

自旋轨道耦合玻色-爱因斯坦凝聚体在尖端势垒 散射中的Klein隧穿*

李志¹⁾ 曹辉^{2)†}

1)(北京理工大学, 物理学院, 北京 100081)

2)(计算物理国家实验室, 北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100088)

(2013年12月31日收到; 2014年2月16日收到修改稿)

本文对自旋-轨道耦合的玻色-爱因斯坦凝聚体经过尖端势垒散射的过程进行了数值模拟, 发现散射过程中存在Klein隧穿现象. 相较于高斯势垒, 尖端势垒散射的Klein阻塞及Klein隧穿区域会向较高势垒方向移动. 在Klein隧穿区域, 透射系数随势垒高度而振荡下降, 且振幅随着势垒增高而逐渐减小. 最后, 分别讨论了原子相互作用对经典透射区域、Klein阻塞区域以及Klein隧穿区域散射过程的影响.

关键词: 自旋-轨道耦合, Klein隧穿, 尖端势垒散射, 玻色-爱因斯坦凝聚

PACS: 03.75.Lm, 03.65.Nk, 67.85.Fg

DOI: 10.7498/aps.63.110306

1 引言

自旋-轨道耦合是原子内部的固有特性, 它是自旋霍尔效应^[1,2]以及拓扑绝缘体^[3,4]产生的主要原因. 近年来, 自旋-轨道耦合的玻色-爱因斯坦凝聚体 (spin-orbit coupled Bose-Einstein condensate, SOC BEC) 也引起了广泛的关注^[5,6], 尤其是NIST小组在实验上首次实现了SOC BEC^[5], 开启了冷原子物理中的一个新领域. 不仅SOC BEC本身具有许多奇特的性质, 吸引了理论研究的广泛兴趣, 更重要的是, SOC BEC具有良好的清洁性和高度可控性, 提供了一个理想的实验平台.

Klein隧穿是一个重要的相对论效应^[7], 它最早由Klein在研究Dirac方程时以佯谬的形式提出^[8]: 区别于非相对论粒子散射问题, 当Dirac粒子入射能量远小于势垒高度时, 粒子可以通过正负能态之间的转化, 从而透过势垒区域, 这就是人们所说的Klein隧穿也叫Klein佯谬. 虽然Klein隧穿现象一直未能在实验上直接观测到, 但这种特殊

的隧穿现象一直吸引了国内外大各大小组的兴趣. 有趣的是许多系统中粒子的动力学都可以由相对论波方程来描述, 如石墨烯中的电子^[9,10], 囚禁的离子^[11,12], 光晶格中的超冷原子^[13-15]以及光诱导规范场^[16,17]等. 最近石墨烯的实验^[10]证实了存在Klein隧穿的迹象. 然而, 凝聚态系统由于其内部杂质和相互作用的干扰, 很难实现完整的弹道散射过程. 且由于石墨烯是二维结构, 很难准确的观测一个方向上的Klein隧穿. 就在最近冷原子领域中提出了利用SOC BEC来观测Klein隧穿的一维方案^[18], 为Klein隧穿的观测带来了新的希望.

尖端势垒能够很好的描述半束缚态和短程势, 且实验上比较容易实现^[19-21], 有着其独特的研究价值, 因而也常被用于研究Dirac方程的散射问题. 而对于冷原子中散射问题的研究, 以往大部分工作都着眼于非相对论的情况, 而对于相对论Dirac粒子的研究也仅局限于方势垒^[22-25]以及高斯型势垒^[18]. BEC中的尖端势垒的散射还未被研究过, 本文重点研究了这一问题. 由于Klein隧穿是一个在势垒中与正反粒子产生有关的相对论现象, 我们

* 国家重点基础研究发展计划(973计划)(批准号: 2011CB921503)和国家自然科学基金(批准号: 11075020, 91021021)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: huicao.huicao@gmail.com

所研究的自旋轨道耦合BEC,可以在散射过程中,模拟反BEC^[18].在下文中,我们首先给出了理论模型,说明了如何利用SOC BEC来实现一维Dirac方程.然后利用时间劈裂谱方法对尖端势垒的散射过程进行了数值模拟.最后,我们讨论了原子相互作用对尖端势垒散射过程的影响.

