

截面的几何形状决定三维函数的混沌特性

于万波[†]

(大连大学信息工程学院, 大连 116622)

(2014年1月4日收到; 2014年1月17日收到修改稿)

计算仿真发现, 函数 $f(x, y, z) = \sin(k(x^2 + y^2 + z^2))$, $f(x, y, z) = k(1 - (x^2 + y^2 + z^2)) e^{-(x+y+z+u)^2}$, $f(x, y, z) = k((x^2 + y^2 + z^2)/3)(1 - (x^2 + y^2 + z^2)/3)$ 分别与另外两个随机产生的二次多项式函数均可组合成一个三维离散动力系统, 当系数 k, u 在一定范围内取值时, 系统出现混沌吸引子的概率可以大于 90%. 通过绘制分岔图、Lyapunov 指数图等对上述系统的混沌特性进行了分析. 分析发现, 出现混沌概率高的原因是这 3 个函数的截面都是中间凸起或中间凹陷的曲面, 在这样的截面条件下系统容易出现混沌. 这普遍适用于三维函数, 利用这些三维离散动力系统绘制出的大量吸引子图形具有使用价值和研究价值.

关键词: 混沌, 动力系统, 三维函数

PACS: 05.45.-a

DOI: 10.7498/aps.63.120501

1 引言

混沌是目前学术界的研究热点问题之一^[1]. 关于线性迭代系统和非线性迭代系统的研究表明, 如果随机生成系数, 迭代出现混沌的概率很小^[2,3], 进而作为动力系统 (只有一个方程或者方程组) 进行迭代产生混沌的概率更小. 计算仿真显示: 由随机生成的 3 个二次多项式函数构成的离散动力系统很难产生混沌, 产生混沌的概率小于 0.00001; 随机生成两个二次多项式函数与一个高次多项式函数所构成的离散动力系统也很难出现混沌. 虽然存在 Marotto 定理^[4,5] 及其他混沌定义等判定方法, 并且这些混沌判定方法完整严密, 已经逐渐完善为混沌的研究标准, 但是这些方法有时无法应用于实际系统. 一个动力系统是否出现混沌, 目前缺少一般性的、简单实用的判定方法^[6]. 实际上, 微分系统等都可以近似地化为离散动力系统, 所以对离散动力系统的研究是重要的.

文献^[7—10] 研究发现, 函数图像几何形状与函数混沌特性有直接关系, 例如, 对于一维函数,

单位区域内标准曲线是 Li-Yorke 混沌的, 也是 Devaney 混沌的, 混沌有理贝赛尔曲线的控制点近似呈半圆形分布^[7]; 对于二维函数, 标准有理贝赛尔函数曲面与二维多项式函数曲面产生混沌的概率可能大于 0.1^[8]. 事实上, 我们发现二维正弦函数具有更好的混沌特性, 因为其截面曲线是一维混沌曲线的概率高, 所以当另一个二元函数随机生成时, 两者构成的动力系统出现混沌的概率可能大于 0.7^[9]. 在文献^[8] 中, 当绘制分岔图时出现了一个异常现象, 即文献^[8] 中图 6(b) 所示曲面比图 1(b) 所示曲面混沌程度高 (Lyapunov 指数大), 混沌参数的区间也比较大, 这是因为其边界处导数绝对值大, 截面曲线是一维混沌曲线的比较多, 只有边缘极少部分截面曲线不混沌, 虽然其单个截面曲线的混沌程度比图 1(b) 所示曲面的混沌程度要小, 但是整体看来, 图 6(b) 所示曲面的混沌程度高. 为了更清楚地说明, 图 1 给出了文献^[8] 中的这两张图. 文献^[10] 讨论了一元复合函数的混沌问题. 实际上, 复合函数的混沌特性与原来函数的几何形状有直接关系.

[†] 通讯作者. E-mail: yu_wb@126.com

基于上述研究结果, 本文把研究拓展到三维空间, 绘制并分析了三维正弦函数、三维小波函数和改进的三维 Logistic 映射函数的二维截面, 发现三种函数的二维截面都具有周期振荡特性. 这 3 种函数分别与随机生成的两个三维多项式函数均可组

合成一个动力系统, 给出了具体的实例, 并通过绘制分岔图和 Lyapunov 指数图等分析构成系统的混沌特性. 结果表明, 如果三维函数的二维截面具有周期振荡特性, 当它与其他随机函数组合成一个动力系统时, 系统出现混沌的概率很高.

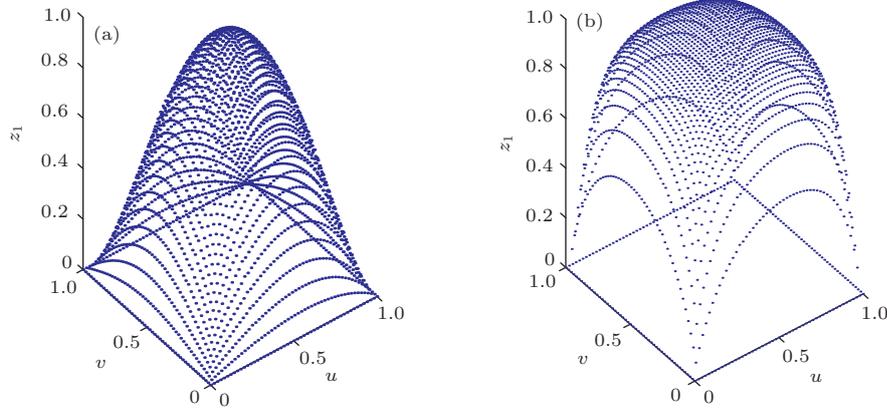


图 1 文献 [8] 中的两个曲面的对比 (a) 文献 [8] 的图 1 (b); (b) 文献 [8] 的图 6 (b)

