考虑前后车效应的反馈控制跟驰模型*

葛红霞1) 崔煜2) 程荣军3)†

1) (宁波大学海运学院, 宁波 315211)

2) (宁波大学理学院, 宁波 315211)

3) (浙江大学宁波理工学院, 宁波 315200)

(2014 年 1 月 14 日收到; 2014 年 2 月 11 日收到修改稿)

本文中, 在优化速度模型的基础上, 提出一个计及跟随车与当前车车头间距的跟驰模型. 从控制论角度出发, 对模型进行稳定性分析, 得到了模型的稳定性条件. 同时, 在新模型中引入了反馈控制信息, 考虑当前车与前后方车辆之间的速度差. 对模型进行线性分析后得到小扰动不会导致交通堵塞的条件. 在开放边界条件下, 对两个模型进行数值模拟, 结果表明在控制信号下, 车辆速度波动明显减小, 拥堵现象得到有效缓解. 从而证实反馈控制信号对缓解交通拥堵的重要作用.

关键词: 交通流, 跟驰模型, 反馈控制理论

PACS: 05.70.Fh, 05.45.–a, 05.70.JK **DOI:** 10.7498/aps.63.110504

1 引 言

交通问题一直受到广泛关注, 为了解释各种交通现象的本质, 学者们提出各种交通流模型[1−9]. 1995 年, Bando 等[10] 提出了模拟实际交通流中交通失稳、拥堵演化、时走时停等交通流现象的优化速度跟驰模型 (OVM), Helbing 和 Tilc 利用实测数据对 OVM 模型进行辨识, 结果显示会产生过高的加速度以及不切实际的减速度, 并可能出现撞车. 为此, Helbing 等提出了广义力模型[11]. 基于此, Jiang 等虑及前车速度相对跟驰车速度大的情形, 提出了全速差模型[12]. 薛郁等[13,14] 在 OVM 的基础上, 考虑相对速度对车辆加速度的影响, 提出具有相对速度的优化函数跟驰模型, 利用线性稳定性理论分析, 得到了车流的稳定性判断依据. Ge 等[15,16] 基于智能交通系统的应用, 提出了合作驾驶车辆跟驰模型, 考虑前方任意车对交通流演化的影响. 上述模型重点在于通过线性稳定性分析得到中性稳定曲线及临界点, 在此基础上, 通过约化摄动法进行非线性分析, 得到描述交通堵塞的各种密度波方程.

耦合映射 (CM) 跟驰模型对抑制交通拥堵有着至关重要的作用. 近年来, 关于用控制方法研究耦合映射交通流模型, 国内外学者做出了较多的研究[16−21]. Konishi 等[16] 用分散反馈控制延时方法抑制交通拥堵. Zhao 等对 OVM 进行了推广, 并且引入了一个反馈控制项, 得到了反馈控制耦合映射跟驰模型 (OVFCM)[17], Shen 等[19] 提出了考虑双速度差效应的耦合映射跟驰模型, Ge 等[20] 提出了一个考虑前方两辆车及当前车车头间距的耦合映射跟驰模型.

耦合映射跟驰模型是对跟驰模型空间进行离散而来, 在交通流领域, 跟驰模型占有举足轻重的地位. 2012 年, Ge 等[21] 针对 Bando 的跟驰模型, 从控制论角度进行分析, 并引入前方速度差作为反馈控制因子, 探讨加入该反馈控制信号对缓解交通流的作用. 同年, Ge 等[22] 又考虑了侧方非动车道上的影响, 提出新的控制理论跟驰模型. 截至目前, 利用控制理论去研究跟驰模型的稳定性的研究还

* 国家自然科学基金 (批准号: 11372166, 61074142)、浙江省自然科学基金 (批准号: LY13A010005)、宁波市学科项目 (批准号: SZXL1067) 和宁波大学王宽诚幸福基金资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: chengrongjun@nit.edu.cn

 http://wulixb.iphy.ac.cn

相对较少. 本文将从跟驰模型出发, 在智能交通系统下, 考虑前后临近车辆对当前车速度的影响, 并结合控制理论进行稳定性研究. 同时, 在模型中引入反馈控制因子, 研究加入控制信号后模型的稳定性.