2 理论模型

按照文献^[18]的方法,可以运用自旋轨道耦合BEC来模拟一维Dirac方程.在此我们简述其过程如下.考虑一团超冷玻色原子处在 y - z 平面内运动,每个原子质量为 m ,具有两个低能态 $|1\rangle, |2\rangle$ 和一个高激发态 $|3\rangle$,形成 Λ 形的三能级结构.每个原子的哈密顿量可以描述为

$$H = \frac{P^2}{2m} + V(\mathbf{r}) + H_1,$$

其中

$$V(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^3 [V_t(\mathbf{r}) + V_b(\mathbf{r})] |j\rangle \langle j|$$

表示总的外势(包括囚禁势 $V_t(\mathbf{r})$ 和散射势 $V_b(\mathbf{r})$),

$$H_1 = \hbar\Delta |3\rangle \langle 3| - \left(\sum_{j=1}^2 \hbar\Omega_j |3\rangle \langle j| + \text{H.c.} \right)$$

是相互作用哈密顿量, Δ 是失谐. H_1 可以通过一对激光来实现 $|1\rangle \leftrightarrow |3\rangle$ 跃迁的拉比频率 $\Omega_1 = \Omega \cos(\kappa_y y) \exp(-i\kappa_z z)$ 和 $|2\rangle \leftrightarrow |3\rangle$ 跃迁的拉比频率 $\Omega_2 = \Omega \sin(\kappa_y y) \exp[i(\pi - \kappa_z z)]$,这里 $\Omega = \sqrt{|\Omega_1|^2 + |\Omega_2|^2}$.把 H_1 对角化可得能量本征值 $\hbar\{\Delta - \sqrt{\Delta^2 + 4\Omega^2}/2, 0, [\Delta + \sqrt{\Delta^2 + 4\Omega^2}]/2\}$.大失谐时,前两个本征值接近相等,且远离另一个本征值,此时系统可以看作是包含自旋轨道耦合的赝自旋 $1/2$ 系统,其哈密顿量为

$$H = \frac{p_y^2 + p_z^2}{2m} + v_y \sigma_y p_y + v_z \sigma_z p_z + \gamma_z \sigma_z + V_t + V_b,$$

其中

$$v_y = \frac{\hbar\kappa_y}{m}, \quad v_z = \frac{\hbar\kappa_z \Omega^2}{2m\Delta^2},$$

$$\gamma_z = \frac{\hbar^2 \Omega^2}{4m\Delta^2} \left[\kappa_y^2 - \left(1 + \frac{\Omega^2}{\Delta^2}\right) \kappa_z^2 \right] + \frac{\hbar\Omega^2}{2\Delta}.$$

在 $p_y \ll \hbar\kappa_y$ 时, p_y^2 项可以忽略.谐振势 V_t 仅提供一个极弱的束缚,也可忽略不计.于是,可得到沿 y 轴方向一维非线性Dirac方程^[18]

$$i\hbar\partial_t \Psi = H_{\text{ND}} \Psi, \quad (1)$$

其中 $H_{\text{ND}} = -i\hbar v_y \sigma_y \partial_y + \gamma_z \sigma_z + g_0 |\Psi|^2 + V_b$, v_y 是 y 轴方向的有效光速, γ_z 是超冷原子的有效静质量. $g_0 = 2\hbar a_s N / (ml_{\perp}^2)$ 是原子相互作用,其中 N 是原子数, a_s 代表 s 波散射长度, l_{\perp} 是垂直方向上谐振势的振子长度在实验上 v_y, γ_z, g_0 都是可调参数.方程可利用如下参数进行无量纲化:

$$t \sim \frac{\gamma_z}{\hbar} t, \quad y \sim \frac{\gamma_z}{\hbar v_y} t, \quad \Psi \sim \sqrt{\frac{\hbar v_y}{N \gamma_z}} \Psi.$$

于是,我们得到了无量纲的一维非线性Dirac方程

$$i\partial_t \Psi = (-i\sigma_y \partial_y + \sigma_z + g |\Psi|^2 + V_B) \Psi, \quad (2)$$

这里 $V_B = V_b/\gamma_z$, $g = \frac{N}{\hbar v_y} g_0$ 分别是无量纲化后的势垒中心高度和原子两体相互作用系数,后者实验上可通过Feshbach共振技术进行调节.尖端势垒形式如下:

$$V_B(y) = V e^{-\frac{|y-y_0|}{\delta}}, \quad (3)$$

其中 δ 和 V 分别表示尖端势垒的宽度和中心高度, y_0 是势垒的中心位置.

