用以下的化算符为其反正规排序的公式[21]

$$\begin{aligned}\rho=&\int\frac{\mathrm{d}^{2}\beta}{\pi}\vdots\langle-\beta|\rho|\beta\rangle\\&\times\exp[|\beta|^{2}+\beta^{*}a-\beta a^{\dagger}+a^{\dagger}a]\vdots,\end{aligned}\tag{36}$$

这里 $|\beta\rangle$ 也是一个相干态, $a|\beta\rangle=\beta|\beta\rangle$, $\vdots\ \vdots$ 标记反正规序, 我们计算

$$\begin{aligned}&\exp(E^{*}\,\mathrm{e}^{-2\kappa t}a^{\dagger 2})\exp[(\ln\lambda-2\kappa t)a^{\dagger}a]\exp(E\,\mathrm{e}^{-2\kappa t}a^{2})\\=&\int\frac{\mathrm{d}^{2}\beta}{\pi}\vdots\langle-\beta|\exp(E^{*}\,\mathrm{e}^{-2\kappa t}a^{\dagger 2}):\ \exp\left[\left(\lambda\,\mathrm{e}^{-2\kappa t}-1\right)a^{\dagger}a\right]\ :\ \exp(E\,\mathrm{e}^{-2\kappa t}a^{2})|\beta\rangle\\&\times\exp[|\beta|^{2}+\beta^{*}a-\beta a^{\dagger}+a^{\dagger}a]\vdots\\=&\int\frac{\mathrm{d}^{2}\beta}{\pi}\vdots\exp[-\lambda\,\mathrm{e}^{-2\kappa t}|\beta|^{2}+\beta^{*}a-\beta a^{\dagger}+E\,\mathrm{e}^{-2\kappa t}\beta^{2}+E^{*}\,\mathrm{e}^{-2\kappa t}\beta^{*2}+a^{\dagger}a]\vdots\\=&\frac{\mathrm{e}^{2\kappa t}}{\sqrt{\lambda^{2}-4|E|^{2}}}\vdots\exp\left[\frac{-\lambda aa^{\dagger}+Ea^{2}+E^{*}a^{\dagger 2}}{\lambda^{2}-4|E|^{2}}\,\mathrm{e}^{2\kappa t}+a^{\dagger}a\right]\vdots.\end{aligned}\tag{37}$$

将 (37) 式代入 (34) 式之后可以看出整个式子都是反正规排列的, 因为 a 和 $a^{\dagger}$ 在 $\vdots\ \vdots$ 内是可对易的, 所以现在我们可以在 $\vdots\ \vdots$ 内对 n 进行求和, 结果是

$$\begin{aligned}\rho(t)=&\frac{A\,\mathrm{e}^{2\kappa t}}{\sqrt{\lambda^{2}-4|E|^{2}}}\vdots\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(T\,\mathrm{e}^{2\kappa t}aa^{\dagger})^{n}}{n!}\exp\left[\frac{-\lambda aa^{\dagger}+Ea^{2}+E^{*}a^{\dagger 2}}{\lambda^{2}-4|E|^{2}}e^{2\kappa t}+a^{\dagger}a\right]\vdots\\=&\frac{A\,\mathrm{e}^{2\kappa t}}{\sqrt{\lambda^{2}-4|E|^{2}}}\vdots\exp(\,\mathrm{e}^{2\kappa t}aa^{\dagger})\exp\left[\frac{-\lambda aa^{\dagger}+Ea^{2}+E^{*}a^{\dagger 2}}{\lambda^{2}-4|E|^{2}}\,\mathrm{e}^{2\kappa t}\right]\vdots\\=&A'\vdots\exp\left\{\mathrm{e}^{2\kappa t}\frac{(\lambda^{2}-4|E|^{2}-\lambda)aa^{\dagger}+Ea^{2}+E^{*}a^{\dagger 2}}{\lambda^{2}-4|E|^{2}}\right\}\vdots,\end{aligned}\tag{38}$$