2 模型与稳定性分析

2006年, 我们在跟驰模型中考虑了后车效应[23], Jia等提出考虑后车的Honk效应[24]. 众所周知, 后方最近邻车辆对当前车有一定的催促作用, 为了避免碰撞, 当前车也会关注后方最近邻车辆与自身的车距. 鉴于此, 我们给出推广的跟驰模型, 该模型中的优化速度(OV)函数既依赖于与前车之间的车头间距, 也依赖于与后车之间的车头间距. 这与之前提出的跟驰模型不同之处在于该模型是一个非线性微分方程.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}v_n(t)}{\mathrm{d}t} &= a\{V^{\mathrm{op}}(y_n(t), y_{n+1}(t)) - v_n(t)\},\\
\frac{\mathrm{d}y_n(t)}{\mathrm{d}t} &= v_{n-1}(t) - v_n(t),\\
\frac{\mathrm{d}y_{n+1}(t)}{\mathrm{d}t} &= v_n(t) - v_{n+1}(t),\\
&(n = 1, 2, \cdots, N),
\end{aligned} \tag{1}$$

其中$a > 0$是司机的敏感系数, $v_n(t)$是在时刻t时第n辆车的速度, $v_{n-1}(t)$是在时刻t时第$n-1$辆车的速度, $v_{n+1}(t)$是在时刻t时第$n+1$辆车的速度, $y_n(t)$表示在时刻t时第$(n-1)$辆车与第n辆车之间的车头间距, $y_{n+1}(t)$表示在时刻t时第$(n+1)$辆车与第n辆车的车头间距, $V^{\mathrm{op}}(y_n(t), y_{n+1}(t))$是修正后的OV函数, 它的大小取决于$y_n(t)$和$y_{n-1}(t)$. $V(\cdot)$具体定义如下:

$$\begin{aligned}
&V^{\mathrm{op}}(y_n(t), y_{n+1}(t)) = V^{\mathrm{op}}(\bar{y}(t))\\
&= \tanh(\bar{y}(t) - h^{\mathrm{d}}) + \tanh(h^{\mathrm{d}}),
\end{aligned} \tag{2}$$

其中$\bar{y}(t) = \alpha_1 y_n(t) + \alpha_2 y_{n+1}(t)$是两车间的平均距离, α_1 和α_2是$y_n(t)$和$y_{n+1}(t)$的加权系数, 并且$\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, h^{d} 是理想的车头间距.

除此之外, 我们假设所有车辆的理想速度为v^*, 理想的车头间距为y^*. 因此, 交通系统的理想状态可以写成如下形式:

$$(v, y) = (v^*,\ y^*)^T. \tag{3}$$

为了得到稳定性条件, 我们给处于稳定状态的系统(3)加上一个小扰动, 则系统的线性化动力学方程可以描述成

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}v_n^{\mathrm{o}}(t)}{\mathrm{d}t} &= a(\varLambda_1 y_n^{\mathrm{o}}(t) + \varLambda_2 y_{n+1}^{\mathrm{o}}(t) - v_n^{\mathrm{o}}(t)),\\
\frac{\mathrm{d}y_n^{\mathrm{o}}(t)}{\mathrm{d}t} &= v_{n-1}^{\mathrm{o}}(t) - v_n^{\mathrm{o}}(t),\\
\frac{\mathrm{d}y_{n+1}^{\mathrm{o}}(t)}{\mathrm{d}t} &= v_n^{\mathrm{o}}(t) - v_{n+1}^{\mathrm{o}}(t),\\
&(n = 1, 2, \cdots, N),
\end{aligned} \tag{4}$$

其中

$$\begin{aligned}
\varLambda_1 &= \frac{\partial V^{\mathrm{op}}(y_n(t), y_{n+1}(t))}{\partial y_n(t)}\Big|_{y_n(t)=y^*},\\
\varLambda_2 &= \frac{\partial V^{\mathrm{op}}(y_n(t), y_{n+1}(t))}{\partial y_{n+1}(t)}\Big|_{y_{n+1}(t)=y^*},\\
v_n^{\mathrm{o}}(t) &= v_n(t) - v^*,\\
y_n^{\mathrm{o}}(t) &= y_n(t) - y^*
\end{aligned}$$

和

$$y_{n+1}^{\mathrm{o}}(t) = y_{n+1}(t) - y^*.$$

从控制论角度, 方程(4)所描述的动力系统可以写成线性非时变系统, 即

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{d}v_n^{\mathrm{o}}(t)}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}y_n^{\mathrm{o}}(t)}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}y_{n+1}^{\mathrm{o}}(t)}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} -a & a\varLambda_1 & a\varLambda_2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} v_n^{\mathrm{o}}(t) \\ y_n^{\mathrm{o}}(t) \\ y_{n+1}^{\mathrm{o}}(t) \end{pmatrix}\\
&+ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot v_{n-1}^{\mathrm{o}}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot v_{n+1}^{\mathrm{o}}(t).
\end{aligned} \tag{5}$$