3 主要结果

我们取如下高斯型波函数作为初始状态代入方程(2)进行数值模拟,

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{l_0 \sqrt{\pi}}} e^{ik_0 y} e^{-\frac{(y-d)^2}{2l_0^2}} \begin{pmatrix} i \cos(\xi) \\ -\sin(\xi) \end{pmatrix},$$

其中 $\xi = -\frac{1}{2} \arctan(k_0)$.初始波包宽度 $l_0 = 5$,中心位置 $d = -20$,波数 $k_0 = 4$.

3.1 $g = 0$ 的情况

当不考虑原子间相互作用(即 $g = 0$)时,运用时间劈裂谱方法直接求解方程(2).图1中给出了高斯型势垒 $V_B(y) = V e^{-\frac{(y-y_0)^2}{\delta^2}}$ 及尖端势垒 $V_B(y) = V e^{-\frac{|y-y_0|}{\delta}}$ 的散射过程的数值模拟结果,这里势垒的宽度均取固定值 $\delta = 2$,势垒中心位置 $y_0 = 0$.由图1(a)可知,尖端势垒与高斯势垒散射都会出现Klein隧穿现象.而且尖端势垒的Klein阻塞(Dirac粒子无法穿透的区域称之为Klein阻塞区域^[7])和隧穿区域相对于高斯势垒明显向较高势垒方向(即大 V 方向)移动.

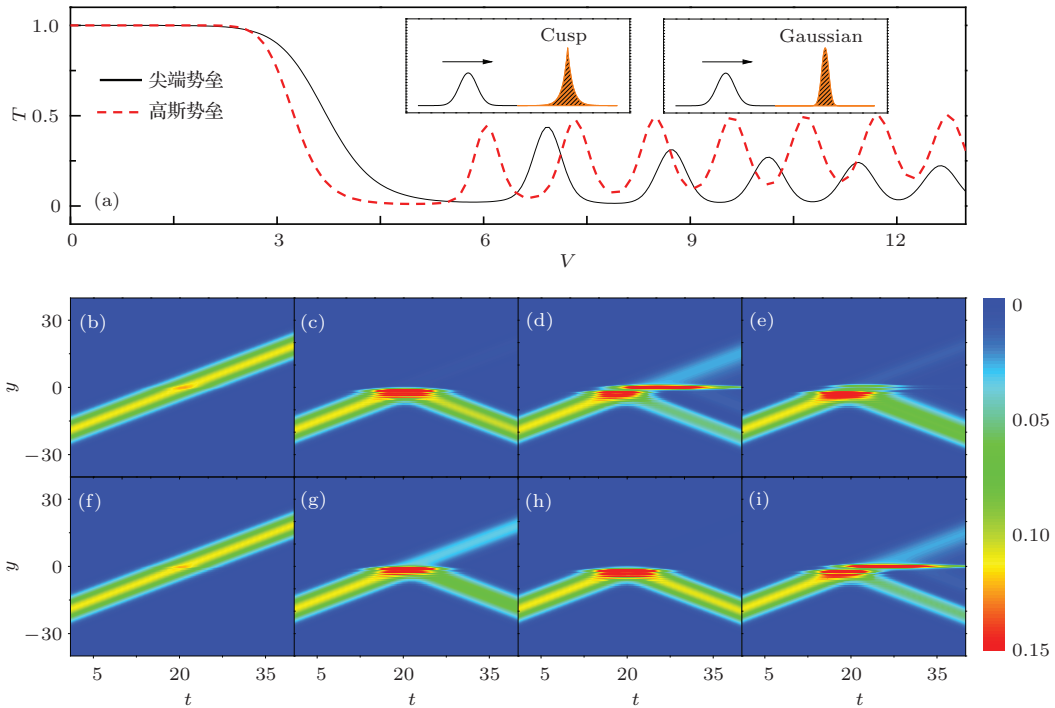


图1 (网刊彩色) (a) 高斯和尖端势垒散射的透射系数 T 随着势垒中心高度 V 的变化 ($g = 0$); (b)—(e) 分别对应 $V = 2, 4, 6, 7$ 时, 高斯势垒散射过程中波包的时间演化; (f)—(i) 分别对应 $V = 2, 4, 6, 7$ 时, 尖端势垒散射过程中波包的时间演化