2 三维函数与随机函数构成的动力系统分析

2.1 一个正弦函数与两个随机多项式函数构成的动力系统

三个函数构成一个三维动力系统, 其中一个为正弦函数, 另外两个是随机产生的多项式函数, 具体表达式如下:

$$f(x, y, z) = \sin(k(x^2 + y^2 + z^2)), \quad (1)$$

$$g(x, y, z) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4z + a_5x^2 + a_6y^2 + a_7z^2 + a_8xy + a_9yz + a_{10}xz, \quad (2)$$

$$h(x, y, z) = b_1 + b_2x + b_3y + b_4z + b_5x^2 + b_6y^2 + b_7z^2 + b_8xy + b_9yz + b_{10}xz. \quad (3)$$

2.1.1 正弦函数截面图

计算仿真发现, 当 $k > 3.14$ 时, 编写程序随机产生 100000 组多项式函数 (2), (3) 式, 每组均与三角函数 (1) 式构造一个系统. 对于每一个系统, 迭代 3000 次, 舍弃前 500 次, 然后计算 $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ 区域内的吸引子点数与区域内总点数的比值 (当迭代值之间的最小差值为 0.01 时, $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$

区域内总点数为 $10^2 \times 10^2 \times 10^2$), 该比值大于 0.001 时可认为系统出现混沌. 按照此方法统计, 所构成的系统出现混沌的概率大于 0.9. 出现混沌概率高的原因在于三角函数 (1) 式的二维横截面 (函数) 具有较好的混沌特性 [8,9]. 图 2 (a) 是当 $x = -1, -0.6, -0.2, 0.2, 0.6, 1$ 时得到的横截曲面的灰度图, 灰度深表示函数值比较小; 图 2 (b) 显示了与图 2 (a) 对应的截面曲面. 由三角函数 (1) 式的对称性可知, 对 y 或 z 作相同取值所得到的横截曲面与图 2 所示曲面相同.

下面随机生成两个三维多项式函数 $g(x, y, z)$ 和 $h(x, y, z)$, 相应的系数如表 1 所列. 随机生成系数后, 分别计算 $g(x, y, z)$ 和 $h(x, y, z)$ 的最大值 g_{\max}, h_{\max} 和最小值 g_{\min}, h_{\min} , 然后利用下式对 $g(x, y, z)$ 和 $h(x, y, z)$ 进行调整:

$$g_{\text{new}} = \frac{2(g - 0.5(g_{\max} + g_{\min}))}{g_{\max} - g_{\min}},$$

$$h_{\text{new}} = \frac{2(h - 0.5(h_{\max} + h_{\min}))}{h_{\max} - h_{\min}}, \quad (4)$$

从而将 $g(x, y, z)$ 和 $h(x, y, z)$ 的函数值均调整到 $-1-1$ 之间, 调整后函数的截面曲面及其灰度图如图 3 所示. 这两个三维多项式函数与三维正弦函数 (令 $k = 3.14159$) 构成一个动力系统, 迭代得到的吸引子图形如图 4 所示.

