

带有三体相互作用的 XXZ 自旋链模型的 隐形传态*

郝玉兴 单传家 黄燕霞[†]

(湖北师范学院物理与电子科学学院, 黄石 435002)

(2013年10月9日收到; 2014年2月25日收到修改稿)

本文对基于海森堡 XXZ 自旋链模型的隐形传态的平均保真度进行了详细计算和分析. 通过比较不带三体相互作用、仅带一种三体相互作用和同时带两种三体相互作用的各种海森堡铁磁质和反铁磁质 XXZ 模型在外磁场正向和反向时的保真度与外磁场和温度的关系, 找到了一些理想模型, 用这些模型进行隐形传态时需要的外界磁场相对较弱、温度相对较高, 这个结论为实验上用海森堡 XXZ 模型进行隐形传态提供了很好的理论依据.

关键词: 隐形传态, 保真度, 三体相互作用

PACS: 03.67.-a, 03.67.HK, 75.10.Pq

DOI: 10.7498/aps.63.110305

1 引言

众所周知, 量子隐形传态^[1]在量子信息理论^[2]中扮有非常重要的角色. 它是以量子态为信息的载体, 以量子纠缠为量子信道来传输大容量的信息. 在整个隐形传态过程中, 所传输的信息对于信息发送者和接收者都是未知的, 这也就为操纵但是不破坏量子态提供了可能性, 利用这点性质在原则上就可以实现不可破译的量子保密通信. 充当量子信道的物理系统是多种多样的, 用GHZ态^[3]和W态^[4]进行隐形传态在理论上已经得到了证明^[5,6], 但是以纯态作纠缠源容易受到外界环境的影响而退纠缠. 目前, 研究最多的是用热平衡态下的自旋链模型, 因为制备自旋链模型的纠缠既不需要测量也不需要相互作用的控制并且其热纠缠与我们的外界环境很接近^[7,8]. 其中海森堡自旋链模型^[9-13]作为最简单的自旋链模型已被用于模拟量子计算机

的研究中^[14], 并且海森堡模型本身就可以在光晶格^[15]、电子自旋^[16]、原子核自旋系统^[17]和量子点系统^[18]等物理系统中实现. 因此海森堡模型的量子纠缠便成为量子信息和凝聚态物理的一个纽带. 文献^[19]和文献^[20]分别讨论了以均匀磁场中三比特海森堡 XX 和 XXZ 模型的热纠缠态为量子信道的隐形传态. 文献^[21]讨论了带有DM相互作用的 XXZ 模型的隐形传态. 但是有关带有三重自旋耦合相互作用的自旋链模型的隐形传态却很少涉及到. 这种带有多重自旋耦合相互作用的模型在一些物理体系的描述上是极其重要的^[22], 相比于仅仅考虑近邻相互作用的物理体系更加接近准一维磁性物理体系. 文献^[23]讨论了三重自旋耦合相互作用对海森堡 XXZ 自旋链模型的基态和热纠缠性质的影响. 在本文中我们就讨论一下以带有三重自旋耦合相互作用的海森堡 XXZ 自旋链为量子信道的隐形传态.

* 国家自然科学基金重大研究计划(批准号: 2012CB922100)、湖北省自然科学基金(批准号: 2011CDC010)和湖北省高等学校科研基金(批准号: D20092204)资助的课题.

[†] 通讯作者. E-mail: huangyx617@163.com

2 理论模型

带有三重自旋相互作用的海森堡 XXZ 自旋链模型的哈密顿量

$$H = \sum_{l=1}^L [J(\sigma_l^x \sigma_{l+1}^x + \sigma_l^y \sigma_{l+1}^y) + J_Z \sigma_l^z \sigma_{l+1}^z + B \sigma_l^z] + \sum_{l=1}^L J^* [\sigma_l^x \sigma_{l+1}^z \sigma_{l+2}^x + \sigma_l^y \sigma_{l+1}^z \sigma_{l+2}^y] + \sum_{l=1}^L J^\# [\sigma_l^x \sigma_{l+1}^z \sigma_{l+2}^y - \sigma_l^y \sigma_{l+1}^z \sigma_{l+2}^x], \quad (1)$$

其中, L 为自旋链的比特数, $\sigma_l^\alpha (\alpha = x, y, z)$ 为泡利矩阵, B 代表外磁场. J 为自旋耦合参数, 其他参数为与其约化的比例量, 所以参数 J^* , $J^\#$, J_Z 以及外磁场强度 B 都无量纲. J^* 和 $J^\#$ 分别表示 $XZX + YZY$ 型三体相互作用以及 $XZY - YZX$ 型三体相互作用.