如图1所示, 高斯型势垒在大约 $3.75 < V < 5.75$ 出现 Klein 阻塞现象, 而尖端势垒在大约 $4.5 < V < 6.5$ 出现 Klein 阻塞现象. 在 Klein 隧穿区域, 尖端势垒和高斯势垒散射的透射系数均随势垒高度振荡. 不同的是, 高斯势垒的透射系数会振荡增大, 而尖端势垒的透射系数会振荡减小. 而且, 高斯势垒透射系数的振幅几乎不变, 但尖端势垒透射系数的振幅逐渐减小. 这是由于尖端势与高斯势的表面结构不同, 从而散射过程中其表面产生正反粒子的数量也不同, 导致进入势垒内部的反粒子数量也不同, 从而使得穿透势垒的粒子数量有明显不同. 由尖端势散射隧穿率的趋势, 可知在遭遇更高势垒时, 尖端势垒散射的透射系数会远远低于其他势垒形式, 这可能为囚禁 Dirac 粒子提供可行的实验手段.

在图1中, 我们也给出了凝聚体分布 $|\Psi|^2$ 的时间演化. 在 $V = 2$ 时(图1(b), (f)), 凝聚体几乎能完全通过两种势垒. 随着势垒高度增加(图1(c), (d); (g), (h)), 高斯势垒散射中的凝聚体先出现被完全反射的现象(图1(c)), 即先进入了 Klein 阻塞区域, 同样的, 高斯势垒散射过程也会先进入 Klein 隧穿区域(图1(d)), 此时尖端势垒散射过程仍处在阻塞区域(图1(h)). 继续增大势垒高度, 尖端势垒散射过程才能进入 Klein 隧穿区域(图1(i)).

3.2 $g \neq 0$ 的情况

下面我们对尖端势垒散射问题中 $g \neq 0$ 的情况进行研究. 图2展示了原子相互作用对于透射系数的影响.

如图2(a)所示, 在相互作用较弱 ($g = 0.2$) 时, 势垒的散射过程与无相互作用时基本相同. 随着相互作用的增大 ($g = 0.5, 1$), 透射系数在 Klein 隧穿区域振幅明显减小. 当相互作用较强时(图2(b)), 透射系数不再有清楚分界的经典透射, Klein 阻塞和 Klein 隧穿三个区域. 随着相互作用的增大, 经典透射区域和 Klein 阻塞区域明显随之变窄, 而且在 Klein 隧穿区域透射系数的周期性逐渐被破坏.