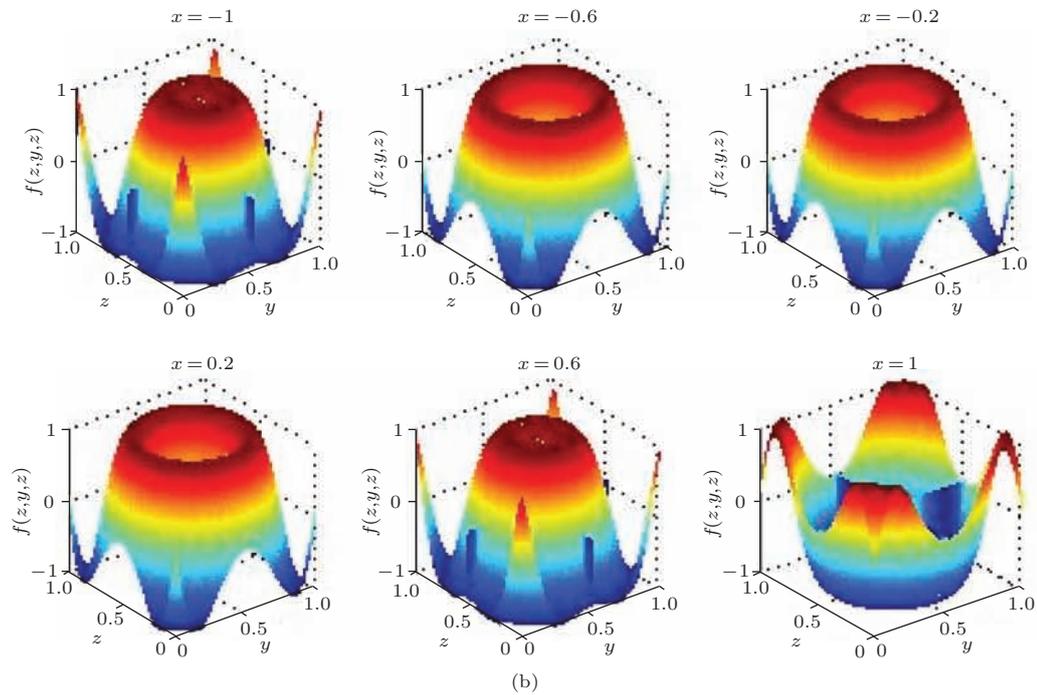
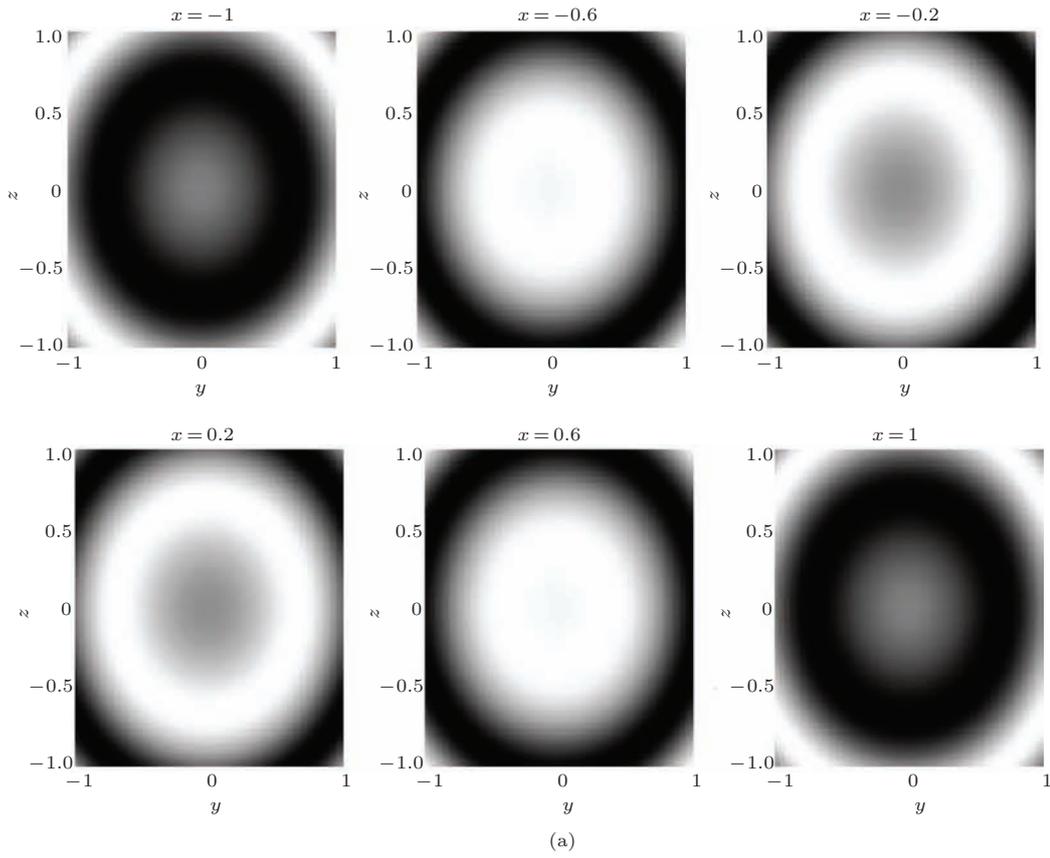


图2 (网刊彩色) 固定 x 值得到的三维正弦函数的横截面图 (a) 灰度图; (b) 与 (a) 对应的截面曲面

表1 随机生成的两个三维多项式函数的系数

a	0.1978	-0.0381	-0.4174	0.3207	-0.3070	-0.0546	-0.4870	-0.1913	0.3754	0.3353
b	0.3807	-0.0203	0.0608	0.1159	0.1619	0.1166	0.1851	0.0102	0.2140	0.0152