取周期性边界条件 $\sigma_{L+1}^\alpha = \sigma_1^\alpha$, 对于一个三比特的环链模型, 首先解定态薛定谔本征方程

$$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle, \quad (2)$$

在标准基 $\{|000\rangle, |001\rangle, |010\rangle, |011\rangle, |100\rangle, |101\rangle, |110\rangle, |111\rangle\}$ 下, 本征矢为

$$\begin{aligned} |\psi_0\rangle &= |000\rangle, \\ |\psi_1\rangle &= (l|001\rangle + l^2|010\rangle + |100\rangle)/\sqrt{3}, \\ |\psi_2\rangle &= (p^2|001\rangle + p|010\rangle + |100\rangle)/\sqrt{3}, \\ |\psi_3\rangle &= (|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle)/\sqrt{3}, \\ |\psi_4\rangle &= (p|110\rangle + p^2|101\rangle + |011\rangle)/\sqrt{3}, \\ |\psi_5\rangle &= (p^2|110\rangle + p|101\rangle + |011\rangle)/\sqrt{3}, \\ |\psi_6\rangle &= (|110\rangle + |101\rangle + |011\rangle)/\sqrt{3}, \\ |\psi_7\rangle &= |111\rangle, \end{aligned} \quad (3)$$

其中 $p = \exp(i2\pi/3)$, $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 分别表示自旋向上和向下的态. 其对应的本征值为

$$\begin{aligned} E_0 &= 3(J_z + B), \\ E_1 &= B - J_z - 2J - 2J^* - 2\sqrt{3}J^\#, \\ E_2 &= B - J_z - 2J - 2J^* + 2\sqrt{3}J^\#, \\ E_3 &= B - J_z + 4J + 4J^*, \\ E_4 &= -B - J_z - 2J + 2J^* - 2\sqrt{3}J^\#, \\ E_5 &= -B - J_z - 2J + 2J^* + 2\sqrt{3}J^\#, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_6 &= -B - J_z + 4J - 4J^*, \\ E_7 &= 3(J_z - B). \end{aligned} \quad (4)$$

3 以热平衡态为量子信道的隐形传态

这里取波尔兹曼常数为 1, 系统热纠缠态的密度矩阵为

$$\rho_{ABC} = e^{-\beta H}/Z, \quad (5)$$

其中 $\beta = 1/T$, $Z = \text{Tr} e^{-\beta H}$.

此模型的热纠缠情况已有人做了详细的阐述^[23], 在此基础上, 我们利用标准隐形传态的方法来传递信息. 量子态的发送者 Alice 拥有待传输的比特 S 和量子位 A, 态的接收者 Bob 和 Cindy 分别拥有量子位 B 和 C. 但是 Alice 不能将态 S 同时传给 Bob 和 Cindy, 只能传给其中的一个, 否则违背了量子不可克隆定理^[24]. 待传输的态具有以下形式:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_S &= \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle \\ (0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi). \end{aligned} \quad (6)$$

整个系统的态为

$$\rho_{SABC} = \rho_S \otimes \rho_{ABC}, \quad (7)$$

其中 $\rho_S = |\psi\rangle_S \langle\psi|$. 欲完成隐形传态, Alice 需对 S 和 A 做联合 Bell 基测量, 测量算符为 $\Pi_{SA}^j \otimes I_{BC}$. 其中

$$\begin{aligned} \Pi_{SA}^1 &= |\Phi^+\rangle_{SA} \langle\Phi^+|, \quad \Pi_{SA}^2 = |\Phi^-\rangle_{SA} \langle\Phi^-|, \\ \Pi_{SA}^3 &= |\Psi^+\rangle_{SA} \langle\Psi^+|, \quad \Pi_{SA}^4 = |\Psi^-\rangle_{SA} \langle\Psi^-|, \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned} |\Phi^\pm\rangle_{SA} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle), \\ |\Psi^\pm\rangle_{SA} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle) \end{aligned} \quad (8)$$