通过拉普拉斯变换$L(\cdot)$, 可以得到

$$\begin{aligned}
&s \begin{pmatrix} V_n^{\mathrm{o}}(s) \\ Y_n^{\mathrm{o}}(s) \\ Y_{n+1}^{\mathrm{o}}(s) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} V_n^{\mathrm{o}}(0) \\ Y_n^{\mathrm{o}}(0) \\ Y_{n+1}^{\mathrm{o}}(0) \end{pmatrix}\\
&= M \cdot \begin{pmatrix} V_n^{\mathrm{o}}(s) \\ Y_n^{\mathrm{o}}(s) \\ Y_{n+1}^{\mathrm{o}}(s) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot V_{n-1}^{\mathrm{o}}(s)\\
&+ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot V_{n+1}^{\mathrm{o}}(s),
\end{aligned} \tag{6}$$

其中

$$M=\begin{pmatrix}-a & a\Lambda_1 & a\Lambda_2\\ -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$V_n^{\mathrm{o}}(s)=L(v_n^{\mathrm{o}}(t)),$$

$$Y_n^{\mathrm{o}}(s)=L(y_n^{\mathrm{o}}(t))$$

和

$$Y_{n+1}^{\mathrm{o}}(s)=L(y_{n+1}^{\mathrm{o}}(t)),$$

$L(\cdot)$ 是拉普拉斯变换. 从方程 (6) 中我们可以得到

$$\begin{aligned}V_n^{\mathrm{o}}(s)=&\alpha\cdot V_{n-1}^{\mathrm{o}}(s)+\beta\cdot V_{n-2}^{\mathrm{o}}(s)+\gamma\cdot Y_n^{\mathrm{o}}(0)\\&+\xi\cdot Y_{n-1}^{\mathrm{o}}(0)+\zeta\cdot V_n^{\mathrm{o}}(0),\end{aligned}\tag{7}$$

其中

$$\alpha=\gamma=\frac{a\Lambda_1}{s^2+as+a(\Lambda_1-\Lambda_2)},$$

$$\beta=-\frac{a\Lambda_2}{s^2+as+a(\Lambda_1-\Lambda_2)},$$

$$\xi=\frac{a\Lambda_2}{s^2+as+a(\Lambda_1-\Lambda_2)}$$

和 $\zeta=\dfrac{s}{s^2+as+a\Lambda_1}$.

$$V_n^{\mathrm{o}}(s)=G(s)\cdot V_{n-1}^{\mathrm{o}}(s),\tag{8}$$

其中转移函数 $G(s)=\dfrac{a(\Lambda_1-\Lambda_2)}{s^2+as+a(\Lambda_1-\Lambda_2)}$, 由此特征多项式 $d(s)=s^2+as+a(\Lambda_1-\Lambda_2)$.

显而易见, 要使系统稳定, 就要使特征多项式 $d(s)$ 稳定, 即 $\|G(s)\|_\infty\leqslant 1$, 交通拥堵不会发生. 当扰动往后传播时, 速度的波动会逐渐减小. 因而系统的稳定性条件是

$$a\geqslant 2(\Lambda_1-\Lambda_2).\tag{9}$$

引理 如果稳定性条件 (9) 满足, 那么交通系统不会发生拥堵: 相反, 如果稳定性条件不能满足, 系统将出现不稳定状态, 扰动会不断扩大, 最终导致交通拥堵的发生.

3 控制理论分析

为了缓解交通拥堵, 我们在改进的跟驰模型中引入控制项 $u_n(t)$, 即

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}v_n(t)}{\mathrm{d}t}=a\{V^{\mathrm{op}}(y_n(t),y_{n+1}(t))-v_n(t)\}+u_n(t),\\&\frac{\mathrm{d}y_n(t)}{\mathrm{d}t}=v_{n-1}(t)-v_n(t),\\&\frac{\mathrm{d}y_{n+1}(t)}{\mathrm{d}t}=v_n(t)-v_{n+1}(t),\\&(n=1,2,\cdots,N),\end{aligned}\tag{10}$$

其中 $u_n(t)$ 为

$$\begin{aligned}u_n(t)=&k_1(v_{n-1}(t)-v_n(t))\\&+k_2(v_n(t)-v_{n+1}(t)),\end{aligned}\tag{11}$$

该控制信号不仅考虑了与前车之间的速度差而且考虑了与后车之间的速度差, k_1 和 k_2 是反馈控制信号, 并且 $k_1+k_2=1$.