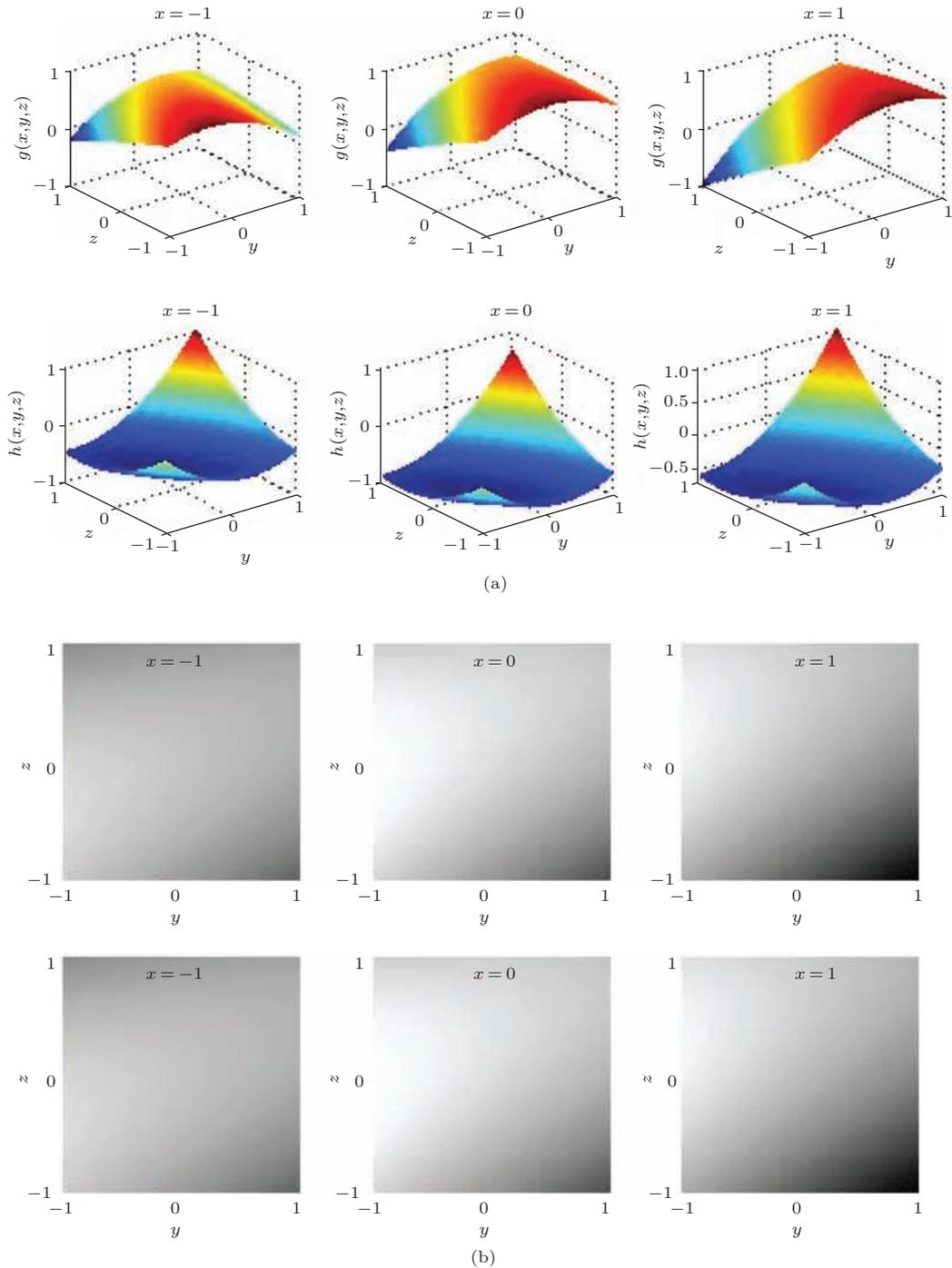


图3 (网刊彩色) 随机生成的两个三维多项式函数的截面曲面和灰度图 (a) $g(x, y, z)$; (b) $h(x, y, z)$

改变 k 值, 系统的吸引子图形会发生改变. 当 $k > 3$ 时, 三维正弦函数与随机生成的两个三维多项式函数构成的动力系统出现混沌吸引子的概率可达到 0.9. 为了进一步确认此系统的混沌特性, 下面研究其分岔图和 Lyapunov 指数图.

2.1.2 分岔图和 Lyapunov 指数图

随机生成的三维多项式函数 (2), (3) 式的系数 \mathbf{a} , \mathbf{b} 使用表 1 所列数据, (1) 式中 k 取值为

1—4, 步长为 0.002, 得到的 z 关于 k , y 的分岔图和 Lyapunov 指数图如图 5 和图 6 所示. 利用分岔图 (图 5) 可以得到动力系统出现混沌时参数 k 的取值范围. 观察图 6 所示的 Lyapunov 指数图可以看出, Lyapunov 指数图与分岔图相对应, 并且 Lyapunov 指数可以大于 10, 这与 k 值有关, 因为三维正弦函数求导后, 其关于 x 的偏导数为

$$f'_x(x, y, z) = 2kx(\cos(k(x^2 + y^2 + z^2))).$$

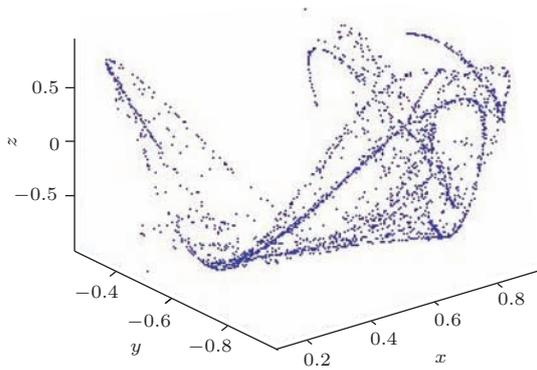


图4 三维正弦函数与随机生成的两个三维多项式函数构成的系统的三维吸引子

2.2 三维小波函数与两个随机多项式函数构成的动力系统

三维小波函数的具体表达式为

$$f(x, y, z) = k(1 - (x^2 + y^2 + z^2)) \times e^{-(x+y+z+u)^2}, \quad (5)$$

其截面灰度图如图7所示.

将(5)式与(2), (3)式组合成一个动力系统, (2), (3)式的系数 a, b 使用表1所列数据, k 的取值为1—2, 步长为0.015, u 的取值为-0.8—0.8, 步长为0.015, 此时得到系统的二维分岔图如图8(a)—(c)所示. 令 $k = 1.95, u = 0.3$, 得到的吸引子图如图8(d)所示.