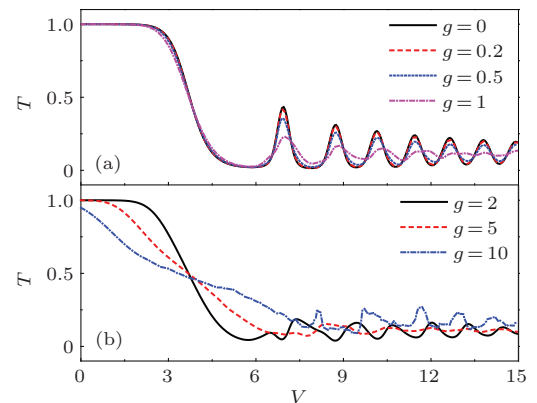


图2 (网刊彩色) $g \neq 0$ 时, 尖端势垒散射的透射系数 T 随着势垒高度 V 的变化 (a) 中原子间相互作用较弱; (b) 中原子相互作用较强

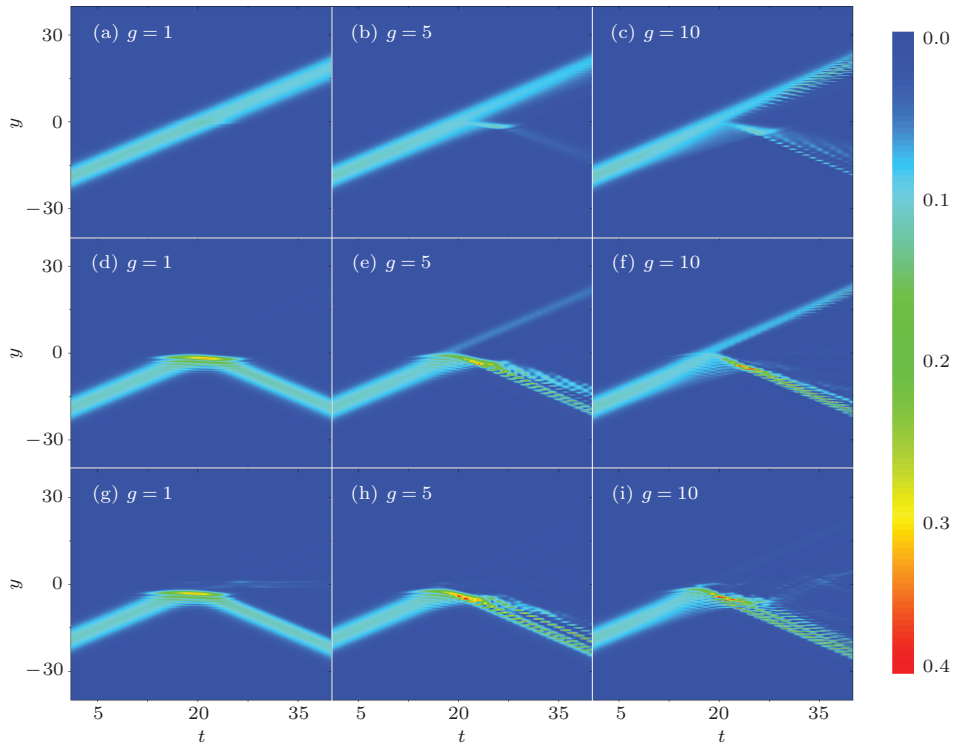


图3 (网刊彩色) 尖端势垒散射在 $g \neq 0$ 时, 经典透射 ((a)—(c), $V = 2$), Klein 阻塞 ((d)—(f), $V = 5$) 以及 Klein 隧穿 ((g)—(i), $V = 10$) 区域的凝聚体分布 $|\Psi|^2$ 随时间的变化

图3给出了 $g = 1, 5, 10$ 时, 凝聚体的分布 $|\Psi|^2$ 在经典透射、Klein 阻塞和 Klein 隧穿区域内随着时间的演化. 这里我们选取势垒高度 $V = 2$ (图3(a)—(c)), $V = 5$ (图3(d)—(f)), $V = 10$ (图3(g)—(i)), 分别对应图2中三个不同区域. 显然, 在原经典透射区域, 非线性相互作用使得原本可以完全通过势垒区域的原子(图2(a)), 有部分会被势垒阻挡反射回来(图2(b, c)). 在原 Klein 阻塞区域, 较强的原子相互作用会使得原先无法穿透势垒的原子(图2(d)), 可以部分穿透势垒(图2(e), (f)). 在 Klein 隧穿区域, 原子始终维持一个比较小的透射概率, 而凝聚体的结构明显被破坏, 产生了多个具有不同能量的小的凝聚体.

4 结 论

通过数值模拟研究了自旋轨道耦合玻色-爱因斯坦凝聚体经过尖端势垒散射的过程, 发现过程中存在 Klein 隧穿现象. 与高斯势垒散射相比, 在势垒高度相对较高时, 尖端势垒散射才能出现 Klein 阻塞和 Klein 隧穿现象. 在 Klein 隧穿区域, 尖端势垒的透射系数随着势垒高度的增加而振荡下降. 这是由于在粒子入射时, 尖端势垒的表面产生正反 BEC 对的数量与高斯势垒的情况不同, 进入势垒

内部的反-BEC 数量也就不同, 从而导致了隧穿粒子数量的不同. 此外, 我们还研究了原子相互作用对散射过程的影响. 发现在原来的经典透射区域, 凝聚体会被部分反射, 而在原来的 Klein 阻塞区域凝聚体能被部分透射在原来的 Klein 隧穿区域, 原子弱的相互作用会减小透射系数振荡的幅度, 而较强的相互作用会彻底破坏了透射系数振荡的周期性. 由于尖端势垒的透射系数会震荡下降, 因此, 我们认为实验上可以利用势垒高度较高的尖端势垒来做囚禁 Dirac 粒子的势阱壁, 从而尽可能的避免 Klein 隧穿导致粒子损失. 希望不久的将来能够在实验上观测到我们所预言的结果.

本文是在刘杰研究员的悉心指导下完成, 特此表示衷心的感谢.

