物理学报 Acta Phys. Sin. Vol. 63, No. 13 (2014) 130201

一类非线性发展方程孤立子行波解*

石兰芳1)† 朱敏2) 周先春3)4) 汪维刚5) 莫嘉琪2)

1) (南京信息工程大学数学与统计学院, 南京 210044)

2) (安徽师范大学数学系, 芜湖 241003)

3) (南京信息工程大学电子与信息工程学院, 南京 210044)

4) (南京信息工程大学, 气象传感网技术工程中心, 南京 210044)

5) (安庆师范学院桐城教学部, 桐城 231402)

(2014 年 1 月 29 日收到; 2014 年 3 月 21 日收到修改稿)

采用了一个简单而有效的技巧, 研究了一类非线性发展方程. 首先利用待定函数法求出相应无扰动情形时方程的孤立子行波解. 然后利广义变分迭代方法得到了原扰动情形时非线性扰动色散方程的孤立子解.

关键词: 孤子, 行波, 变分迭代

PACS: 02.30.Mv **DOI:** 10.7498/aps.63.130201

1 引 言

孤立子在自然科学中有广泛的应用,它在化学、生物学、应用数学、量子力学、流体力学、光学、等离子学、散射光波、场论、大气物理、神经网络等等都有多方面的应用[1−15]. 近来研究孤立子解出现了很多新方法, 例如双曲正切法, 辅助函数法, 齐次平衡法, 待定函数法和Jacobi 椭圆函数法等.孤立子和非线性色散方程也有很密切的联系, 例如非线性色散KdV方程中的尖峰型孤立子、紧孤立子[16] 等. 近来, 求解一类非线性问题的方法不断改进, 包括平均法, 边界层校正法, 匹配法和多重尺度法等等. 经过改进的广义变分迭代方法[17] 也是其中一种有效的新方法. 近来许多学者在非线性问题方面做了大量的工作[18−21]. 利用微分不等式等方法, 作者等也做了一类非线性问题[22−32]. 在本文中, 我们讨论与近代物理有关的一个非线性扰动色散方程. 利用简单而有效的改进的广义泛函变分迭代方法得到了相应方程的孤立子行波解的近似展开式.

2 非线性扰动色散方程和广义变分迭代

考虑如下一个广义非线性扰动色散方程:

$$u_t - u_{xxt} + 2\omega u_x + \gamma u_{xxx} + auu_x - 2u_x u_{xx} - uu_{xxx} = f(u), \tag{1}$$

其中 a, ω, γ 为常数, $-2u_x u_{xx}$ 和 uu_{xxx} 为色散项, auu_x 为对流项, 而 f 为非线性扰动项, 它是关于其变量在对应的区域内为充分光滑的函数.

一般来说, 广义非线性扰动色散方程 (1) 是不能用有限项的初等函数来得到精确解的. 为此, 我们用待定函数等方法来求方程 (1) 的孤立子解的近似式[16].

先作波速为 c 的行波变换: $z = x - ct$, 则方程 (1) 为

$$(2\omega - c)u_z + (\gamma + c)u_{zzz} + auu_z - 2u_z u_{zz} - uu_{zzz} = f(u). \tag{2}$$

* 国家自然科学基金 (批准号: 11202106)、教育部高等学校博士学科点专项科研基金 (批准号: 20123228120005)、江苏省 "传感网与现代气象装备" 优势学科建设项目、江苏省高校自然科学研究项目 (批准号: 13KJB170016)、南京信息工程大学预研基金 (批准号: 20110385) 和安徽省高等学校省级自然科学研究项目 (批准号: KJ2013A133) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: shilf108@163.com

 http://wulixb.iphy.ac.cn

考虑与广义色散方程(2)式对应的无扰动项情形:

$$(2\omega-c)u_z+(\gamma+c)u_{zzz}+auu_z \\ -2u_zu_{zz}-uu_{zzz}=0. \tag{3}$$

设 $\psi=\psi(z)$, 满足

$$\psi'=\beta\sqrt{c_0+c_1\psi+c_2\psi^2},$$

其中 $\beta=\pm1$, c_i, $i=0,1,2$ 为任意常数. 不难得到: 当 $c_0=c_1^2/4c_2$, $c_2>0$ 时

$$\psi=-\frac{c_1}{2c_2}+\exp(\beta\sqrt{c_2}z). \tag{4}$$

当 $c_0=0$, $c_2<0$ 时

$$\psi=-\frac{c_1}{2c_2}+\frac{c_1}{2c_2}\cos(\beta\sqrt{-c_2}z). \tag{5}$$

令

$$u=a_0+a_1\psi+a_2\psi^2, \tag{6}$$

其中 a_i, $i=0,1,2$ 为待定常数. 将(6)式代入方程(3), 经过计算, 便可分别得到无扰动色散方程(3)的孤立子解:

$$u=\frac{3c-ac-6\omega-a\gamma}{2a}+a_1\exp\left(-\sqrt{\frac{a}{3}}|z|\right), \\ a>0, \tag{7}$$

它是尖峰型奇异孤立子解[16]以及

$$\hat{u}=\frac{3c-ac-6\omega-a\gamma}{2a}\pm\frac{3a_1c_1}{2a}\bar{\psi}(\xi) \\ \times\cos\left(\sqrt{-\frac{a}{3}}|z|\right),\quad a<0, \tag{8}$$

其中

$$\bar{\psi}(z)=\begin{cases}1, & |z|\leqslant\pi/2,\\ 0, & |z|>\pi/2,\end{cases}$$

它是紧奇异孤立子解[16].

令 $a=a_1=c=c_1=\omega=\gamma=1$, 由(7)式表示的尖峰型奇异孤立子解的曲线图形参见图1所示. 令 $a=-1$, $a_1=c=c_1=\omega=\gamma=1$, 由(8)式(取正号)表示的紧奇异孤立子解的曲线图形参见图2所示.

为了得到扰动色散方程(2)的近似解析解, 我们引入如下的一个泛函 $F(u)$: $R\to R$,

$$F(u)=u-\int_0^z\lambda(\eta)[(2\omega-c)u_\eta+(\gamma+c)u_{\eta\eta\eta} \\ +a\tilde{u}\tilde{u}_\eta-2\tilde{u}_\eta\tilde{u}_{\eta\eta}-\tilde{u}\tilde{u}_{\eta\eta\eta}-f(\tilde{u})]\mathrm{d}\eta, \tag{9}$$

其中 λ 为Lagrange乘子, $\tilde{u}$ 及其导数为方程(2)的限制变量[17].

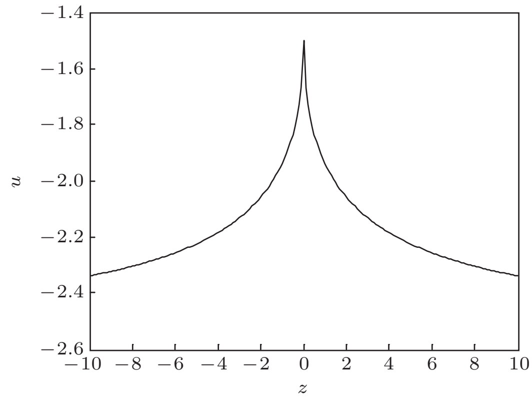

图1 尖峰型奇异孤立子解 $u(z)$

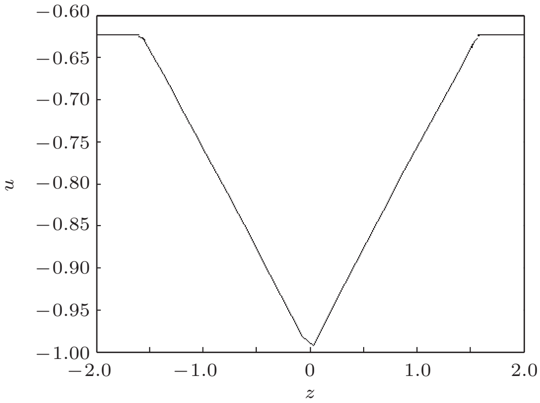

图2 紧奇异孤立子解 $u(z)$

取 F 的变分为零 $\delta F=0$:

$$\delta F=\delta u-[\lambda(2\omega-c)\delta u \\ -(\gamma+c)(\lambda\delta u_{\eta\eta}-\lambda'\delta u_\eta+\lambda''\delta u)]_{\eta=\xi} \\ +\int_0^z[(2\omega-c)\lambda+(\gamma+c)\lambda''']\delta u\,\mathrm{d}\eta=0.$$