这里

$$A'=\frac{Ae^{2\kappa t}}{\sqrt{\lambda^{2}-4|E|^{2}}},\tag{39}$$

且我们已应用了 $T=1-\mathrm{e}^{-2\kappa t}$. 这就是在 t 时刻的反正规序密度矩阵, 为了检验它的有效性, 我们利用在相干态表象的 P 表示公式

$$\rho(t)=\int\frac{\mathrm{d}^{2}z}{\pi}|z\rangle\langle z|P_{t}\left(z\right).\tag{40}$$

来计算 (38) 式中 $\rho(t)$ 的迹

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}\rho(t)\\=&\int\frac{\mathrm{d}^{2}z}{\pi}\langle z|P_{t}\left(z\right)|z\rangle\\=&\int\frac{\mathrm{d}^{2}z}{\pi}P_{t}\left(z\right)\\=&A'\int\frac{\mathrm{d}^{2}z}{\pi}\\&\times\exp\left[\mathrm{e}^{2\kappa t}\frac{(\lambda^{2}-4|E|^{2}-\lambda)|z|^{2}+Ez^{2}+E^{*}z^{*2}}{\lambda^{2}-4|E|^{2}}\right]\\=&\frac{A\sqrt{\lambda^{2}-4|E|^{2}}}{\sqrt{(\lambda^{2}-4|E|^{2}-\lambda)^{2}-4|E|^{2}}}\\=&\frac{A}{\sqrt{(\lambda-1)^{2}-4|E|^{2}}}=1,\end{aligned}\tag{41}$$

得到预期的结果.

5 回路能量的变化

现在我们利用(38)式中$\rho(t)$的反正规排列形式和它的P表示形式来计算t时刻回路的能量, 我们有

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Tr}\left(\rho(t)a^{\dagger}a\right)\\
=&\operatorname{Tr}\left[\int\frac{\mathrm{d}^2z}{\pi}P_t\left(z\right)|z\rangle\langle z|a^{\dagger}a\right]\\
=&\int\frac{\mathrm{d}^2z}{\pi}P_t\left(z\right)|z|^2\\
=&A'\int\frac{\mathrm{d}^2z}{\pi}|z|^2\exp\left[\mathrm{e}^{2\kappa t}|z|^2\right.\\
&\left.+\frac{Ez^2+E^*z^{*2}-\lambda|z|^2}{\lambda^2-4|E|^2}\mathrm{e}^{2\kappa t}\right]\\
=&A'\,\mathrm{e}^{-4\kappa t}\int\frac{\mathrm{d}^2z}{\pi}|z|^2\exp\left[|z|^2\right.\\
&\left.+\frac{Ez^2+E^*z^{*2}-\lambda|z|^2}{\lambda^2-4|E|^2}\right]\\
=&A'\,\mathrm{e}^{-4\kappa t}\frac{\partial}{\partial f}\int\frac{\mathrm{d}^2z}{\pi}\exp\left[f|z|^2\right.\\
&\left.+\frac{Ez^2+E^*z^{*2}-\lambda|z|^2}{\lambda^2-4|E|^2}\right]_{f=1}\\
=&A'\,\mathrm{e}^{-4\kappa t}\frac{\partial}{\partial f}\int\frac{\mathrm{d}^2z}{\pi}\\
&\times\exp\left[\frac{Ez^2+E^*z^{*2}+[f(\lambda^2-4|E|^2)-\lambda]|z|^2}{\lambda^2-4|E|^2}\right]_{f=1}\\
=&A'\,\mathrm{e}^{-4\kappa t}\frac{\partial}{\partial f}\frac{\lambda^2-4|E|^2}{\sqrt{\left[f\left(\lambda^2-4|E|^2\right)-\lambda\right]^2-4|E|^2}}\bigg|_{f=1}\\
=&A'\,\mathrm{e}^{-4\kappa t}\sqrt{\lambda^2-4|E|^2}\\
&\times\frac{\partial}{\partial f}\left[\frac{1}{\sqrt{(\lambda f-1)^2-4|E|^2f^2}}\right]_{f=1}\\
=&A'\,\mathrm{e}^{-4\kappa t}\frac{\sqrt{\lambda^2-4|E|^2}[4|E|^2-\lambda(\lambda-1)]}{[(\lambda-1)^2-4|E|^2]^{3/2}}\\
=&\mathrm{e}^{-2\kappa t}\frac{A[4|E|^2-\lambda(\lambda-1)]}{[(\lambda-1)^2-4|E|^2]^{3/2}}\\
=&\mathrm{e}^{-2\kappa t}\frac{4|E|^2-\lambda(\lambda-1)}{(\lambda-1)^2-4|E|^2}. \qquad (42)
\end{aligned}
$$

