

输出电容时间常数对 V^2 控制Buck变换器的动力学特性的影响*

何圣仲[†] 周国华 许建平 吴松荣 陈利

(磁浮技术与磁浮列车教育部重点实验室, 西南交通大学电气工程学院, 成都 610031)

(2013年11月11日收到; 2014年3月17日收到修改稿)

建立了 V^2 控制Buck变换器的二阶离散迭代映射模型, 在其基础上绘制了输出电容及其等效串联电阻 (equivalent series resistance, ESR) 变化时的分岔图, 研究了输出电容时间常数对 V^2 控制Buck变换器的动力学特性的影响. 研究表明, 随着输出电容时间常数的逐渐减小, V^2 控制Buck变换器具有从稳定的连续导电模式 (continuous conduction mode, CCM) 周期1态逐渐演变到CCM周期2态、CCM周期4态、CCM周期8态、CCM混沌态、断续导电模式 (discontinuous conduction mode, DCM) 混沌态的动力学行为. 推导了不动点处的雅可比矩阵, 利用特征值和最大Lyapunov指数对系统进行了稳定性分析, 并验证了分岔分析的正确性. 最后, 搭建了仿真和实验电路, 用仿真和实验结果验证了文中理论分析的正确性.

关键词: 开关变换器, V^2 控制, 输出电容时间常数, 动力学

PACS: 05.45.-a

DOI: 10.7498/aps.63.130501

1 引言

V^2 控制开关变换器具有快速的负载动态响应速度, 在便携式电子产品、微处理器及其电源管理模块中有着广泛的应用前景^[1-4]. 开关变换器属于典型的分段光滑非线性时变系统, 存在倍周期分岔、边界碰撞分岔、Hopf分岔、快慢尺度变化、混沌等非线性现象^[5-11]. 近年来, 利用非线性动力学的方法研究开关变换器的动力学行为已经成为研究热点^[12-16]. 通过揭示开关变换器内在的非线性动力学现象及其产生机理, 有利于指导其电路参数设计. 根据一定应用条件将系统进行降阶处理, 建立简化的一阶等效离散模型, 使得分析和计算过程变得相对简单, 分析结果在一定程度上可以满足工程设计需要. 但是, 由于简化的等效建模采取了近似处理, 使得分析结果对开关变换器的动力学行为刻画不够准确, 甚至不能分析某些参数变化对开关变

换器动力学特性的影响. 采用二阶的离散映射建模方法, 可以更加准确地判定开关变换器的分岔等非线性行为. 因此, 有必要对 V^2 控制开关变换器进行二阶离散映射建模, 并进行相应的非线性动力学研究.

已有文献对 V^2 控制开关变换器的研究主要集中在小信号建模分析及控制器设计、等效离散建模等方面^[1-4]. 研究表明, 输出电容的等效串联电阻 (equivalent series resistance, ESR) 对 V^2 控制开关变换器的控制性能影响较大. 当ESR较大时, V^2 控制开关变换器能够正常工作, 但是变换器的输出电压纹波较大. 当ESR较小时, V^2 控制开关变换器将出现不稳定工作状态, 甚至失效. 文献^[4]在ESR较大情况下, 假设输出电容电压在开关周期内保持不变, 对 V^2 控制Buck变换器进行了降阶处理, 建立了相应的一阶等效离散映射模型, 并基于此模型对其动力学特性进行了研究. 由于文

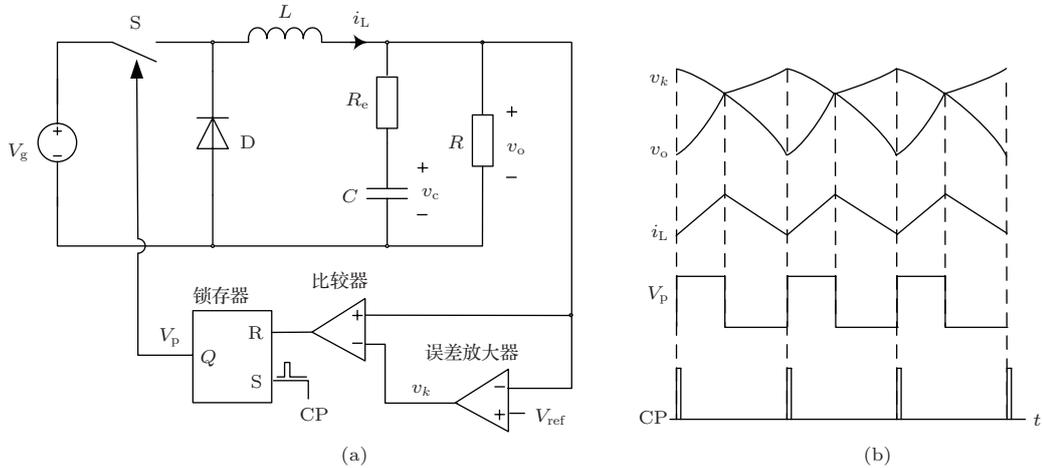
* 国家自然科学基金 (批准号: 51177140, 61371033)、高等学校博士学科点专项科研基金 (批准号: 20130184120011)、四川省青年科技基金 (批准号: 2013JQ0033) 和中央高校基本科研业务费专项资金 (批准号: SWJTU11CX029, 2682013ZT20) 资助的课题.