于是有

$$(\gamma+c)\frac{\mathrm{d}^3\lambda}{\mathrm{d}\eta^3}+(2\omega-c)\lambda=0, \tag{10}$$

$$\lambda|_{\eta=z}=0,\quad \lambda'|_{\eta=z}=0, \\ \lambda''|_{\eta=z}=\frac{1}{\gamma+c}. \tag{11}$$

由(10),(11)式, 可得到 $\lambda(z)$:

$$\lambda(\eta)=C_0\exp\left(a^{1/3}\eta\right)+C_1\exp(\lambda_1\eta) \\ +C_2\exp(\lambda_2\eta), \tag{12}$$

其中

$$C_0=\frac{-b}{a(1-a)}\exp(-az),$$

$$C_1 = \frac{b(\lambda_2 - a)i}{\sqrt{3}a^2(1-a)}\exp(-\lambda_1 z),$$
$$C_2 = \frac{-b(\lambda_1 - a)i}{\sqrt{3}a^2(1-a)}\exp(-\lambda_2 z),$$
$$a = \frac{2\omega - c}{\gamma + c}, \quad b = \frac{1}{\gamma + c},$$
$$\lambda_1 = \left(\frac{2\omega - c}{2(\gamma + c)}\right)^{1/3}(-1+\sqrt{3}i),$$
$$\lambda_2 = \left(\frac{2\omega - c}{2(\gamma + c)}\right)^{1/3}(-1-\sqrt{3}i).$$

由 (9),(12) 式, 我们构造如下广义变分迭代序列 $\{u_n\}$ $(n = 0, 1, \cdots)$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} = & u_n - \int_0^z \lambda((\eta)\Big[(2\omega - c)\frac{\partial u_n}{\partial \eta} + (\gamma + c)\frac{\partial^3 u_n}{\partial \eta^3} \\ & + a u_n \frac{\partial u_n}{\partial \eta} - 2\frac{\partial u_n}{\partial \eta}\frac{\partial^2 u_n}{\partial \eta^2} - u_n\frac{\partial^3 u_n}{\partial \eta^3} \\ & - f(u_n)\Big]\mathrm{d}\eta, \quad n = 0, 1, \cdots, \end{aligned} \tag{13}$$

其中 λ 由 (12) 式表示.

选取初始迭代为无扰动色散方程 (2) 的精确尖峰型奇异孤立子解 (7). 即

$$\begin{aligned} u_0(z) = & \frac{3c - ac - 6\omega - a\gamma}{2a} + a_1\exp\left(-\sqrt{\frac{a}{3}}\,|z|\right), \\ & a > 0, \end{aligned} \tag{14}$$

这时由 (13) 式, 我们能决定

$$u_1(z) = u_0(z) + \int_0^z \lambda(\eta) f(u_0(\eta))\mathrm{d}\eta, \tag{15}$$

其中 u_0 由 (14) 式决定. 再将 (15) 式代入 (13) 式, 我们能决定

$$\begin{aligned} u_2(z) = & u_0(z) - \int_0^z \lambda(\eta)\Big[(2\omega - c)\frac{\partial u_1}{\partial \eta} \\ & + (\gamma + c)\frac{\partial^3 u_1}{\partial \eta^3} + a u_1\frac{\partial u_1}{\partial \eta} - 2\frac{\partial u_1}{\partial \eta}\frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2} \\ & - u_1\frac{\partial^3 u_1}{\partial \eta^3} + f(u_0) - f(u_1)\Big]\mathrm{d}\eta. \end{aligned} \tag{16}$$

用上述同样的迭代方法, 我们能依次决定 $u_n(z)$, $n = 2, 3, \cdots$. 可以证明, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(z)$ 是收敛的. 则 $\tilde{u}(z) = \lim\limits_{n\to\infty} u_n(z)$ 就是非线性扰动色散方程 (2) 的孤立子的精确解, 而 $u_n(z)$ 就是非线性扰动色散方程 (3) 孤立子的第 n 次近似解.