同样, 对上述系统加上一个小扰动, 则可以得到系统的线性化动力学方程如下:

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}v_n^{\mathrm{o}}(t)}{\mathrm{d}t}=a(\Lambda_1 y_n^{\mathrm{o}}(t)+\Lambda_2 y_{n+1}^{\mathrm{o}}(t)-v_n^{\mathrm{o}}(t))+u_n(t),\\&\frac{\mathrm{d}y_n^{\mathrm{o}}(t)}{\mathrm{d}t}=v_{n-1}^{\mathrm{o}}(t)-v_n^{\mathrm{o}}(t),\\&\frac{\mathrm{d}y_{n+1}^{\mathrm{o}}(t)}{\mathrm{d}t}=v_n^{\mathrm{o}}(t)-v_{n+1}^{\mathrm{o}}(t),\\&(n=1,2,\cdots,N),\end{aligned}\tag{12}$$

控制项可以写成

$$u_n(t)=k_1\cdot\frac{\mathrm{d}y_n^{\mathrm{o}}(t)}{\mathrm{d}t}+k_2\cdot\frac{\mathrm{d}y_{n+1}^{\mathrm{o}}(t)}{\mathrm{d}t}.\tag{13}$$

为了更方便的得到系统的稳定性, 我们使用矩阵形式表示方程组 (12), 即

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}\dfrac{\mathrm{d}v_n^{\mathrm{o}}(t)}{\mathrm{d}t}\\ \dfrac{\mathrm{d}y_n^{\mathrm{o}}(t)}{\mathrm{d}t}\\ \dfrac{\mathrm{d}y_{n+1}^{\mathrm{o}}(t)}{\mathrm{d}t}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-a & a\Lambda_1 & a\Lambda_2\\ -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_n^{\mathrm{o}}(t)\\ y_n^{\mathrm{o}}(t)\\ y_{n+1}^{\mathrm{o}}(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\cdot v_{n-1}^{\mathrm{o}}(t)\\&+\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}\cdot v_{n+1}^{\mathrm{o}}(t)+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\cdot u_n(t).\end{aligned}\tag{14}$$

通过拉普拉斯变换, 可以得到

$$\begin{aligned}&s\begin{pmatrix}V_n^{\mathrm{o}}(s)\\ Y_n^{\mathrm{o}}(s)\\ Y_{n+1}^{\mathrm{o}}(s)\end{pmatrix}\\&=M\cdot\begin{pmatrix}V_n^{\mathrm{o}}(s)\\ Y_n^{\mathrm{o}}(s)\\ Y_{n+1}^{\mathrm{o}}(s)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\cdot V_{n-1}^{\mathrm{o}}(s)\end{aligned}$$

$$+\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}\cdot V_{n+1}^{\mathrm{o}}(s)+\begin{pmatrix}V_n^{\mathrm{o}}(0)\\Y_n^{\mathrm{o}}(0)\\Y_{n+1}^{\mathrm{o}}(0)\end{pmatrix}$$
$$+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\cdot U_n^{\mathrm{o}}(s),\qquad(15)$$

其中

$$M=\begin{pmatrix}-a & a\varLambda_1 & a\varLambda_2\\-1 & 0 & 0\\1 & 0 & 0\end{pmatrix},$$
$$V_n^{\mathrm{o}}(s)=L(v_n^{\mathrm{o}}(t)),$$
$$Y_n^{\mathrm{o}}(s)=L(y_n^{\mathrm{o}}(t))$$

和 $U_n(s)=k_1sY_n^{\mathrm{o}}(s)+k_2sY_{n+1}^{\mathrm{o}}(s)$.

通过对方程(15)的求解, 可以得到下列关系式:

$$V_n^{\mathrm{o}}(s)=\mu\cdot V_{n-1}^{\mathrm{o}}(s)+\lambda\cdot V_{n+1}^{\mathrm{o}}(s)+\varphi\cdot Y_n^{\mathrm{o}}(0)+\psi\cdot Y_{n-1}^{\mathrm{o}}(0)+\phi\cdot V_n^{\mathrm{o}}(0),\qquad(16)$$
$$V_n^{\mathrm{o}}(s)=G^*(s)\cdot V_{n-1}^{\mathrm{o}}(s),\qquad(17)$$

其中转移函数

$$G^*(s)=\frac{(k_1-k_2)s+a(\varLambda_1-\varLambda_2)}{s^2+(a+k_1)s+a(\varLambda_1-\varLambda_2)},$$

特征多项式

$$d^*(s)=s^2+(a+k_1)s+a(\varLambda_1-\varLambda_2),$$
$$\mu=\varphi=\frac{k_1s+a\varLambda_1}{a+k_1)s+a(\varLambda_1-\varLambda_2)},$$
$$\lambda=-\frac{k_2s+a\varLambda_2}{a+k_1)s+a(\varLambda_1-\varLambda_2)},$$
$$\psi=\frac{k_1s+a\varLambda_1}{s^2+(a+k_1)s+a\varLambda_1},$$
$$\phi=\frac{s}{s^2+(a+k_1)s+a\varLambda_1}.$$

通过上述分析, 交通拥堵不会发生的必要条件是1)特征多项式 $d^*(s)$ 稳定; 2)转移函数 $\|G^*(s)\|_\infty\leqslant 1$.