[†] 通讯作者. E-mail: szhe_0@swjtu.edu.cn

献[4]做了降阶处理, 因此无法刻画输出电容及其ESR对 V^2 控制Buck变换器的动力学特性的影响.

根据含有输出电容ESR的 V^2 控制Buck变换器的状态方程, 本文首先建立 V^2 控制Buck变换器的二阶离散迭代映射模型. 在其基础上, 通过输出电容及其ESR变化时的分岔图、雅可比矩阵及特征

值、最大Lyapunov指数等, 研究输出电容时间常数对 V^2 控制Buck变换器的动力学特性的影响. 采用Psim软件进行时域仿真, 得到 V^2 控制Buck变换器的时域波形和相轨图, 验证二阶离散迭代映射模型和理论分析的正确性. 最后搭建实验电路, 对仿真结果进行实验验证.



2 V^2 控制Buck变换器的二阶离散迭代映射模型

2.1 工作原理

V^2 控制Buck变换器的电路拓扑及工作波形如图1所示. 主电路由输入电压 V_g 、开关管S、二极管D、电感 L 、输出电容 C (含等效串联电阻 R_e)和负载 R 组成, 控制电路由误差放大器、比较器、RS锁存器、时钟脉冲CP构成. 在每一个开关周期开始时刻, 时钟信号使锁存器输出 V_p 为高电平, 开关管S导通, 二极管D关断, 输出电压增加. 当输出电压增加到控制电压 v_k 时, 开关管S关断, 直到下一个开关周期开始[17]. V^2 控制Buck变换器在电感连续导电模式(continuous conduction mode, CCM)时的稳态工作波形如图1(b)所示.

2.2 状态方程

为了建立 V^2 控制Buck变换器的二阶离散迭代映射模型, 首先根据Buck变换器中开关器件的不同工作模式, 推导出相应的状态方程. Buck变换器的开关器件存在3种工作模式: 1) 开关管S导

通, 二极管D关断; 2) 开关管S关断, 二极管D导通; 3) 开关管S关断, 二极管D关断. 当Buck变换器工作在CCM模式下, 开关器件只存在前2种工作模式; 当Buck变换器工作在电感断续导电模式(discontinuous conduction mode, DCM)下, 开关器件存在3种工作模式.

在第 n 个开关周期 T 中, 工作模式1的持续时间为 t_1 , 工作模式2的持续时间为 t_2 , 工作模式3的持续时间为 t_3 , 则第 n 个开关周期内Buck变换器的状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} \mathbf{A}_1 \mathbf{x} + \mathbf{B}_1 \mathbf{V}_g, & nT \leq t \leq nT + t_1, \\ \mathbf{A}_2 \mathbf{x} + \mathbf{B}_2 \mathbf{V}_g, & nT + t_1 \leq t \leq nT + t_1 + t_2, \\ \mathbf{A}_3 \mathbf{x} + \mathbf{B}_3 \mathbf{V}_g, & nT + t_1 + t_2 \leq t \leq (n+1)T, \end{cases} \quad (1)$$

其中, \mathbf{x} 为状态变量, \mathbf{A} , \mathbf{B} 为系数矩阵,

$$\mathbf{x} = [v_c \ i_L]^T, \quad \mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} -1 & R \\ (R + R_e)C & (R + R_e)C \\ -R & -RR_e \\ (R + R_e)L & (R + R_e)L \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ (R + R_e)C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ L \end{bmatrix}^T,$$

$$B_2 = B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T,$$

T为矩阵转置.

2.3 离散迭代映射模型

令 $\mathbf{x}_n = \mathbf{x}(nT)$, $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}((n+1)T)$ 分别为状态变量在 nT 和 $(n+1)T$ 时刻的采样值, V^2 控制 Buck 变换器的离散迭代映射模型可以表示成第 $(n+1)T$ 时刻的状态矢量 \mathbf{x}_{n+1} 与第 nT 时刻的状态矢量 \mathbf{x}_n 之间的关系, 即 $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$.

记第 n 个开关周期的电容电压和电感电流初始值分别为 v_{cn} 和 i_{Ln} , 根据 (1) 式的第一个方程, 可得 Buck 变换器在 $t = nT + t_1$ 时刻的电容电压和电感电流, 分别为

$$v_c(nT + t_1) = e^{-\alpha t_1} [k_1 \cos(\omega t_1) + k_2 \sin(\omega t_1)] + V_g, \quad (2)$$

$$i_L(nT + t_1) = e^{-\alpha t_1} [k_3 \cos(\omega t_1) + k_4 \sin(\omega t_1)] / R + V_g / R, \quad (3)$$