类似地, 取 u_0 为无扰动项的非线性色散方程 (3) 的紧奇异孤立子解 (8). 即

$$\begin{aligned} \hat{u}_0(z) = & \frac{3c - ac - 6\omega - a\gamma}{2a} \pm \frac{3a_1c_1}{2a}\bar{\psi}(z) \\ & \times \cos\left(\sqrt{-\frac{a}{3}}\,|z|\right), \quad a < 0. \end{aligned} \tag{17}$$

利用迭代关系式 (13), 同样可求得序列 $\hat{u}_n(z)$, $n = 1, 2, \cdots$. 而 $\hat{u}(z) = \lim\limits_{n\to\infty} \hat{u}_n(z)$ 也是非线性扰动色散方程 (2) 的另一个孤立子精确解, 且相应的 $\hat{u}_n(z)$ 就是非线性扰动色散方程 (2) 的另一个第 n 次孤立子近似解.

在上述各式中用行波变换式 $z = x - ct$ 代入, 便得到非线性扰动色散方程 (2) 的尖峰型奇异孤立子解 $u(z)$ 和紧奇异孤立子解 $\hat{u}(z)$ 的各次行波解的近似式.

3 举 例

现讨论一个特殊的非线性扰动色散方程, 它的扰动项为 $f = r\exp(-u)$, 其中 r 为常数. 这时方程 (1) 为

$$\begin{aligned} & u_t - u_{xxt} + 2\omega\, u_x + \gamma\, u_{xxx} + a u\, u_x \\ & - 2u_x u_{xx} - u u_{xxx} = r\exp(-u). \end{aligned} \tag{18}$$

利用广义变分迭代方法, 由 (14) 式得到非线性扰动色散方程 (18) 的尖峰型奇异孤立子解的零次近似式 (7) 式为

$$\begin{aligned} u_0(z) = & \frac{3c - ac - 6\omega - a\gamma}{2a} + a_1\exp\left(-\sqrt{\frac{a}{3}}\,|z|\right), \\ & a > 0. \end{aligned}$$

由 (15) 式可得尖峰型奇异孤立子解的第一次近似式

$$\begin{aligned} u_1(z) = & \frac{3c - ac - 6\omega - a\gamma}{2a} + a_1\exp\left(-\sqrt{\frac{a}{3}}\,|z|\right) \\ & + r\int_0^z \lambda((\eta)\exp(-u_0(\eta))\mathrm{d}\eta, \quad a > 0. \end{aligned}$$

由 (16) 式可得尖峰型奇异孤立子解的第二次近似式

$$\begin{aligned} u_2(z) = & \frac{3c - ac - 6\omega - a\gamma}{2a} + a_1\exp\left(-\sqrt{\frac{a}{3}}\,|z|\right) \\ & - \int_0^z \lambda(\eta)\Big[(2\omega - c)\frac{\partial u_1}{\partial \eta} + (\gamma + c)\frac{\partial^3 u_1}{\partial \eta^3} \\ & + a u_1\frac{\partial u_1}{\partial \eta} - 2\frac{\partial u_1}{\partial \eta}\frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2} - u_1\frac{\partial^3 u_1}{\partial \eta^3} \\ & - r(\exp(-u_0) - \exp(-u_1))\Big]\mathrm{d}\eta, \quad a > 0, \end{aligned}$$

其中 λ 由 (12) 式表示.

同样, 可利用广义变分迭代关系式 (13), 由 (17) 式得到非线性扰动色散方程 (18) 的紧奇异孤立子解的零次近似式 (8) 式为

$$\hat{u}_0(z) = \frac{3c - ac - 6\omega - a\gamma}{2a} \pm \frac{3a_1c_1}{2a}\bar{\psi}(z)$$

$$\times\cos\left(\sqrt{-\frac{a}{3}}\,|z|\right),\quad a<0.$$

由(13)式可得紧奇异孤立子解的第一次近似式

$$\begin{aligned}\hat{u}_1(z)=&\frac{3c-ac-6\omega-a\gamma}{2a}\pm\frac{3a_1c_1}{2a}\\&\times\bar{\psi}(z)\cos\left(\sqrt{-\frac{a}{3}}\,|z|\right)\\&+r\int_0^z\lambda(\eta)\exp(u_0(\eta))\,\mathrm{d}\eta,\quad a<0.\end{aligned}$$