为 Bell 态 I_{BC} 是复合子系统 BC 的单位密度算符, j 用来标识测量结果, 若 Alice 的测量结果为 j , 并且把此测量结果通过经典信道告诉 Bob 和 Cindy, 那么此时 Bob 和 Cindy 所组成的子体系的态为

$$\rho_{BC}^j = \frac{1}{P_j} \text{Tr}_{SA} [(\Pi_{SA}^j \otimes I_{BC})(\rho_S \otimes \rho_{ABC})], \quad (9)$$

其中

$$P_j = \text{Tr}_{SABC} [(\Pi_{SA}^j \otimes I_{BC})(\rho_S \otimes \rho_{ABC})] \quad (10)$$

为 Alice 获得测量结果 j 的概率.

经计算得

$$P_1 = P_2 = \frac{1}{6Z} \left(f \cos^2 \frac{\theta}{2} + g \sin^2 \frac{\theta}{2} \right),$$

$$P_3 = P_4 = \frac{1}{6Z} \left(g \cos^2 \frac{\theta}{2} + f \sin^2 \frac{\theta}{2} \right), \quad (11)$$

其中

$$f = 2(e^{-\beta E_1} + e^{-\beta E_2} + e^{-\beta E_3}) + e^{-\beta E_4}$$

$$+ e^{-\beta E_5} + e^{-\beta E_6} + 3e^{-\beta E_0},$$

$$g = e^{-\beta E_1} + e^{-\beta E_2} + e^{-\beta E_3} + 2(e^{-\beta E_4}$$

$$+ e^{-\beta E_5} + e^{-\beta E_6}) + 3e^{-\beta E_7}. \quad (12)$$

Alice 可以把未知量子态 ρ_S 传递给 Bob 或 Cindy. 若 Alice 欲把未知量子态传给 Bob, 首先 Bob 需要对量子位 B 做与 j 相关的么正变换, 此时输出态为

$$\rho_{\text{Bout}}^j = U^j \rho_B^j U^{j\dagger}, \quad (13)$$

其中 $\rho_B^j = \text{Tr}_C \rho_{\text{BC}}^j$, U^j 为么正变换, $U^1 = \sigma_x, U^2 = \sigma_y, U^3 = IU^4 = \sigma_z$, 这里我们用平均保真度来衡量用此量子信道来隐形传态的效果, 即对 Alice 所有测量结果 j 和所有 Bloch 球上的态 ρ_S 取平均

$$F = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \sum_{j=1}^4 P_j F^j, \quad (14)$$

其中 $F^j = \text{Tr}(\rho_{\text{out}}^j \rho_S)$ [13], 经计算我们得出

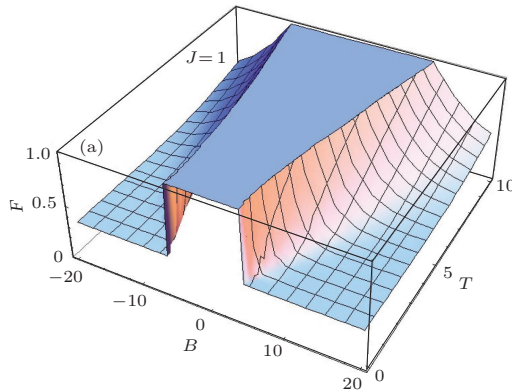
$$P_1 F^1 = P_2 F^2 = P_3 F^3 = P_4 F^4$$

$$= \frac{M}{6Z} \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right) + \frac{\sin^2 \theta}{8Z} (e^{-\beta E_0}$$

$$+ e^{-\beta E_3} + e^{-\beta E_6} + e^{-\beta E_7}), \quad (15)$$

其中

$$M = \sum_{i=1}^6 e^{-\beta E_i}, \quad (16)$$



代入得

$$F_B = \frac{1}{3Z} (6M + e^{-\beta E_0} + e^{-\beta E_3}$$

$$+ e^{-\beta E_6} + e^{-\beta E_7}). \quad (17)$$

同理, 算出 F_C , 并且发现 $F_B = F_C$.