其中,

$$\alpha = \frac{RR_e C + L}{2\tau L},$$

$$\omega = \sqrt{\frac{R}{\tau L} - \alpha^2},$$

$$\tau = (R + R_e)C,$$

$$k_1 = v_{cn} - V_g,$$

$$k_2 = \frac{Ri_{Ln} - v_{cn}}{\tau} + \frac{\alpha}{\omega} k_1,$$

$$k_3 = \tau(k_2\omega - k_1\alpha) + k_1,$$

$$k_4 = k_2 - \tau(k_1\omega + k_2\alpha).$$

经过时间间隔 t_1 后, 变换器进入开关模式 2, 根据 (1) 式的第二个状态方程, 并以 (2) 式, (3) 式为初值, 可得 Buck 变换器在 $t = nT + t_1 + t_2$ 时刻的电容电压和电感电流, 分别为

$$v_c(nT + t_1 + t_2) = e^{-\alpha t_2} [k_{12} \cos(\omega t_2) + k_{22} \sin(\omega t_2)], \quad (4)$$

$$i_L(nT + t_1 + t_2)$$

$$= e^{-\alpha t_2} [k_{32} \cos(\omega t_2) + k_{42} \sin(\omega t_2)] / R, \quad (5)$$

其中,

$$k_{12} = v_c(nT + t_1),$$

$$k_{22} = \frac{Ri_L(nT + t_1) - v_c(nT + t_1)}{\omega\tau} + \frac{\alpha}{\omega} k_{12},$$

$$k_{32} = \tau(k_{22}\omega - k_{12}\alpha) + k_{12},$$

$$k_{42} = k_{22} - \tau(k_{12}\omega + k_{22}\alpha).$$

再经过时间间隔 t_2 后, 变换器进入工作模式 3, 根据 (1) 式第三个状态方程, 并以 (4) 式, (5) 式为初值, 可得 Buck 变换器在 $t = (n+1)T$ 时刻的电容电压和电感电流, 分别为

$$i_L((n+1)T) = 0, \quad (6)$$

$$v_c((n+1)T) = v_c(nT + t_1 + t_2) e^{-t_3/\tau}. \quad (7)$$

由图 1 可知, 输出电压与电感电流、电容电压之间的关系为

$$v_o(t) = \frac{RR_e}{R + R_e} i_L(t) + \frac{R}{R + R_e} v_c(t). \quad (8)$$

于是, 输出电压在 $t = nT + t_1$ 时刻的采样值为

$$v_o(nT + t_1) = \frac{RR_e}{R + R_e} i_L(nT + t_1) + \frac{R}{R + R_e} v_c(nT + t_1). \quad (9)$$

由 V^2 控制 Buck 变换器的原理可知 $v_k(t) = K(V_{ref} - v_o(t))$, 其中 K 为误差放大器的比例系数, 当 $v_o(nT + t_1) = v_k(nT + t_1)$ 时, 开关管由导通切换为关断. 定义开关函数

$$s(v_{on}, t_1) \triangleq v_k(nT + t_1) - v_o(nT + t_1) = KV_{ref} - (K + 1)v_o(nT + t_1), \quad (10)$$

其中, $v_{on} = v_o(nT)$, 即第 n 个开关周期的初始值.

令 $s(v_{on}, t_1) = 0$, 即可求出第 n 个开关周期的 t_1 . 当变换器工作于 CCM 时, $t_2 = T - t_1$, $t_3 = 0$; 当变换器工作于 DCM 时, 令 (5) 式中的 $i_L(nT + t_1 + t_2) = 0$ 可求出 t_2 , 进而可以求出 $t_3 = T - (t_1 + t_2)$. 然而, 求解 t_1 和 t_2 的等式均为超越方程, 不能求出解析表达式, 一般采用 Newton-Raphson 等数值方法进行求解.

得到 t_1 和 t_2 后, 根据 (2) — (7) 式可以分别得到 $t_1 \geq T$, $t_1 + t_2 > T$ 和 $t_1 + t_2 \leq T$ 三种情况下的离散迭代映射模型.

当 $t_1 \geq T$ 时, 在整个开关周期内开关管一直处于导通状态, 这时迭代映射为

$$\mathbf{x}_{n+1} = f(\mathbf{x}_n) = \begin{cases} v_{c(n+1)} = e^{-\alpha T}[k_1 \cos(\omega T) + k_2 \sin(\omega T)] + V_g, \\ i_{L(n+1)} = e^{-\alpha T}[k_3 \cos(\omega T) + k_4 \sin(\omega T)]/R + V_g/R. \end{cases} \quad (11)$$

当 $t_1 + t_2 > T$ 时, 变换器工作于 CCM 模式, 这时迭代映射为

$$\mathbf{x}_{n+1} = f(\mathbf{x}_n) = \begin{cases} v_{c(n+1)} = e^{-\alpha(T-t_1)}[k_{12} \cos \omega(T-t_1) + k_{22} \sin \omega(T-t_1)], \\ i_{L(n+1)} = e^{-\alpha(T-t_1)}[k_{32} \cos \omega(T-t_1) + k_{42} \sin \omega(T-t_1)]/R. \end{cases} \quad (12)$$

当 $t_1 + t_2 \leq T$ 时, 变换器工作于 DCM 模式, 这时迭代映射为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{n+1} &= f(\mathbf{x}_n) \\ &= \begin{cases} v_{c(n+1)} = v_c(nT + t_1 + t_2) e^{-t_3/\tau}, \\ i_{L(n+1)} = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (13)$$

(11)—(13) 式即为 V^2 控制 Buck 变换器的二阶离散迭代映射模型. 根据此模型, 可对 V^2 控制 Buck 变换器的动力学行为进行研究.