对于此系统, 令 k 的取值为1—2, 步长为0.015, u 的取值为-0.8—0.8, 步长为0.015, 得到的系统三维Lyapunov指数图如图9所示. 从图8和图9可

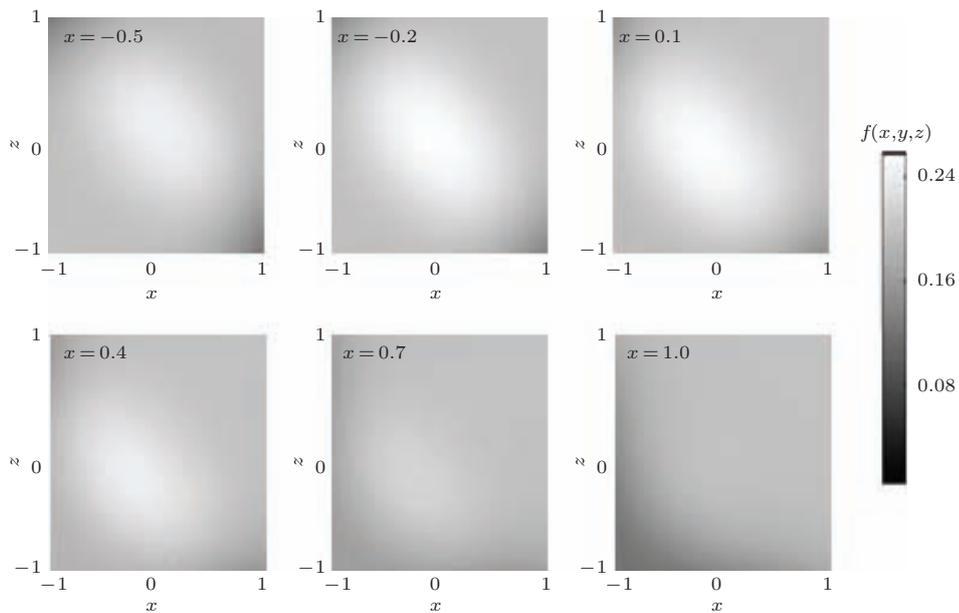


图7 三维小波函数的截面灰度图, $k = 1.95, u = 0.3$

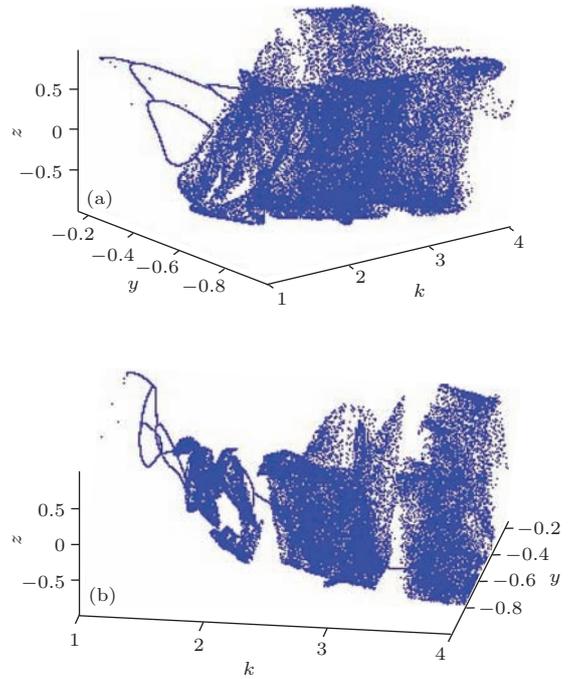


图5 不同视角观察到的三维正弦函数与随机生成的两个三维多项式函数构成的系统的分岔图 (a) 视向量为(0.5272, -0.6871, -0.5); (b) 视向量为(-0.0213, 0.8871, -0.3562)