再由(13)式可得紧奇异孤立子解的第二次近似式

$$\begin{aligned}\hat{u}_2(z)=&\frac{3c-ac-6\omega-a\gamma}{2a}\pm\frac{3a_1c_1}{2a}\\&\times\bar{\psi}(z)\cos\left(\sqrt{-\frac{a}{3}}\,|z|\right)\\&-\int_0^z\lambda(\eta)\Big[(2\omega-c)\frac{\partial\hat{u}_1}{\partial\eta}+(\gamma+c)\frac{\partial^3\hat{u}_1}{\partial\eta^3}\\&+au_1\frac{\partial\hat{u}_1}{\partial\eta}-2\frac{\partial\hat{u}_1}{\partial\eta}\frac{\partial^2\hat{u}_1}{\partial\eta^2}-u_1\frac{\partial^3\hat{u}_1}{\partial\eta^3}\\&-r(\exp\hat{u}_0-\exp(\hat{u}_1)\Big]\,\mathrm{d}\eta,\quad a<0,\end{aligned}$$

其中 λ 由(12)式表示.

继续利用广义变分迭代关系式(13)可以得到非线性扰动色散方程(18)的尖峰型奇异孤立子解 $u(z)$ 和紧奇异孤立子解 $\hat{u}(z)$ 的更高次近似式.

在上述各式中用行波变换式 $z=x-ct$ 代入, 便得到非线性扰动色散方程(18)的尖峰型奇异孤立子解 $u(z)$ 和紧奇异孤立子解 $\hat{u}(z)$ 的各次行波解的近似式.

4 物理问题关联

求非线性发展方程的解, 是研究相关的物理模型的基本要求. 本文利用广义变分迭代方法, 通过得到的扰动色散方程(18)及其特殊情形下的扰动方程(18)的孤立子行波近似解. 我们能够对不同元素的分子为对象, 得到瞬时偶极矩之间产生的色散力的分布和不同状态下的能量, 画出相应的色散曲线, 与实验结果进行比较, 以达到较理想的结果.

用广义变分迭代方法, 通过扰动色散方程(1)及其特殊情形下的扰动方程(18)的孤立子行波的近似解, 是从非扰动色散方程的孤立子行波出发而得到的近似解. 因此在得到所求近似解之前需选择合适的典型的孤立子行波作为零次近似. 以便能很好是地得到更为真实的近似的孤立子行波解. 这样更能符合实际的色散模型的需要.

本文的广义变分迭代近似求解方法, 也使用于其他非线性发展方程相关的物理问题, 并也能得到满意的结果.

5 结论

孤立子理论反映的是一类复杂的自然现象. 我们需要将它简化为基本模式并利用近似方法去求解它. 广义变分迭代方法就是一个简单而有效的方法. 本文用广义变分迭代方法, 选取的初始迭代 $u_0(t,x)$ 是采用无扰动色散方程(3)的孤立子行波解. 它保证了对应于扰动情形下的色散方程的孤立子行波解较快地求得的近似解析解. 所得到的结果更为可行.

参考文献

[1] McPhaden M J, Zhang D 2002 *Nature* **415** 603
[2] Gu D F, Philander S G H 1997 *Science* **275** 805
[3] Ma S H, Qiang J Y, Fang J P 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 620 (in Chinese)[马松华, 强继业, 方建平 2007 物理学报 **56** 620]
[4] Ma S H, Qiang J Y, Fang J P 2007 *Comm. Theor. Phys.* **48** 662
[5] Loutsenko I 2006 *Comm. Math. Phys.* **268** 465
[6] Gedalin M 1998 *Phys. Plasmas* **5** 127
[7] Parkes E J 2008 *Chaos Solitons Fractals* **38** 154
[8] Wang M L 1995 *Phys. Lett. A* **199** 169
[9] Sirendaoreji J S 2003 *Phys. Lett. A* **309** 387
[10] Yang J R, Mao J J 2008 *Chin. Phys. Lett.* **25** 1527
[11] Gao Y, Tang X Y 2007 *Commum. Theor. Phys.* **48** 961
[12] Yang J R, Mao J J 2008 *Chin. Phys.* **17** 4337
[13] Chen J, He H S, Yang K Q 2005 *Chin, Phys, B* **14** 1926
[14] Ahmet Yildirim, Syed Tauseef Mohyud-Din 2010 *Chin. Phys. Lett.* **27** 060201
[15] Tapgetusang, Sirendaoerji 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2121 (in Chinese)[套格图桑, 斯仁道尔吉 2009 物理学报 **58** 2121]
[16] Yin L J, Tian L X 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 3632 (in Chinese)[殷利久, 田立新 2009 物理学报 **58** 3632]
[17] He J H 2002 *Approximate Analytical Methods in Engineering and Sciences* (Shengzhou: Henan Science and Technology Press) (in Chinese) [何吉欢 2002 工程和科学计算中的近似非线性分析方法 (郑州: 河南科学技术出版社)]
[18] Hovhannisyan G., Vulanovic R 2008 *Nonlinear Stud.* **15** 297
[19] Graef J R, Kong L 2008 *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.* **145** 489
[20] Barbu L, Cosma E 2009 *J. Math. Anal. Appl.* **351** 392
[21] Ramos M 2009 *J. Math. Anal. Appl.* **352** 246
[22] Lin W T, Lin Y H, Mo J Q 2012 *Chin. Phys. B* **21** 019294