此外, V^2 控制 Buck 变换器的离散迭代映射中存在输出电压边界. 定义边界 V_b 为输出电压在时钟周期结束时刚好到达控制电压 v_k 时, 时钟周期开始时的输出电压值. 令 $v_o((n+1)T) = v_k((n+1)T)$, 结合 (2) 式, (3) 式和 (8) 式, 可以得到边界值 V_b 为

$$\begin{aligned} V_b &= \{ \tau R R_e [(\alpha N_1 + N_2) V_g + (V_k - V_g) \\ &\quad \times (R + R_e) e^{\alpha T}] + N_3 v_{cn} \} \\ &\quad \times \{ N_1 (R + R_e) \}^{-1}, \end{aligned} \quad (14)$$

其中,

$$\begin{aligned} V_k &= \frac{K}{K+1} V_{ref}, \\ N_1 &= \frac{R_e - R_e \tau \alpha + R}{\omega} \sin \omega T + \tau R_e \cos \omega T, \\ N_2 &= \frac{R_e - R_e \tau \alpha + R}{\omega} \cos \omega T - \tau R_e \sin \omega T, \\ N_3 &= R[(R_e - R_e \alpha \tau + 1) N_1 - R_e \tau N_2]. \end{aligned}$$

3 基于输出电容时间常数的动力学行为分析

3.1 分岔分析

为了分析输出电容时间常数对 V^2 控制 Buck 变换器的动力学特性的影响, 选取如表 1 所示的电路参数进行分岔分析. 保持其他参数不变, 以输出滤波电容 C 为分岔参数, 变化范围为 100—1000 μF , 相应的分岔图如图 2 所示.

表 1 V^2 控制 Buck 变换器电路参数

参数含义	变量	数值
输入电压	V_g/V	12
输出电压参考	V_{ref}/V	5.25
电感	$L/\mu\text{H}$	100
输出滤波电容	$C/\mu\text{F}$	1000
输出滤波电容 ESR	R_e/Ω	0.1
负载电阻	R/Ω	2
误差放大器比例系数	K	30
开关周期	$T/\mu\text{s}$	50

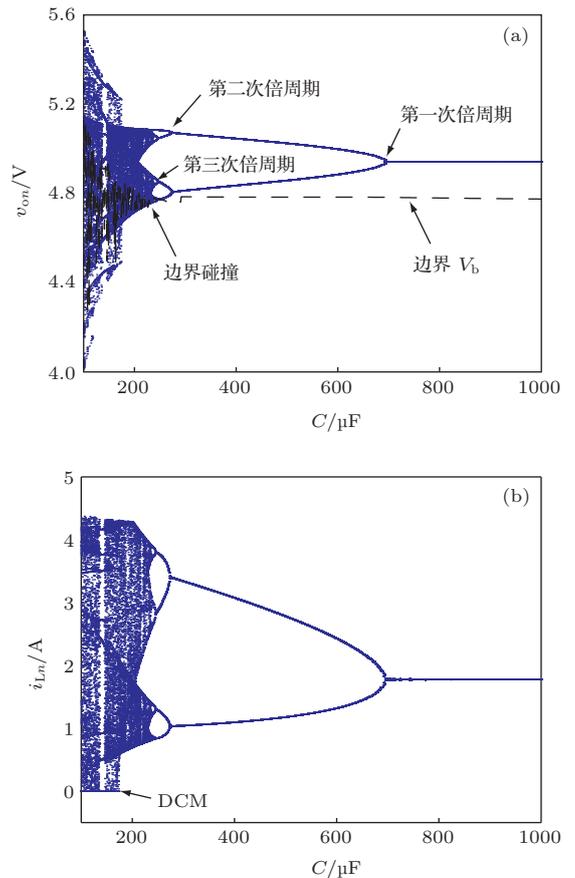


图 2 (网刊彩色) 输出电容 C 为分岔参数的分岔图 (a) 输出电压分岔图; (b) 电感电流分岔图

从图 2(a)可以看出: 随着输出电容 C 的逐渐减小, 在 C 约为 $694 \mu\text{F}$ 时, 变换器发生第一次倍周期分岔, 从稳定的 CCM 周期 1 状态进入 CCM 周期 2 状态; 随着输出电容 C 的继续减小, 在 C 约为 $275 \mu\text{F}$ 时, 变换器发生了第二次倍周期分岔, 从 CCM 周期 2 状态进入 CCM 周期 4 状态; 在 C 约为 $245 \mu\text{F}$ 时, 变换器发生了第三次倍周期分岔, 从 CCM 周期 4 状态进入 CCM 周期 8 状态; 当 C 约为 $236 \mu\text{F}$ 时, 变换器的运行轨道与边界 V_b 碰撞, 发生边界碰撞分岔, 其工作状态由 CCM 周期 8 状态进入 CCM 混沌状态. 另一方面, 从图 2(b) 可以清晰地看出: 当电容 C 减小到约为 $173 \mu\text{F}$ 时, 电感电流 i_L 的最小离散迭代值为零, 表明变换器在一段时间内会工作于 DCM 模式, 相应的工作状态由 CCM 混沌态变为 DCM 混沌态. 从整个输出电容的变化范围 ($100\text{--}1000 \mu\text{F}$) 来看, V^2 控制 Buck 变换器经历了第一次倍周期分岔、第二次倍周期分岔、第三次倍周期分岔、边界碰撞分岔、CCM 混沌、DCM 混沌的逆分岔路由.