4 讨 论

现在我们通过几组图像详细讨论平均保真度 F 与外磁场 B 和温度 T 的关系. 这里我们分两种情况进行讨论, 一种是铁磁质 ($J < 0$) 的海森堡 XXZ 模型, 另一种是反铁磁质 ($J > 0$) 的海森堡 XXZ 模型.

从图 1 我们可以看出铁磁质和反铁磁质模型的平均保真度 F 相对于磁场都是对称的, 并且随外磁场 B 的增加而减小, 随温度 T 的升高而增大, 欲提高平均保真度 F 可以通过减小外磁场 B 和升高温度 T 来实现. 并且发现随温度的增高有更宽的磁场范围使保真度达到最大. 这些特点都将为实验上操控该模型提供方便, 因为就目前的实验条件, 提供相对高温、弱磁场要比提供低温、强磁场容易地多也就是说, 我们需要寻找一种在实验条件下最容易使平均保真度达到最大的模型.

为了研究三体相互作用 ($XZX + YZY$ 型和 $XZY - YZX$ 型) 对隐形传态质量的影响, 我们需要对四种海森堡 XXZ 模型进行比较: 不带三体相互作用 ($J^* = J^\# = 0$) 的 XXZ 模型, 仅带 $XZY - YZX$ 型三体相互作用 ($J^* = 0, J^\# = 1$) 的 XXZ 模型, 仅带 $XZX + YZY$ 型三体相互作用 ($J^* = 1, J^\# = 0$) 的 XXZ 模型, 同时带两种三体相互作用 ($J^* = J^\# = 1$) 的 XXZ 模型.

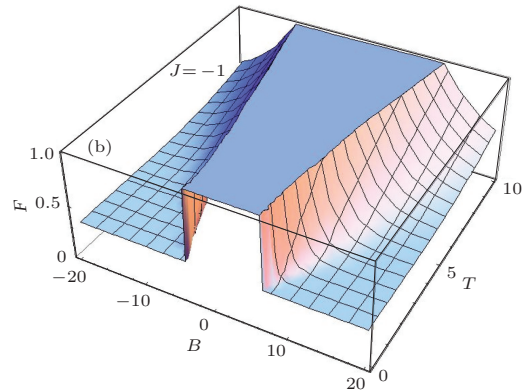


图 1 平均保真度 F 与外磁场 B 和温度 T 的关系图 (参量 $J^* = J^\# = J_Z = 1$) (a) $J = 1$; (b) $J = -1$

首先分析平均保真度 F 与外界磁场 B 的关系, 令温度 $T = 1$, 如图 2. 我们不妨把保真度达到最大时的磁场称为临界磁场, 这里我们只寻找临界磁场最小的模型. 现在我们比较反铁磁质和铁磁质情况下的四种模型: 不带三体相互作用的 XXZ 模型(点划线), 仅带 $XZY - YZX$ 型三体相互作用的 XXZ 模型(虚线), 仅带 $XZX + YZY$ 型三体相互作用的 XXZ 模型(细实线), 同时带两种三体相互作用的 XXZ 模型(粗实线). 经比较发现, 对于反铁磁质模型 ($J > 0$), 图 2(a) 当外磁场方向为反向时, 不带任何三体相互作用的 XXZ 模型(点划线)的临界磁场最弱; 当外磁场方向正向时, 仅带 $XZX + YZY$ 型三体相互作用的 XXZ 模型(细实线)的临界磁场最弱. 对于铁磁质模型 ($J < 0$), 图 2(b): 当外磁场方向反向时, 不带三体相互作用的 XXZ 模型(点划线)和仅带 $XZY - YZX$ 型三体相互作用的 XXZ 模型(虚线)重合, 同时发现仅带 $XZX + YZY$ 型三体相互作用的 XXZ 模型(细实线)的临界磁场最弱; 当外磁场方向正向时, 不带三体相互作用的 XXZ 模型(点划线)和仅

带 $XZY - YZX$ 型三体相互作用的 XXZ 模型(虚线)重合, 并且这两种模型的临界磁场最弱.