首先为了使得 $d^*(s)$ 稳定, 根据Hurwitz稳定性定理, 由 $a+k_1-k_2>0$ 和 $\varLambda_1-\varLambda_2>0$, 可以很容易得出 $\varLambda_1-\varLambda_2>0$ 和 $a>0$. 此外, 由于OV函数的单调递增性, $a+k_1>k_2$, $d^*(s)$ 稳定的条件是 $k_1>-a$. 其次考虑 $\|G^*(s)\|_\infty\leqslant 1$, 以下推论见附录.

根据上述理论分析, 我们得到如下定理:

定理 如果反馈增益系数满足

$$k_1\geqslant\frac{\varLambda_1-\varLambda_2}{2}-\frac{a}{4}+\frac{1}{2},$$
$$k_2\leqslant\frac{1}{2}+\frac{a}{4}-\frac{\varLambda_1-\varLambda_2}{2}$$

并且 $k_1-k_2>-a$, 交通堵塞将不会发生.

4 数值模拟

在接近开放边界条件下对跟驰模型进行数值模拟, 模型中参数的取值为

$$v^*=20\ \mathrm{m/s},\ y^*=7.02\ \mathrm{m},$$
$$h^{\mathrm{d}}=1.7,\ a=2\ \mathrm{s}^{-1},\ N=120.$$

为了尽量保持与实际交通情况一致, 我们设定优化速度中 $a_1\geqslant 1.5$ 并且 $k_1\geqslant 0.5$. 在驾驶员实际行驶过程中, 前方车辆对驾驶员的影响程度远大于后方车辆所产生的影响, 因此, 我们令 $k_1=0.82$, $k_2=0.18$. 假设所有的车辆具有相同的参数, 且初始状态是稳定的, 初始位置和速度设置如下:

$$x_i(0)=\sum_{j=i+1}^{N}y_j^*,\quad y_i(0)=y_i^*,\quad v_i(0)=v_i^*,$$
$$i=1,2,\cdots,N.$$

在稳定状态下所有的车辆都以恒定的速度运行, 接下来我们让头车突然停止:

$$x_0(n)=0,\ \ 100\leqslant nT\leqslant 102.$$

考虑对交通系统产生的影响. 图1 (a)和(c)分别显示了在 $nT=90$ s改进的跟驰模型无控制系统与加上控制项后系统的时间-空间斑图, 横坐标定义为: $\tilde{x}_i(t)=x_1(t)-x_i(t),(i=1,2,\cdots,N)$, 它表示前车与跟随车之间的车头间距. 我们很容易发现在 $nT=90$ s的时刻, 头车突然停止, 对于图1 (a)无控制系统中速度波动明显的向后传播, 拥堵现象产生. 在图1 (c)中, 将控制信号加入到系统中, 车辆行驶顺畅, 没有明显的交通拥堵现象. 图1 (b)和(d)是对应于图1 (a)和(c)第1辆车, 第25辆车和第50辆车的瞬时速度图. 从图1 (b)中发现, 无控制交通系统的车辆发生了拥堵现象, 速度波动振幅没有明显缓解, 而图1 (d)中, 向后传播的速度波振幅明显减小.

下面我们考虑头车在四个不同时刻停止对交通系统产生的影响. $x_0(n)=0$, $nT=100$—103, 120—123, 140—143, 160—163. 其他的参数保持不变.