从图 3(a)可以看出: 随着 ESR 的减小, 在 R_e 约为 0.0729Ω 时, Buck 变换器发生第一次倍周期分岔, 其运行轨道从稳定的 CCM 周期 1 状态进入 CCM 周期 2 状态; 随着 ESR 的继续减小, 在 R_e 约为 0.0301Ω 时, 变换器发生了第二次倍周期分岔, 从 CCM 周期 2 状态进入 CCM 周期 4 状态; 当 R_e 约为 0.0274Ω 时, 变换器发生了第三次倍周期分岔, 由 CCM 周期 4 状态进入 CCM 周期 8 状态; 当 R_e 约为 0.0263Ω 时, 变换器运行轨道与边界 V_b 碰撞, 发生边界碰撞分岔, 其工作状态由 CCM 周期 8 进入 CCM 混沌状态. 从图 3(b) 可以清晰地看出, 当 R_e 约为 0.0194Ω 时, 电感电流 i_L 的最小离散迭代值为零, 变换器的工作状态由 CCM 混沌态变为 DCM 混沌态. 从整个 ESR 的变化范围来看, 图 3 所示的 V^2 控制 Buck 变换器的逆分岔路由与图 2 一致.

无论是输出电容 C 变化, 还是 ESR 变化, 均会使得输出电容的时间常数 ($R_e C$) 发生变化. 从图 2、图 3 及其分析可以看出, 二者变化引起的输出电容时间常数 $R_e C$ 变化对 V^2 控制 Buck 变换器的动力学行为产生的影响一致. 而实际工程应用中, 不同厂家生产的电容具有不同的时间常数, 因此, 在对输出电容进行选择时, 还应注意电容的时间常数性能指标.

3.2 稳定性分析

通过对离散迭代映射模型的不动点处的雅可比矩阵及其特征根进行分析, 可以确定开关变换器稳态工作时的稳定性.

由 (12) 式或 (13) 式, 令 $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n = \mathbf{X}_Q$, 利用 Newton-Raphson 法等数值算法 [18,19], 可求出不动点 $\mathbf{X}_Q = [i_{LQ} v_{CQ}]^T$. 于是, V^2 控制 Buck 变换器的离散迭代模型在不动点 \mathbf{X}_Q 处的雅可比矩阵为

$$J(\mathbf{X}_Q) = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \Big|_{\mathbf{x}_n = \mathbf{X}_Q}, \quad (15)$$

其中

$$\begin{aligned} J_{11} &= \partial v_{c(n+1)} / \partial v_{cn}, & J_{12} &= \partial v_{c(n+1)} / \partial i_{Ln}, \\ J_{21} &= \partial i_{L(n+1)} / \partial v_{cn}, & J_{22} &= \partial i_{L(n+1)} / \partial i_{Ln}. \end{aligned}$$