根据图 2 我们从磁场的角度选出了几种理想模型, 下面我们看这几种理想模型是否也满足温度条件, 如图 3、图 4. 同样, 我们把平均保真度 F 达到最大时的温度称为临界温度. 首先分析反铁磁质模型 ($J > 0$), 如图 3. 其中, 图 3(a) 是外磁场 $B = -6$, 即外磁场反向时的平均保真度与温度的关系, 此时不带任何三体相互作用的 XXZ 模型(点划线)的临界温度最高. 图 3(b) 是外磁场 $B = 6$, 即外磁场正方向时的情况, 此时仅带 $XZX + YZY$ 型三体相互作用的 XXZ 模型(细实线)的临界温度最高. 其次分析铁磁质模型 ($J < 0$), 如图 4. 其中, 图 4(a) 是外磁场 $B = -6$ 时的平均保真度与温度的关系, 此时仅带 $XZX + YZY$ 型三体相互作用的 XXZ 模型(细实线)的临界温度相对最高. 图 4(b) 是外磁场 $B = 6$ 的铁磁质模型, 其中不带三体相互作用的 XXZ 模型(点划线)的临界温度相对最高.

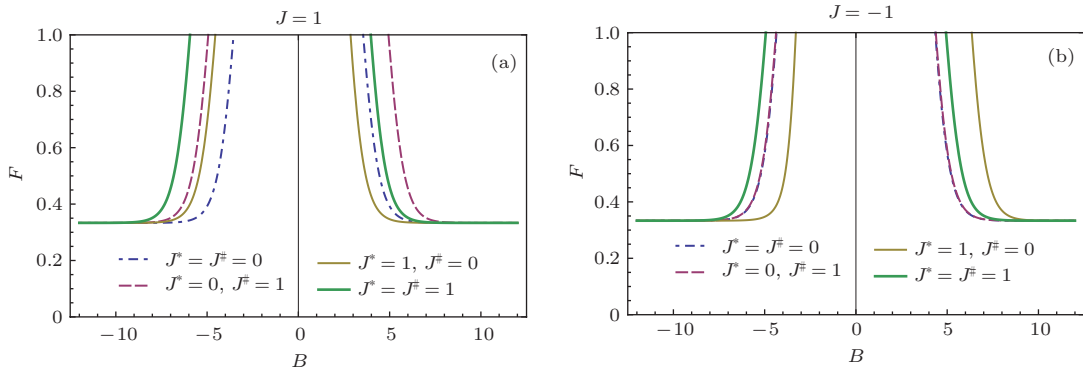


图 2 (网刊彩色) $T = 1$ 时平均保真度 F 随外磁场 B 的变化图(参量 $J_Z = 1$) (a) $J = 1$; (b) $J = -1$

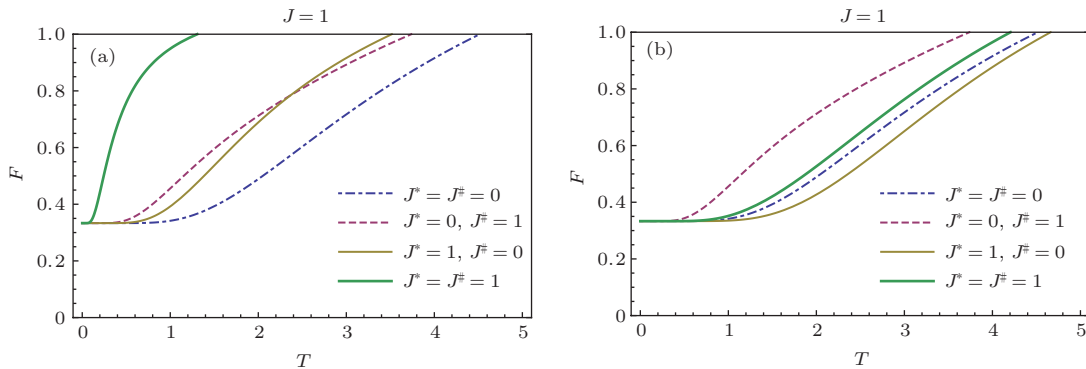