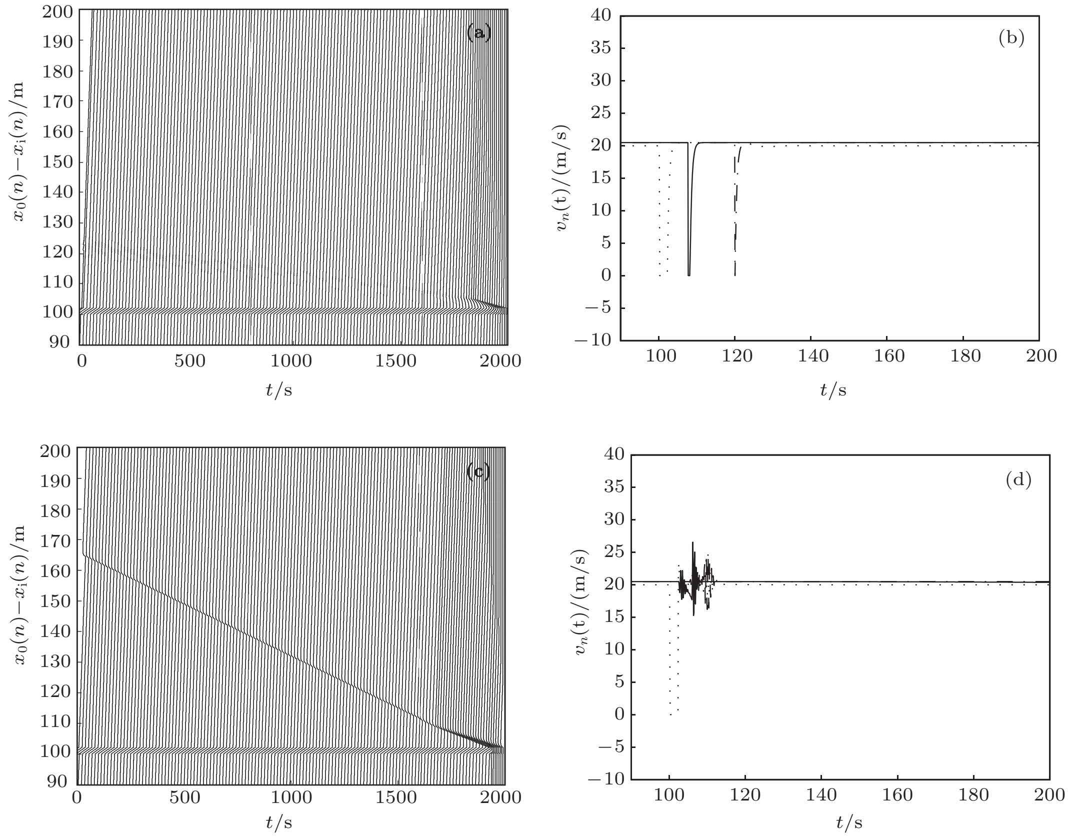

图 1　在 $nT = 90$ s 后的车辆时空图　(a) 是无控制条件下的时空图; (b) 是无控制条件下第 1 辆车, 第 25 辆和第 50 辆车的瞬时速度; (c) 是控制条件下的时空图; (d) 是控制条件下第 1 辆车, 第 25 辆和第 50 辆车的瞬时速度