若变换器工作于 CCM 模式, 由 (12) 式可以求得矩阵系数 $J_{ij} (i, j = 1, 2)$, 分别为

$$J_{11} = e^{-\alpha(T-t_1)} [\rho_1 \cos \omega(T-t_1)$$

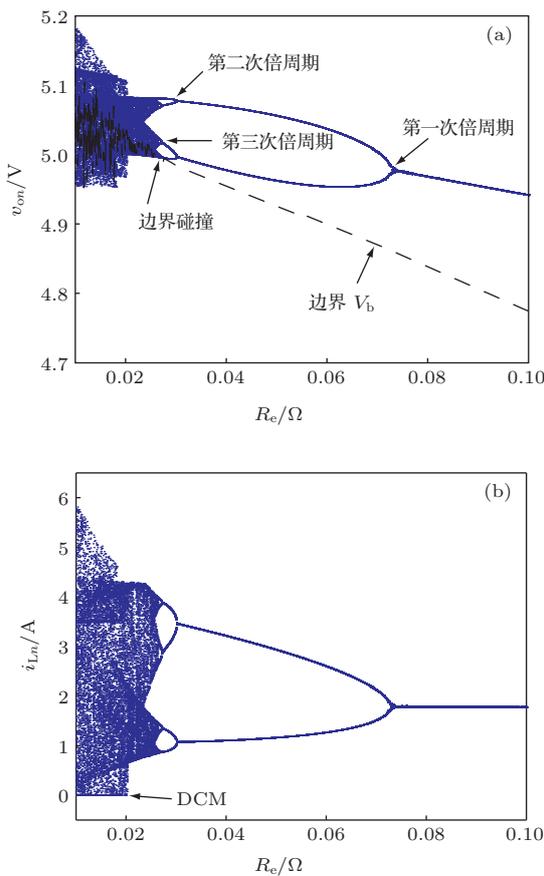


图 3 (网刊彩色) 以 ESR 为分岔参数的分岔图 (a) 输出电压分岔图; (b) 电感电流分岔图

选择输出电容 ESR 为分岔参数, 变化范围为

$$+ \rho_2 \sin \omega(T - t_1)], \quad (16a)$$

$$J_{12} = e^{-\alpha(T-t_1)}[\rho_3 \cos \omega(T - t_1) + \rho_4 \sin \omega(T - t_1)], \quad (16b)$$

$$J_{21} = e^{-\alpha(T-t_1)}[\rho_5 \cos \omega(T - t_1) + \rho_6 \sin \omega(T - t_1)]/R, \quad (16c)$$

$$J_{22} = e^{-\alpha(T-t_1)}[\rho_7 \cos \omega(T - t_1) + \rho_8 \sin \omega(T - t_1)]/R, \quad (16d)$$

其中,

$$\rho_1 = v_{c1v} + (\alpha k_{12} - \omega k_{22})t_{1v},$$

$$\rho_2 = (\omega k_{12} + \alpha k_{22})t_{1v} + k_{22v},$$

$$\rho_3 = v_{c1i} + (\alpha k_{12} - \omega k_{22})t_{1i},$$

$$\rho_4 = (\omega k_{12} + \alpha k_{22})t_{1i} + k_{22i},$$

$$\rho_5 = Ri_{L1v} + (\alpha k_{32} - \omega k_{42})t_{1v},$$

$$\rho_6 = (\omega k_{32} + \alpha k_{42})t_{1v} + (1 - \tau\alpha)k_{22v} - \tau\omega v_{c1v},$$

$$\rho_7 = Ri_{L1i} + (\alpha k_{32} - \omega k_{42})t_{1i},$$

$$\rho_8 = (\omega k_{32} + \alpha k_{42})t_{1i} + (1 - \tau\alpha)k_{22i} - \tau\omega v_{c1i},$$

$$v_{c1v} = e^{-\alpha t_1} \left\{ [1 + (\omega k_2 - \alpha k_1)t_{1v}] \cos \omega t_1 + \left[\frac{\tau\alpha - 1}{\omega\tau} - (\omega k_1 + \alpha k_2)t_{1v} \right] \sin \omega t_1 \right\},$$

$$v_{c1i} = e^{-\alpha t_1} \left\{ (\omega k_2 - \alpha k_1)t_{1i} \cos \omega t_1 + \left[\frac{R}{\omega\tau} - (\omega k_1 + \alpha k_2)t_{1i} \right] \sin \omega t_1 \right\},$$

$$i_{L1v} = e^{-\alpha t_1} \left\{ (\omega k_4 - \alpha k_3)t_{1v} \cos \omega t_1 + \left[\frac{-(\alpha\tau - 1)^2}{\omega\tau} - \omega\tau - (k_3\omega + k_4\alpha)t_{1v} \right] \times \sin \omega t_1 \right\} / R,$$

$$i_{L1i} = e^{-\alpha t_1} \left\{ [R + (\omega k_4 - \alpha k_3)t_{1i}] \cos \omega t_1 + \left[\frac{R(1 - \tau\alpha)}{\omega\tau} - (\omega k_3 + \alpha k_4)t_{1i} \right] \times \sin \omega t_1 \right\} / R,$$

$$k_{22i} = \frac{Ri_{L1i} + (\tau\alpha - 1)v_{c1i}}{\omega\tau},$$

$$k_{22v} = \frac{Ri_{L1v} + (\tau\alpha - 1)v_{c1v}}{\omega\tau},$$

$$\sigma = c_2 \sin \omega t_1 - c_1 \cos \omega t_1,$$

$$c_1 = R_e(\omega k_4 - \alpha k_3) + R(\omega k_2 - \alpha k_1),$$

$$c_2 = R_e(\alpha k_4 + \omega k_3) + R(\omega k_1 + \alpha k_2),$$

$$t_{1i} = \left\{ R_e R \cos \omega t_1 + \left[(1 - \tau\alpha) \frac{RR_e}{\omega\tau} + \frac{R^2}{\omega\tau} \right] \times \sin \omega t_1 \right\} / \sigma,$$

$$t_{1v} = \left\{ R \cos \omega t_1 + \left[\frac{(\alpha\tau - 1)(R + R_e - R_e\alpha\tau)}{\omega\tau} - R_e\omega\tau \right] \sin \omega t_1 \right\} / \sigma.$$

若变换器工作于DCM模式, 此时 $J_{21} = J_{22} = 0$, 可令 $J_{12} = 0$, J_{11} 由下式决定:

$$J_{11} = \rho_9 e^{-t_3/\tau} + \frac{v_c(nT + t_1 + t_2)}{\tau} \times e^{-t_3/\tau} (t_{1v} + t_{2v}), \quad (17)$$