图 3 (网刊彩色) $J = 1$ 时保真度 F 与温度 T 的关系图(参量 $J_Z = 1$) (a) $B = -6$; (b) $B = 6$

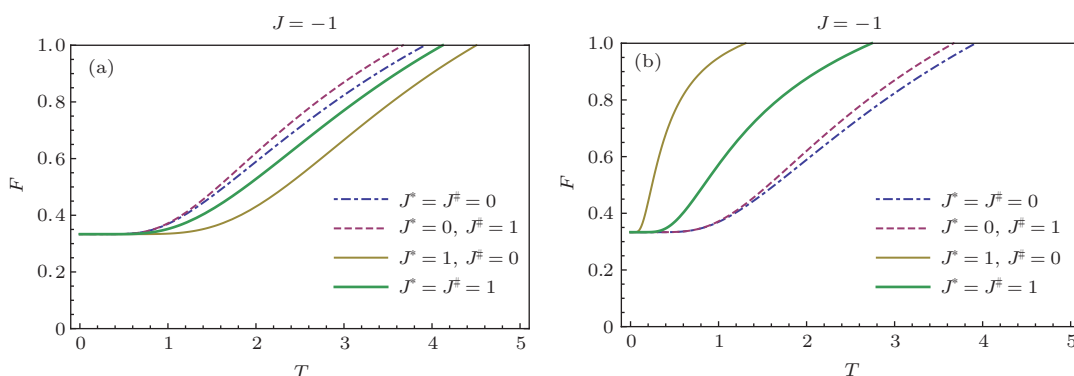


图4 (网刊彩色) $J = -1$ 时保真度 F 与温度 T 的关系图 (参量 $J_Z = 1$) (a) $B = -6$; (b) $B = 6$

综上, 我们得出结论, 这里理想的模型不仅跟它是否为铁磁质有关, 还与外磁场的方向有关. 对于反铁磁质模型, 外磁场反向时, 不带任何三体相互作用的 XXZ 模型的临界磁场最弱、临界温度最高; 外磁场正向时, 仅带 $XZX + YZY$ 型三体相互作用的 XXZ 模型的临界磁场最弱、临界温度最高. 然而, 对于铁磁质模型, 外磁场反方向时, 仅带 $XZX + YZY$ 型三体相互作用的 XXZ 模型的临界磁场最弱、临界温度最高; 外磁场正方向时, 不带任何三体相互作用的 XXZ 模型的临界磁场最弱、临界温度最高.

5 结 论

通过以上分析我们得知外磁场反向时的反铁磁质模型和外磁场正向时的铁磁质模型中不带任何三体相互作用的海森堡 XXZ 模型隐形传态保真度达到最大时临界磁场最弱、临界温度最高; 外磁场正向时的反铁磁质模型和外磁场反向时的铁磁质模型中仅带 $XZX + YZY$ 型三体相互作用的 XXZ 模型隐形传态保真度达到最大时临界磁场最弱、临界温度最高. 该结论可为实验上用海森堡 XXZ 自旋链模型进行隐形传态提供很好的参考依据.