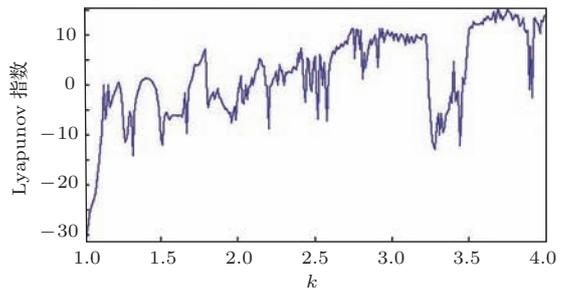


图6 三维正弦函数与随机生成的两个三维多项式函数构成的系统的Lyapunov指数图

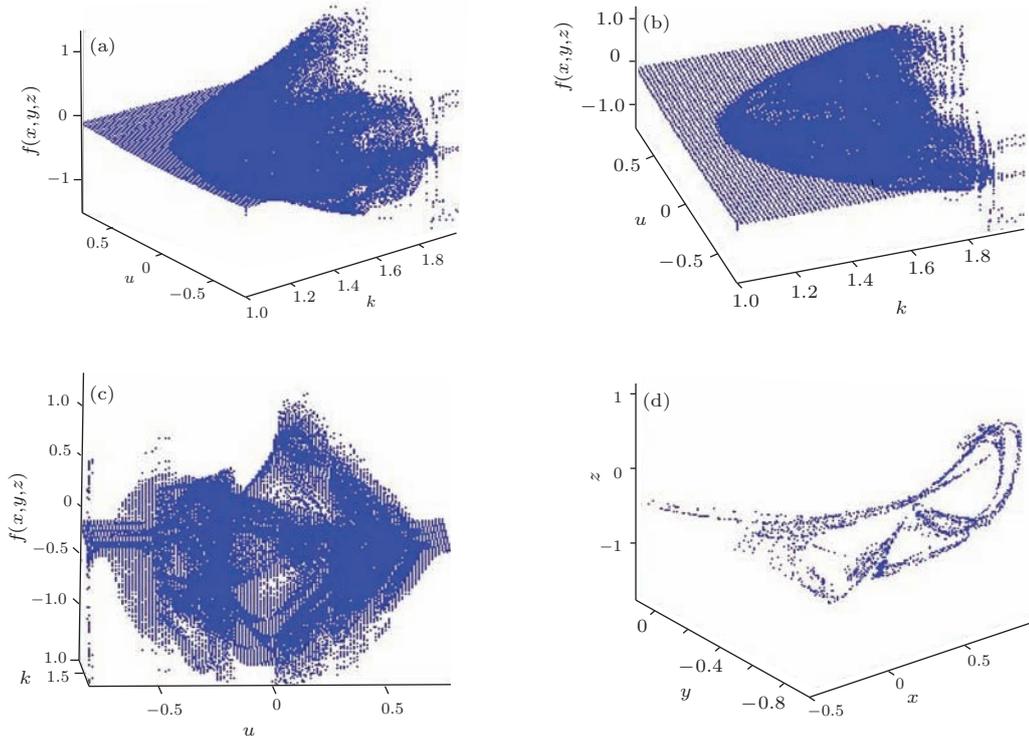


图8 不同视角观察到的三维小波函数与随机生成的两个三维多项式函数构成的系统的分岔图及构成系统的吸引子图 (a) 视向量为(0.5272, 0.6871, -0.5); (b) 视向量为(0.4531, 0.6256, -0.2013); (c) 视向量为(-0.9104, 0.0158, -0.1027); (d) 吸引子图

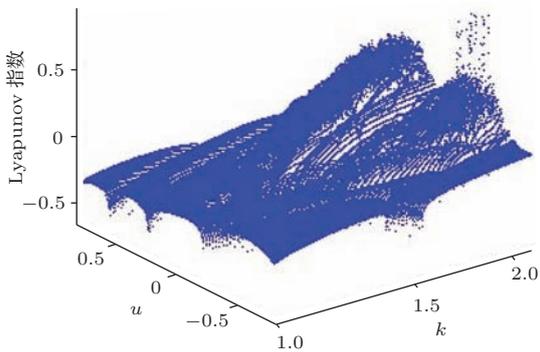


图9 三维小波函数与随机生成的两个三维多项式函数构成的系统的 Lyapunov 指数图

可以看出, 三维小波函数的横截面便是文献 [11] 研究的小波函数的分岔图和 Lyapunov 指数图.

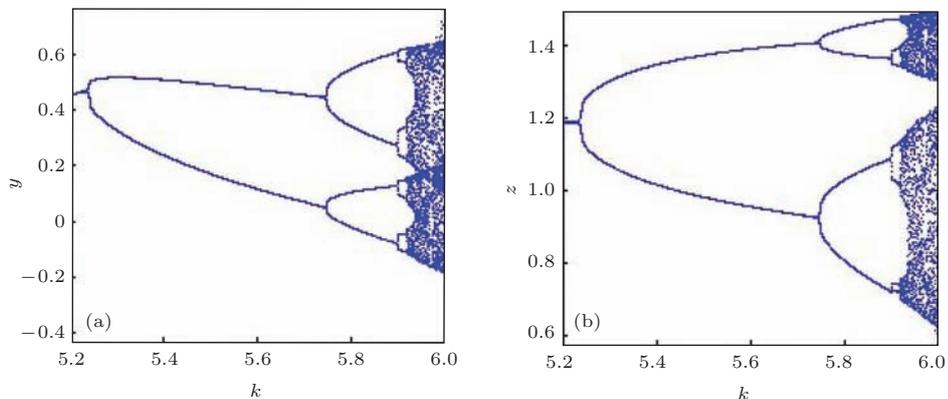


图10 Logistic 映射与随机生成的两个三维多项式函数构成的系统的分岔图 (a) k - y 分岔图; (b) k - z 分岔图

2.3 改进的三维 Logistic 映射与两个随机多项式函数构成的动力系统

把 Logistic 映射改造成下面的三维形式,

$$f(x, y, z) = k((x^2 + y^2 + z^2)/3) \times (1 - (x^2 + y^2 + z^2)/3). \quad (6)$$

将 (6) 式与 (2), (3) 式组合成一个动力系统, (2), (3) 式的系数 a, b 使用表 1 所列数据, 首先绘制其分岔图, 以便确定该系统出现混沌时 k 的取值范围. 令 k 从 5.2 增加到 6, 步长为 0.0005, 得到的系统分岔图如图 10 所示. 观察图 10 可知, 当 k 在 5.93—6.00 之间时该系统是混沌的.

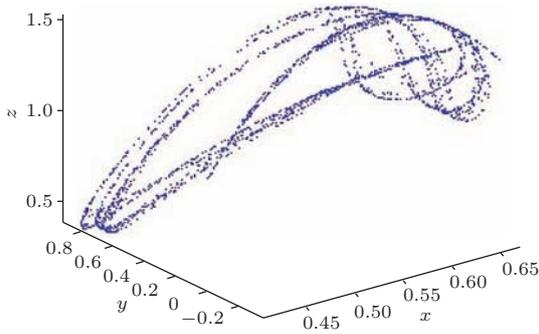


图 11 Logistic 映射与随机生成的两个三维多项式函数构成的系统的吸引子图, $k = 6.15$, (2), (3) 式的系数 α, β 使用表 1 所列数据

令 $k = 6.15$, 得到的系统(近似)吸引子如

图 11 所示. 事实上, 系统是否出现混沌很大程度上取决于 (6) 式所示的函数, 例如当 $k = 5.65-6.15$ 时, 随机生成三维多项式函数 (2), (3) 式, 三者构成的系统出现混沌吸引子的概率大于 0.5. 当随机生成的三维多项式函数 (2), (3) 式系数使用表 2 和表 3 所列数据时, 得到的两个混沌吸引子如图 12 (a) 和 (b) 所示.

与 (1), (5) 式一样, (6) 式之所以能产生混沌, 取决于该类函数的截面函数具有很好的混沌特性 [6,7], 绘制 (6) 式所示函数的 6 个横截面, 结果如图 13 所示.