其中

$$\rho_9 = e^{-\alpha t_2} \{ [v_{c1v} + (\omega k_{22} - \alpha k_{12})t_{2v}] \cos \omega t_2 + [k_{22v} - (\omega k_{12} + \alpha k_{22})t_{2v}] \sin \omega t_2 \},$$

$$t_{2v} = \{ Ri_{L1v} \cos \omega t_2 + [(1 - \tau_1\alpha)k_{22v} - \tau_1\omega v_{c1v}] \sin \omega t_2 \} \times \{ \omega k_{32} \sin \omega t_2 - \omega k_{42} \cos \omega t_2 \}^{-1}.$$

根据(15)–(17)式, 可得相应的特征方程为

$$\det [\lambda \mathbf{I} - \mathbf{J}_n(\mathbf{X}_Q)] = 0. \quad (18)$$

由(18)式即可得到两个特征值 λ_1 和 λ_2 , 根据 λ_1 和 λ_2 的变化可以判定 V^2 控制 Buck 变换器的稳定运行参数范围. 表 2、表 3 分别给出了输出电容、输出电容 ESR 变化时相应的特征值. 从表 2、表 3 的左列中可以看出, 当一次迭代映射 $\mathbf{x}_{n+1} = f(\mathbf{x}_n)$ 下的特征值逼近 -1 时, 系统发生了倍周期分岔, 从周期 1 态变成周期 2 态, 此时存在二次迭代映射 $\mathbf{x}_{n+2} = f(f(\mathbf{x}_n))$. 类似地, 令 $\mathbf{x}_{n+2} = \mathbf{x}_n = \mathbf{X}_{Q2}$, 可求得不动点 \mathbf{X}_{Q2} 及对应的雅可比矩阵, 最后可以得到相应的特征值, 如的表 2、表 3 的右列所示.

根据表 2、表 3 中的特征值, 可以绘出输出电容、输出电容 ESR 变化时的特征值走向. 以输出电容为例, 图 4(a), (b) 分别示出了 $C = 800\text{--}680 \mu\text{F}$ 时、 $C = 300\text{--}270 \mu\text{F}$ 时的特征值走向, 其中箭头的方向表示 C 减小时系统特征值的移动方向.

表2 输出电容变化时的特征值

一次迭代映射 $f(\cdot)$			二次迭代映射 $f(f(\cdot))$		
$C/\mu\text{F}$	特征值 (λ_1, λ_2)	说明	$C/\mu\text{F}$	特征值 (λ_1, λ_2)	说明
800	-0.9534, 0.5246	周期1	300	-0.6788, -0.0144	周期2
750	-0.9730, 0.5022	周期1	290	-0.7961, -0.0078	周期2
700	-0.9961, 0.4779	周期1	280	-0.8973, -0.0037	周期2
698	-0.9964, 0.4767	周期1	278	-0.9309, -0.0028	周期2
696	-0.9974, 0.4757	周期1	277	-0.9421, -0.0025	周期2
695	-0.9992, 0.4752	周期1	276	-0.9594, -0.0021	周期2
694	-1.0030, 0.4750	倍周期分岔	275	-1.0013, -0.0015	倍周期分岔
693	-1.0049, 0.4745	周期2	274	-1.0046, -0.0013	周期4
690	-1.0085, 0.4731	周期2	273	-1.0252, -0.0010	周期4
680	-1.0168, 0.4681	周期2	270	-1.2971, 0.0007	周期4

表3 输出电容 ESR 变化时的特征值

一次迭代映射 $f(\cdot)$			二次迭代映射 $f^2(\cdot)$		
$R_e/m\Omega$	特征值 (λ_1, λ_2)	说明	$R_e/m\Omega$	特征值 (λ_1, λ_2)	说明
75.0	-0.9877, 0.5022	周期1	33.0	-0.6503, -0.0281	周期2
74.0	-0.9927, 0.4974	周期1	32.0	-0.7639, -0.0184	周期2
73.5	-0.9957, 0.4951	周期1	31.0	-0.8840, -0.0114	周期2
73.2	-0.9974, 0.4937	周期1	30.5	-0.9426, -0.0088	周期2
73.1	-0.9977, 0.4932	周期1	30.3	-0.9616, -0.0079	周期2
73.0	-0.9981, 0.4927	周期1	30.2	-0.9826, -0.0073	周期2
72.9	-1.0005, 0.4923	倍周期分岔	30.1	-1.0020, -0.0067	倍周期分岔
72.8	-1.0030, 0.4919	周期2	30.0	-1.0615, -0.0055	周期4
72.7	-1.0017, 0.4913	周期2	29.9	-1.0986, -0.0047	周期4
72.5	-1.0056, 0.4905	周期2	29.0	-1.2639, 0.0007	周期4