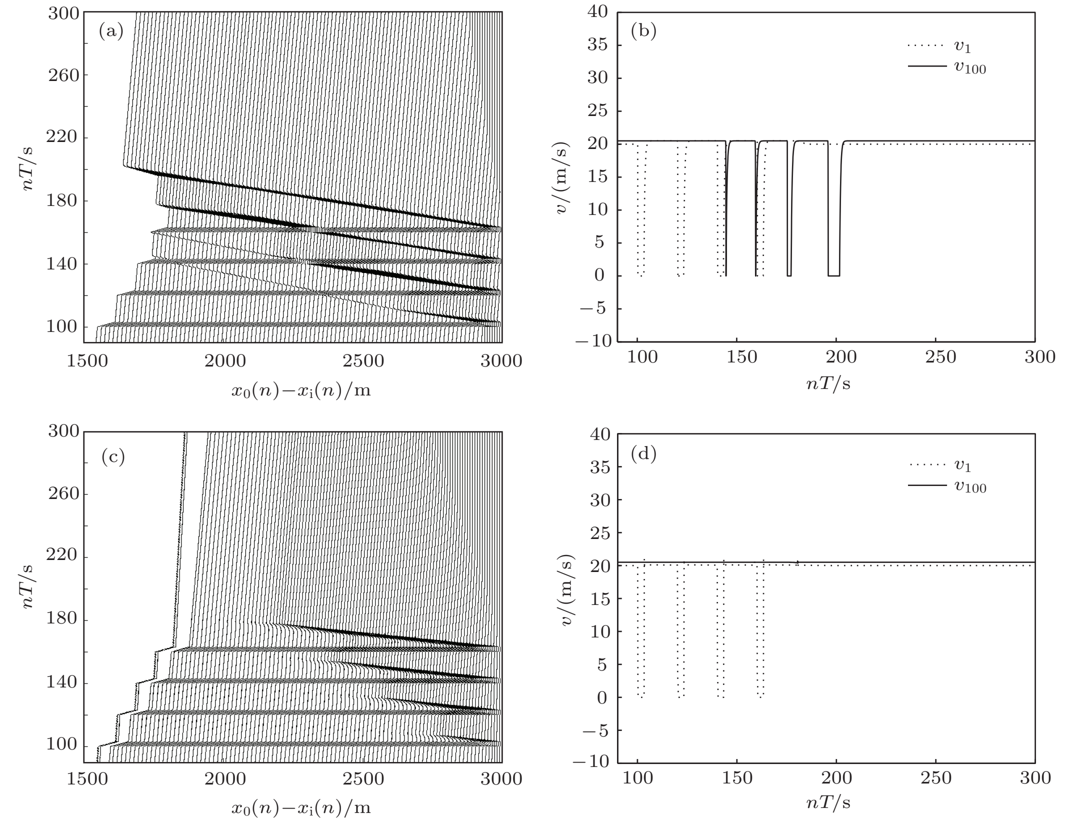

图 2　(a) 无控制系统时交通流的时空斑图; (c) 控制系统下交通流的时空斑图; (b), (d) 是对应于 (a), (c) 第 1 辆车和第 100 辆车的瞬时速度

比较图2 (c) 和 (d), 可以看到, 加上控制项后, 交通拥堵状况有了很大的缓解, 第100辆车的速度变化不明显, 说明头车的速度变化没有对整个交通流系统造成影响. 数值模拟充分说明, 引入的控制信号能够有效的抑制交通拥堵的产生.

5 结　论

本文中, 我们考虑前车和后车对于当前车速度的影响, 提出了新的跟驰模型. 不同于传统的级数展开的线性稳定性分析方法, 我们运用控制理论对该模型进行稳定性分析, 得到系统保持稳定的条件; 其次, 当系统加入反馈控制信号后, 我们得到与反馈参数有关的稳定性条件. 通过数值模拟表明, 加入控制信号后的系统稳定性增强, 车辆的速度波动明显平缓, 控制信号对缓解交通拥堵有着积极作用.

附录

$$
\begin{aligned}
\|G^*(s)\|_\infty &= \sup_{\omega\in[0,\infty)} |G^*(j\omega)| \leqslant 1,\\
|G^*(j\omega)| &= \sqrt{G^*(j\omega).G^*(-j\omega)}\\
&= \sqrt{\frac{[a(\Lambda_1-\Lambda_2)]^2+[(k_1-k_2)\omega]^2}{[a(\Lambda_1-\Lambda_2)-\omega^2]^2+[(a+k_1-k_2)\omega]^2}}\\
&\leqslant 1,\quad \omega\in[0,\infty).
\end{aligned}
$$

我们假设

$$
g(\omega)=\frac{[a(\Lambda_1-\Lambda_2]^2+[(k_1-k_2)\omega]^2}{[a(\Lambda_1-\Lambda_2)-\omega^2]^2+[(a+k_1-k_2)\omega]^2}.
$$

很明显 $g(0)=1$. 为了使 $g(\omega)\leqslant 1, \omega\in[0,\infty)$, 即

$$
\omega^2+a^2-2a(\Lambda_1-\Lambda_2)+2a(k_1-k_2)\geqslant 0. \qquad (A1)
$$

方程 (A1) 的必要条件是

$$
a^2-2a(\Lambda_1-\Lambda_2)+2a(k_1-k_2)\geqslant 0,
$$

我们可以得到

$$
k_1\geqslant\frac{\Lambda_1-\Lambda_2}{2}-\frac{a}{4}+\frac{1}{2}
$$

和

$$
k_2\leqslant\frac{1}{2}+\frac{a}{4}-\frac{\Lambda_1-\Lambda_2}{2},
$$

进而, 为了系统的稳定性, 我们还需要保证 (A1) 式右边 $V_n^0(0)$, $Y_n^0(0)$ 和 $Y_{n+1}^0(0)$ 系数的无穷模小于1, 不妨设:

$$
\begin{aligned}
T_2(s)&=\frac{k_1s+a\Lambda_1}{s^2+(a+k_1-k_2)s+a(\Lambda_1-\Lambda_2)},\\
T_3(s)&=\frac{k_2s+a\Lambda_2}{s^2+(a+k_1-k_2)s+a(\Lambda_1-\Lambda_2)},\\
T_4(s)&=\frac{s}{s^2+(a+k_1-k_2)s+a(\Lambda_1-\Lambda_2)}.
\end{aligned}
$$

如果条件 $k_1-k_2\geqslant\Lambda_1-\Lambda_2-\dfrac{a}{2}$ 满足, 可以很容易得到 $\|T_2(s)\|_\infty<1$, $\|T_3(s)\|_\infty<1$ 和 $\|T_4(s)\|_\infty<1$.