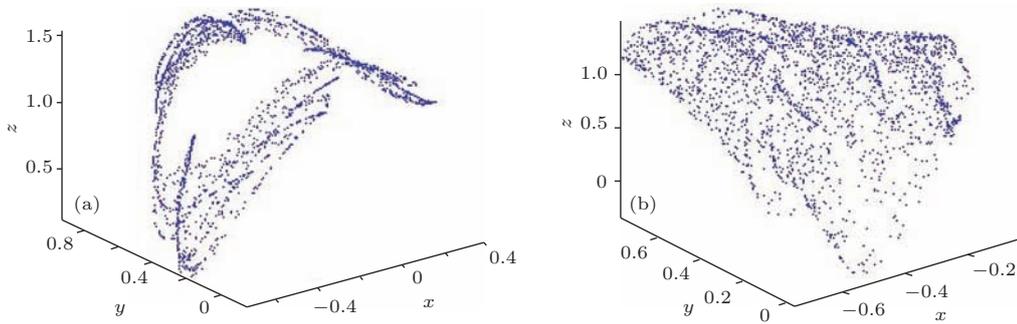


图 12 Logistic 映射与随机生成的两个三维多项式函数构成的系统的吸引子图 (a) $k = 6.15$, (2), (3) 式的系数 α, β 使用表 2 所列的数据; (b) $k = 5.8$, (2), (3) 式的系数 α, β 使用表 3 所列的数据

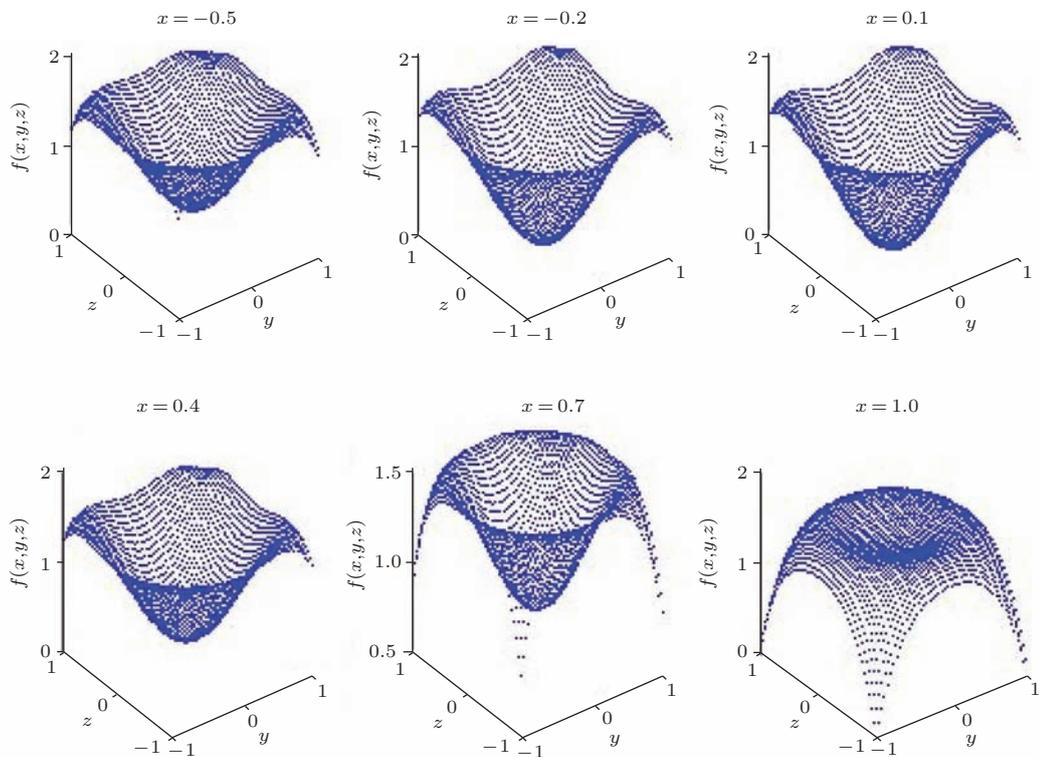


图 13 三维 Logistic 函数的横截面

表2 随机生成的两个三维多项式函数的系数

a	0.3132	-0.4901	-0.3611	-0.2972	-0.3013	0.1038	-0.2278	-0.3012	-0.4847	0.2468
b	0.4318	-0.0340	-0.0814	0.3462	0.0252	-0.2974	0.1721	0.3381	-0.4804	0.1813

表3 随机生成的两个三维多项式函数的系数

a	-0.1866	-0.2688	-0.0839	-0.2012	0.1724	0.4383	-0.1569	0.0630	-0.3811	-0.3310
b	-0.2211	0.0568	-0.0144	0.4522	-0.2681	-0.0213	0.0265	0.2927	-0.3070	0.4096