在最后一步中, 我们利用了

$$A\equiv\sqrt{(1-\lambda)^2-4|E|^2}=2\sqrt{\lambda}\sinh(\beta D/2).$$

注意

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{-2\kappa t}\frac{4|E|^2-\lambda(\lambda-1)}{(\lambda-1)^2-4|E|^2}\\
=&\mathrm{e}^{-2\kappa t}\left[\frac{1-\lambda}{(\lambda-1)^2-4|E|^2}-1\right]\\
=&\mathrm{e}^{-2\kappa t}\left[\frac{1-\lambda}{4\lambda\sinh^2(\beta D/2)}-1\right]. \qquad (43)
\end{aligned}
$$

然后将$\lambda=\dfrac{D}{\omega\sinh(\beta D)+D\cosh(\beta D)}$代入上式, 我们有

$$\operatorname{Tr}\left[\rho(t)a^{\dagger}a\right]=\frac{\mathrm{e}^{-2\kappa t}}{2}\left[\frac{\omega}{D}\coth(\beta D/2)-1\right]. \qquad (44)$$

因为

$$\operatorname{Tr}\left(\rho_0a^{\dagger}a\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{\omega}{D}\coth(\beta D/2)-1\right], \qquad (45)$$

所以有

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Tr}\left[\rho(t)a^{\dagger}a\right]&=\mathrm{e}^{-2\kappa t}\operatorname{Tr}\left(\rho_0a^{\dagger}a\right)\\
&=\mathrm{e}^{-Rt/(2L)}\operatorname{Tr}\left(\rho_0a^{\dagger}a\right). \qquad (46)
\end{aligned}
$$

因此可以看出回路能量以$\mathrm{e}^{-Rt/(2L)}$随时间衰减.

6 结 论

我们已经采用了新的方法处理了介观RLC电路的振幅衰减, 即先给出含衰减项但不显含时间t的哈密顿量的密度矩阵, 把它归一化, 然后将它作为初始密度矩阵放在衰减通道中演化, 继而得到解析形式的t时刻的密度算符, 再根据系综平均求出相应的物理量的衰减. 这个方法可以推广到较为复杂的含耗散项的介观电路哈密顿系统, 只要求出其相应的密度算符, 就可以导出其力学量的衰减规律. 此方法还可以推广到多模哈密顿系统.

附录A

(14)式的证明如下:

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{(1-\lambda)^2-4|E|^2}\\
=&\sqrt{(1-\lambda)^2-\frac{\lambda^2}{D^2}(\omega^2-D^2)\sinh^2(\beta D)}\\
=&\sqrt{\lambda^2[\frac{D^2\cosh^2(\beta D)-\omega^2\sinh^2(\beta D)}{D^2}]-2\lambda+1}\\
=&\left\{\frac{D\cosh(\beta D)-\omega\sinh(\beta D)}{\omega\sinh(\beta D)+D\cosh(\beta D)}\right.\\
&\left.-\frac{2D}{\omega\sinh(\beta D)+D\cosh(\beta D)}+1\right\}^{1/2}\\
=&\sqrt{\frac{2D[\cosh(\beta D)-1]}{\omega\sinh(\beta D)+D\cosh(\beta D)}}\\
=&2\sqrt{\lambda}\sinh(\beta D/2), \qquad (\mathrm{A}1)
\end{aligned}
$$