[23] Shi L F, Mo J Q 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 040203 (in Chinese)[石兰芳, 莫嘉琪 2013 物理学报 **62** 040203]

[24] Shi L F, Lin W T, Lin Y H, Mo J Q 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 010201 (in Chinese)[石兰芳, 林万涛, 林一骅, 莫嘉琪 2013 物理学报 **62** 010201]

[25] Ouyang C, Chen L H, Mo J Q 2012 *Chin. Phys. B* **21** 050203

[26] Zhou X C, Lin W T, Lin Y H, Mo J Q 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 240202 (in Chinese)[周先春, 林万涛, 林一骅, 莫嘉琪 2012 物理学报 **61** 240202]

[27] Zhou X C, Yao J S, Mo J Q 2012 *Chin. Phys. B* **21** 030201

[28] Zhou X C, Shi L F, Mo J Q 2014 *Chin. Phys. B* **23** 040202

[29] Mo J Q, Lin W T, Lin Y H 2011 *Chin. Phys. B* **20** 010208

[30] Mo J Q 2009 *Chin Phys. Lett.* **26** 010204

[31] Lin W T, Zhang Y, Mo J Q 2013 *Chin. Phys. B* **23** 020305

[32] Mo J Q 2011 *Commun. Theor. Phys.* **55** 387

The solitary traveling wave solution for a class of nonlinear evolution equations*

Shi Lan-Fang[1)†] Zhu Min[2)] Zhou Xian-Chun[3)4)] Wang Wei-Gang[5)] Mo Jia-Qi[2)]

1) (*College of Mathematics and Statistics, Nanjing University of information Science and Technology, Nanjing 210044, China*)

2) (*Department of Mathematics Anhui Normal University, Wuhu 241003, China*)

3) (*College of Electronic and Information Engineering, Nanjing University of Information Science & Technology, Nanjing 210044, China*)

4) (*Jiangsu Technology and Engineering Center for Meteorological Sensor Network, Nanjing University of Information Science and Technology Nanjing 210044, China*)

5) (*Tongcheng Teaching Department Anqing Teacher's College, Tongcheng 231402, China*)

(Received 29 January 2014; revised manuscript received 21 March 2014)

Abstract

A class of nonlinear evolution equation is considered by taking a simple and valid technique. Using the method of undetermined functions, firstly we introduce the solitary traveling wave solutions to the corresponding non-disturbed equation. And then the solitary wave solutions to the nonlinear disturbed dispersive equation are obtained using the generalized variational iteration method.

Keywords: solitary, traveling wave, variational iteration

PACS: 02.30.Mv **DOI:** 10.7498/aps.63.130201

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11202106), the Specialized Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education, China (Grant No. 20123228120005), the Jiangsu Sensor Network and Modern Meteorological Equipment Preponderant Discipline Platform, China, the Natural Sciences Fundation from the Universities of Jiangsu Province of China (Grant No. 13KJB170016), the Advanced Research Foundation in NUIST of China (Grant No, 20110385), and the Natural Science Foundation of the Education Department of Anhui Province, China (Grant No. KJ2013A133).

† Corresponding author. E-mail: shilf108@163.com