参考文献

- [1] Kato Y K, Myers R C, Gossard A C, Awschalom D D 2004 *Science* **306** 1910
- [2] Koning M, Wiedmann S, Bruene C, Roth A, Buhmann H, Molenkamp L W, Qi X L, Zhang S C 2007 *Science* **318** 766
- [3] Kane C L, Mele E J 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 146802
Bernevig B A, Hughes T L, Zhang S C 2006 *Science* **314**

- 1757
Hsieh D, Qian D, Xia Y, Hor Y S, Cava R J, Hasan M Z 2008 *Nature* **452** 970
- [4] Stanescu T D, Anderson B, Galitski V 2008 *Phys. Rev. A* **78** 023616
- [5] Lin Y-J, Jimenez-Garcia K, Spielman I B 2010 *Nature* **471** 83
- [6] Wang C J, Gao C, Jian C M, Zhai H 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 160403
- [7] Dombey N, Calogeracos A 1999 *Phys. Rep.* **315** 41
- [8] Klein O 1929 *Z. Phys.* **53** 157
- [9] Katsnelson M I, Novoselov K S, Geim A K 2006 *Nature Physics* **2** 620
Jakubsky V, Nieto L M, and Plyushchay S 2011 *Phys. Rev. D* **83** 047702
- [10] Stander N, Huard B, Goldhaber-Gordon D 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 026807
Young A F, Kim P 2009 *Nature Phys.* **5** 222
- [11] Lamata L, Leon J, Schatz T, Solano E 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 253005
- [12] 2010 *Nature* **463** 68
- [13] Zhu S L, Wang B, Duan L M 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 260402
- [14] Satija I I, Dakin D C, Vaishnav J Y, Clark C W 2008 *Phys. Rev. A* **77** 043410
- [15] Chamon C, Hou C Y, Jackiw R, Mudry C, Pi S Y, Semeno G 2008 *Phys. Rev. B* **77** 235431
- [16] Ruseckas J, Juzeliunas G, Fleischhauer M 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 010404
- [17] Zhu S L, Fu H, Wu C J, Zhang S C, Duan L M 2006 *Phys. Rev. Lett.* **97** 240401
- [18] Zhang D W, Xue Z Y, Yan H, Wang Z D, Zhu S L 2012 *Phys. Rev. A* **85** 013628
- [19] Villalba V M, Greiner W 2003 *Phys. Rev. A* **67** 052707
- [20] Villalba V M, W, Rojas C 2007 *Phys. Lett. A* **362** 21
- [21] Jiang Y, Dong S H, Antillón A, Lozada-Cassou M 2006 *Eur. Phys. J. C* **45** 525
- [22] Li Z, Wang J Z, Fu L B 2013 *Chin. Phys. Lett.* **30** 010301
- [23] Li Z 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 100306
- [24] Wang S X, Li Z W, Liu J J, Li Y X 2011 *Chin. Phys. B* **20** 077305
- [25] Deng W Y, Zhu R, Xiao Y C, Deng W J 2014 *Chin. Phys. B* **23** 017202

Klein tunneling in spin-orbit coupled Bose-Einstein condensate scattered by cusp barrier*

Li Zhi¹⁾ Cao Hui^{2)†}

1) (Department of physics, Beijing Institute of technology, Beijing 100081, China)

2) (National Laboratory of Science and Technology on Computational Physics, Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing 100088, China)

(Received 31 December 2013; revised manuscript received 16 February 2014)

Abstract

The scattering process when spin-orbit coupled Bose-Einstein condensate gets through cusp barrier is numerically simulated by adopting time-split spectrum method; the Klein tunneling phenomena exist in the scattering process. The regions of Klein block and Klein tunneling will appear at higher barrier height as compared to the scattering process on getting through Gaussian barrier. In the Klein tunneling region, the transmission coefficient oscillates with the barrier height, and the oscillation amplitude decreases with increasing barrier height. Besides, the effect of non-linear atomic interaction has been discussed for different barrier heights as well.

Keywords: spin-orbit coupling, Klein tunneling, cusp barrier scattering, Bose-Einstein condensate

PACS: 03.75.Lm, 03.65.Nk, 67.85.Fg

DOI: 10.7498/aps.63.110306

* Project supported by the National Basic Research Program of China (Grant No. 2011CB921503), and the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11075020, 91021021).

† Corresponding author. E-mail: huicao.huicao@gmail.com