参考文献

[1] Liao J Q, Kuang L M 2006 *Chin. Phys.* **15** 2246
 [2] Nielsen M A, Chuang I L (translated by Zheng D Z, ZHAO Q C) 2004 *Quantum Computation and Quantum Information* (Beijing: Tsinghua University Press) p-p171–241 (in Chinese) [Nielsen M A, Chuang I L 著 (郑

大钟, 赵千川译) 2004 *量子计算和量子信息* (二) 北京: (清华大学出版社) 第 171—241 页]
 [3] Song K H, Guo G C 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 0231 (in Chinese) [宋克慧, 郭光灿 2000 *物理学报* **49** 0231]
 [4] Zheng Y Z, Dai L Y, Guo G C 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2678 (in Chinese) [郑亦庄, 戴玲玉, 郭光灿 2003 *物理学报* **52** 2678]
 [5] Li Y L, Feng J 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 1888 (in Chinese) [李艳玲, 冯健 2007 *物理学报* **56** 1888]
 [6] Zha X W, Zhang C M 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1339 (in Chinese) [查新未, 张淳民 2008 *物理学报* **57** 1339]
 [7] Zhang G F 2007 *Phys. Rev. A* **75** 034304
 [8] Yeo Y, Liu T Q, Lu Y E, Yang Q Z 2005 *J. Phys. A: Math. Gen.* **38** 3235
 [9] Cheng L Y, Shao X Q, Zhang S, Yeon K H 2010 *Chin. Phys. B* **19** 090311
 [10] Wang H, Wu G X 2013 *Chin. Phys. B* **22** 050512
 [11] Wang Y H, Xia Y J 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 7479 (in Chinese) [王彦辉, 夏云杰 2009 *物理学报* **58** 7479]
 [12] Wang Q, Liao J Q, Zeng H S 2010 *Chin. Phys. B* **19** 100311
 [13] Zheng R, Liu B G 2012 *Chin. Phys. B* **21** 116401
 [14] Loss D, Divincenzo D P 1998 *Phys. Rev. A* **57** 120
 [15] Lidar D A, Bacon D, Whaley K B 1999 *Phys. Rev. Lett.* **82** 4556
 [16] Sorensen A, Molmer K 1999 *Phys. Rev. Lett* **83** 2274
 [17] Vrijen R, Yablonovitch E, Wang K, Jiang H W, Balandin A, Roychowdhury V, Mor T, Divincenzo D 2000 *Phys. Rev. A* **62** 012306
 [18] Kane B E 1998 *Nature* **393** 133
 [19] Li C X, Wang C Z, Guo G C 2006 *Opt. Commun.* **260** 741
 [20] Yeo Y 2003 *Phys. Rev. A* **68** 022316
 [21] Xie L J, Zhang D Y, Tang S Q, Zhan X G, Gao F 2009 *Chin. Phys. B* **18** 3203
 [22] Roger M, Hetherington J H, Delrieu J M 1983 *Rev. Mod. Phys.* **55** 1
 [23] Cheng W W, Shan C J, Huang Y X, Liu T K, Li H 2010 *Physica E* **43** 235
 [24] Wootters W K, Zurek W H 1982 *Nature* **29** 9802

Quantum teleportation in an XXZ spin chain system with three-site interaction^{*}

Xi Yu-Xing Shan Chuan-Jia Huang Yan-Xia[†]

(College of Physics and Electronic Science, Hubei Normal University, Huangshi 435002, China)

(Received 9 October 2013; revised manuscript received 25 February 2014)

Abstract

In this paper, we study carefully the quantum teleportation by means of a channel of a three-qubit Heisenberg XXZ ring, and calculate the fidelity of quantum teleportation. Comparing the four XXZ models: one without three-site interaction, one with $XZX + YZY$ type three-site interaction, one with $XZY - YZX$ type three-site interaction, one with both the two kinds of the three-site interaction, we find some ideal models by which the teleportation only needs a weakest magnetic field and a highest temperature to work successfully. The result could provide a theoretical basis for later experiments.

Keywords: quantum teleportation, fidelity, three-site interaction

PACS: 03.67.-a, 03.67.HK, 75.10.Pq

DOI: [10.7498/aps.63.110305](https://doi.org/10.7498/aps.63.110305)

^{*} Project supported by the Major Research Plan of the National Natural Science Foundation of China(Grant No. 2012CB922100), the Natural Science Foundation of Hubei Province, China(Grant No.2011CDC010), and the Scientific Research Foundation of the Higher Education Institutions of Hubei Province, China (Grant No. D20092204).

[†] Corresponding author. E-mail: huangyx617@163.com