所以我们有

$$
\begin{aligned}
Z(\beta)&=\sqrt{\frac{\lambda\,\mathrm{e}^{\beta\omega}}{(1-\lambda)^2-4|E|^2}}\\
&=\frac{\mathrm{e}^{\beta\omega/2}}{2\sinh(\beta D/2)}. \qquad (\mathrm{A}2)
\end{aligned}
$$

参考文献

[1] Louisell W H 1973 *Quantum Statistical Properties of Radiation* (New York: John Wiley)

[2] Fan H Y, Liang X T 2000 *Chin. Phys. Lett.* **17** 174

[3] Song T Q 2003 *Int. J. Theor. Phys.* **42** 793

[4] Wang J S, Liu T K, Zhan M S 2000 *Chin. Phys. Lett.* **17** 528

[5] Xu X L, Li H Q, Wang J S 2006 *Int. J. Theor. Phys.* **45** 2517

[6] Wang J S, Sun C Y 1998 *Int. J. Theor. Phys.* **37** 1213

[7] Fan H Y, Pan X Y 1998 *Chin. Phys. Lett.* **15** 625

[8] Xu C L 2012 *Chin. Phys. B* **21** 020402

[9] Fan H Y, Xu X X, Hu L Y 2010 *Chin. Phys. B* **19** 060502

[10] Xu X L, Li H Q, Wang J S 2007 *Chin. Phys.* **16** 2462

[11] Xie Y X, Li Z J, Zhou G H 2007 *Acta. Phys. Sin.* **56** 7224 (in Chinese)[谢月新, 李志坚, 周光辉 2007 物理学报 **56** 7224]

[12] Long C Y 2003 *Acta. Phys. Sin.* **52** 2033 (in Chinese)[龙超云 2003 物理学报 **52** 2033]

[13] Fan H Y, Hu L Y 2008 *Opt. Commun.* **281** 5571

[14] Fan H Y, Hu L Y 2009 *Opt. Commun.* **282** 932

[15] Fan H Y, Hu L Y 2008 *Mod. Phys. Lett. B* **22** 2435

[16] Fan H Y, Vanderlinde J 1989 *Phys. Rev. A* **39** 1552

[17] Fan H Y 1990 *Phys. Rev. A* **41** 1526

[18] Hu L Y, Fan H Y 2009 *Chin. Phys. Lett.* **26** 090307

[19] Hu L Y, Fan H Y 2009 *Commun. Theor. Phys.* **51** 321

[20] Wei U 1999 *Quantum Dissipative System* (Singapore: World Scientific)

[21] Fan H Y 1991 *Phys. Lett. A* **161** 1

Quantum dissipation of the density matrix of mesoscopic *RLC* circuit*

Fan Hong-Yi He Rui†

(*Department of Materials Science and Engineering, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China*)

(Received 10 January 2014; revised manuscript received 25 January 2014)

Abstract

For the first time, as far as we know, we use the approach of solving the amplitude-decaying master equation of density matrix to study the quantum dissipation of a mesoscopic *RLC* circuit, and thus find out the attenuation law of circuit energy. We then use the entangled state representation and the technique of integration within an ordered product of operators to explore this problem.

Keywords: mesoscopic *RLC* circuit, dissipative channel, master equation, entangled state representation

PACS: 03.65.–Ca, 03.65.Yz **DOI:** 10.7498/aps.63.110301

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11175113), and the Fundamental Research Funds for the Central Universities of China (Grant No. WK2060140013).

† Corresponding author. E-mail: heruim@mail.ustc.edu.cn