3 结 论

本文给出了一个构造三维混沌系统的新方法, 即在一维混沌函数、二维混沌函数的基础上, 增加变量拓展其成为具有较好混沌特性的三维函数, 然后与随机函数构成动力系统. 先绘制分岔图以确定其混沌区域, 然后绘制 Lyapunov 指数曲线或曲面进一步确认其混沌区域, 利用其混沌区域的参数可以得到几乎不可穷尽的混沌吸引子. 通过仿真研究可以得到一个初步的结论, 即混沌虽然复杂, 但是产生混沌的条件却很完美, 只要动力系统中有一个函数具有好的混沌特性、好的折叠程度, 那么当另外两个函数随机生成时, 三者所构成的系统就极有可能是混沌的. 从统计的角度看, 当 $k > 3.14$ 时, 函数混沌概率很高. 实际上, 当 $k > 3.14$ 时, 三维函数 (1) 式的横截曲面就是文献 [8, 9] 中的标准曲面 (具有很好的混沌特性), 这样, 当迭代点进入到某个截面后, 原有运动趋势发生改变的概率很大, 所以整体上出现混沌的概率增加了. 不过这些还需要数学描述和数学论证, 我们正在试图通过几何形状、关键点、关键边界曲线和曲面、投影面与曲面总面积比值等给出混沌产生的条件, 如使用下式表示三维函数的混沌程度:

$$R_{\text{chaos}} = \frac{\iiint_{\mathbb{R}^3} (|f'_x| + |f'_y| + |f'_z|) dx dy dz}{\iiint_{\mathbb{R}^3} \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2 + (f'_z)^2} dx dy dz}, \quad (7)$$

式中分子部分表示函数投影之和, 分母部分则表示面积, 这一工作正在进行中.

许多实际应用研究领域与混沌有关 [12-15], 本文的结论有可能应用于这些问题的研究. 例如, 从

一个中心发射出一种球形的强弱变化类似于正弦函数的电磁波或者某种作用力等, 那么在机械牵引力、重力等作用下的物体进入到这个场中都有可能被迫发生混沌运动. 可以用带电粒子在磁场中的运动进行实验, 将磁场构造成上述类似的三维函数, 然后给带电粒子加上一定的作用力, 观察其是否出现混沌状态. 一旦出现混沌, 便会一直在这个作用场中 (混沌的) 运动. 进一步可以推测当光线进入到一个类似的场中时会出现混沌, 这可能是黑洞产生的原因, 即黑洞不需要大的引力, 只要其内部具有好的混沌特性, 那么就可以吞噬光线或者其他常规运动的物体. 还可以做一个推测, 百慕大三角区域可能存在类似于本文中函数的作用力, 这样当飞行器或者船只进入这个区域时, 重力作用与物体的动力作用构成了其他两个 (随机) 函数, 所以极易出现混沌, 致使物体无论怎样进行通常意义的调整都不会摆脱混沌的作用.

参考文献

- [1] Madhok V, Riofrío C A, Ghose S, Deutsch I H 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 014102
- [2] Wang X Y, Li F P 2009 *Nonlinear Analysis: Theor.* **70** 830
- [3] Secelean N A 2014 *J. Math. Appl.* **410** 847
- [4] Shi Y M, Chen G 2004 *Chaos Solitons Fract.* **22** 555
- [5] Reza M S 2012 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **17** 3857
- [6] Feng J J, Zhang Q C, Wang W, Hao S Y 2013 *Chin. Phys. B* **22** 090503
- [7] Yu W B, Yang L Z 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 020503 (in Chinese) [于万波, 杨灵芝 2013 物理学报 **62** 020503]
- [8] Yu W B, Zhou Y 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 220501 (in Chinese) [于万波, 周洋 2013 物理学报 **62** 220501]
- [9] Yu W B, Yang L Z 2014 *Computer.* **39** 5 (in Chinese) [于万波, 杨灵芝 2014 计算机工程 **39** 5]
- [10] Yu W B, Yang X S, Wei X P 2011 *Appl. Res. Comput.* **28** 3837 (in Chinese) [于万波, 杨雪松, 魏小鹏 2011 计算机应用研究 **28** 3837]

- [11] Yu W B, Wei X P 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3969 (in Chinese) [于万波, 魏小鹏 2006 物理学报 **55** 3969]
 [12] Li X P, Zhang H J, Zhang X 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 080901 (in Chinese) [李孝攀, 张皓晶, 张雄 2011 物理学报 **60** 080901]
 [13] Wang Y, Wu X 2012 *Chin. Phys. B* **21** 050504
 [14] Blázquez-Salcedo J L, Kunz J, Navarro-Lérida F, Radu E 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 011101
 [15] Šuvakov M, Dmitrašinović V 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 114301

Chaotic characteristics of three-dimensional function determined by cross-section geometric shape

Yu Wan-Bo[†]

(College of Information Engineering, Dalian University, Dalian 116622, China)

(Received 4 January 2014; revised manuscript received 17 January 2014)

Abstract

The calculation and simulation results show that $f(x, y, z) = \sin(k(x^2 + y^2 + z^2))$, $f(x, y, z) = k(1 - (x^2 + y^2 + z^2))e^{-(x+y+z+u)^2}$, $f(x, y, z) = k((x^2 + y^2 + z^2)/3)(1 - (x^2 + y^2 + z^2)/3)$ can easily construct a three-dimensional (3D) discrete dynamic system by combining other two polynomial functions generated randomly. Through calculating Lyapunov exponent and drawing the bifurcation diagram, the characteristics of chaos of the function are confirmed, and according to the bifurcation diagram of parameters and the Lyapunov exponent curve more chaotic mapping functions are found. Analysis shows that the cross-section geometric shape can determine the chaotic characteristics of 3D function, and the cross-sections are all the median convex or middle concave surfaces, which can construct chaotic dynamic systems easily. In the future, the mathematical description model and some basic theorems are to be further investigated and their results will be used to solve practical problems such as turbulence.

Keywords: chaos, dynamic system, three-dimensional function

PACS: 05.45.-a

DOI: 10.7498/aps.63.120501

[†] Corresponding author. E-mail: yu_wb@126.com