参考文献

[1] Xue Y 2004 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 25 (in Chinese) [薛郁 2004 物理学报 **53** 25]

[2] Tang T Q, Huang H J, Xue Y 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4026 (in Chinese) [唐铁桥, 黄海军, 薛郁 2006 物理学报 **55** 4026]

[3] Tang T Q, Huang H J, Shang H Y 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 6003 (in Chinese) [唐铁桥, 黄海军, 尚华艳 2010 物理学报 **59** 6003]

[4] Peng G H, Sun D H, He H P 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 7541 (in Chinese) [彭光含, 孙棣华, 何恒攀 2008 物理学报 **57** 7541]

[5] Peng G H, Sun D H 2009 *Chin. Phys. B* **18** 5420

[6] Li Z P, Liu Y C 2006 *Chin. Phys.* **15** 1570

[7] Tang T Q, Huang H J, Gao Z Y, Wong S C 2007 *Physica A* **380** 481

[8] Li Z P, Liu Y C 2006 *Chin. Phys.* **15** 1570

[9] Tian H H, Xue Y, Kan S J, Liang Y J 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 4506 (in Chinese) [田欢欢, 薛郁, 康三军, 梁玉娟 2009 物理学报 **58** 4506]

[10] Bando M, Hasebe K, Nakayama A 1995 *Phys. Rev. E* **51** 1035

[11] Helbing D, Tilch B 1998 *Phys. Rev. E* **58** 133

[12] Jiang R, Wu Q S, Zhu Z J 2001 *Phys. Rev. E* **64** 017101

[13] Xue Y, Dong L Y, Yuan Y W, Dai S Q 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 492 (in Chinese) [薛郁, 董力耘, 袁以武, 戴世强 2002 物理学报 **51** 492]

[14] Xue Y, Dong L Y, Yuan Y W, Dai S Q 2002 *Commun. Theor. Phys.* **38** 230

[15] Ge H X, Dai S Q, Dong L Y 2004 *Phys. Rev. E* **70** 066134

[16] Konishi K, Kokame H, Hirata K 1999 *Phys. Rev. E* **60** 4000

[17] Zhao X M, Gao Z Y 2006 *Physica A* **366** 513

[18] Han X L, Jiang C Y, Ge H X, Dai S Q 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 4383 (in Chinese) [韩祥临, 姜长元, 葛红霞, 戴世强 2007 物理学报 **56** 4383]

[19] Shen F Y, Ge H X, Zhang H, Yu H M, Lei L 2009 *Chin. Phys. B* **18** 4208

[20] Ge H X, Cheng R J, Li Z P 2011 *Chin. Phys. B* **20** 080508

[21] Ge H X, Yu J, Lo S M 2012 *Chin. Phys. Lett.* **29** 050502

[22] Ge H X, Meng X P, Ma J, Lo S M 2012 *Phys. Lett. A* **377** 9

[23] Ge H X, Zhu H B, Dai S Q 2006 *Eur. Phys. J. B* **54** 503

[24] Jia B, Jiang R, Wu Q S 2005 *Physica A* **348** 544

A car-following model with considering control signals from front and rear*

Ge Hong-Xia[1)] Cui Yu[2)] Cheng Rong-Jun[3)†]

1) (*Faculty of Maritime and Transportation, Ningbo University, Ningbo 315211, China*)

2) (*Faculty of Science, Ningbo University, Ningbo 315211, China*)

3) (*Department of Fundamental Course, Ningbo Institute of Technology, Zhejiang University, Ningbo 315200, China*)

(Received 14 January 2014; revised manuscript received 11 February 2014)

Abstract

A new control method to suppress traffic jams is proposed by considering headway of the front and rear. With the control signals or not the stability conditions are derived. It is shown that the vehicle speed fluctuation by the simulations disappears when the feedback control signals are introduced. Therefore, serious congestion will not occur in the system. Illustration shows that the feedback control signal can effectively suppress and alleviate the traffic congestion.

Keywords: traffic flow, car-following model, control method

PACS: 05.70.Fh, 05.45.–a, 05.70.JK **DOI:** 10.7498/aps.63.110504

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11372166, 61074142), the Scientific Research Fund of Zhejiang Provincial, China (Grant No.LY13A010005), Disciplinary Project of Ningbo, China (Grant No.SZXL1067), and the K.C. Wong Magna Fund in Ningbo University, China.

† Corresponding author. E-mail: chengrongjun@nit.edu.cn