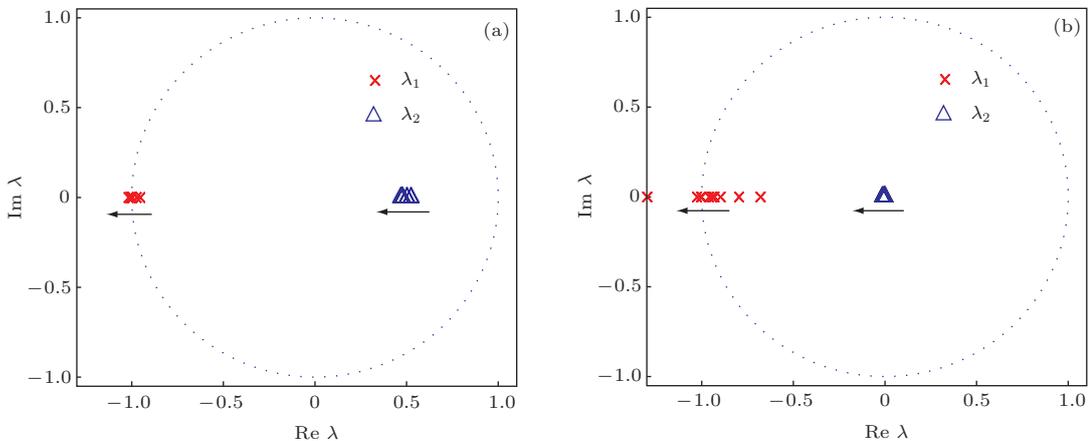


图4 输出电容变化时 V^2 控制 Buck 变换器的特征值走向 (a) 一次迭代映射, $C = 800\text{—}680 \mu\text{F}$; (b) 二次迭代映射, $C = 300\text{—}270 \mu\text{F}$

从图 4(a) 可以明显看出: 随着 C 逐渐减小, 系统的一个实数特征值从 -1 离开单位圆, 表明系统发生了倍周期分岔, 进入周期 2 轨道, 即次谐波振荡状态; 从图 4(b) 可以看出: 在二次迭代映射下, 系统仍然存在一个实数特征值从 -1 离开单位圆的情况, 表明系统再次发生了倍周期分岔, 进入周期 4 轨道. 两次倍周期分岔点处的电容值与图 2(a) 一致, 验证了分岔图的正确性.

3.3 最大 Lyapunov 指数

Lyapunov 指数可以表征系统运动的特征, 它沿某一方向取值的正负, 表示系统在吸引子中相邻轨道沿该方向是平均发散或者收敛, 是目前用于判断非线性系统是否存在混沌行为的主要依据 [20,21]. V^2 控制 Buck 变换器的最大 Lyapunov 指数可表示为

$$\lambda_m = \max(\lambda_1, \lambda_2) = \max \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\text{eig}(\mathbf{J}_n \mathbf{J}_{n-1} \cdots \mathbf{J}_1)| \right], \quad (19)$$

其中, $\text{eig}(\mathbf{J}_n \mathbf{J}_{n-1} \cdots \mathbf{J}_1)$ 为 $\mathbf{J}_n \mathbf{J}_{n-1} \cdots \mathbf{J}_1$ 的特征根的函数, $\max(\lambda_1, \lambda_2)$ 为 λ_1 与 λ_2 两者之间最大值的函数.

根据 (19) 式, 对应于图 2、图 3 的最大 Lyapunov 指数分别如图 5(a), (b) 所示. 由图 5(a) 可以看出, 当 $C > 694 \mu\text{F}$ 时, λ_m 小于零, 表明变换器处于稳定的周期态; 当 $C = 694 \mu\text{F}$ 时, λ_m 上升到零, 对应图 2 中的第一次倍周期点; 当 $275 \mu\text{F} < C < 694 \mu\text{F}$ 时, λ_m 小于零; 当 $C = 275 \mu\text{F}$ 时, λ_m 又从负数上升到零, 对应图 2 中的第二次倍周期点; 当 $245 \mu\text{F} < C < 275 \mu\text{F}$ 时, λ_m 小于零; 当 $C = 245 \mu\text{F}$ 时, λ_m 又从负数上升到零, 对应图 2 中的第三次倍周期点; 当 $C < 236 \mu\text{F}$ 时, 大部分范围内 λ_m 大于零, 表明变换器处于混沌态, 其中有小范围内小于零的 λ_m , 表明变换器存在周期窗.

类似地, 由图 5(b) 可以看出: 当 $R_e > 0.0729 \Omega$ 和 $0.0301 \Omega < R_e < 0.0729 \Omega$ 和 $0.0274 \Omega < R_e < 0.0301 \Omega$ 时, λ_m 均小于零, 表明变换器处于稳定的周期态; 当 $R_e = 0.0729 \Omega$, $R_e = 0.0301 \Omega$ 和 $R_e = 0.0274 \Omega$ 时, λ_m 均从负数上升到零, 分别对应图 3 中的第一次倍周期点、第二次倍周期点和第三次倍周期点; 当 $R_e < 0.0263 \Omega$ 时, 大部分范围内 λ_m 大于零, 表明变换器处于混沌态, 其中也有小范围内小于零的 λ_m , 表明变换器存在周期窗.

图 5(a) 和 (b) 的最大 Lyapunov 指数分别与图 2 和图 3 的分岔图相对应, 验证了分岔图的正确性.

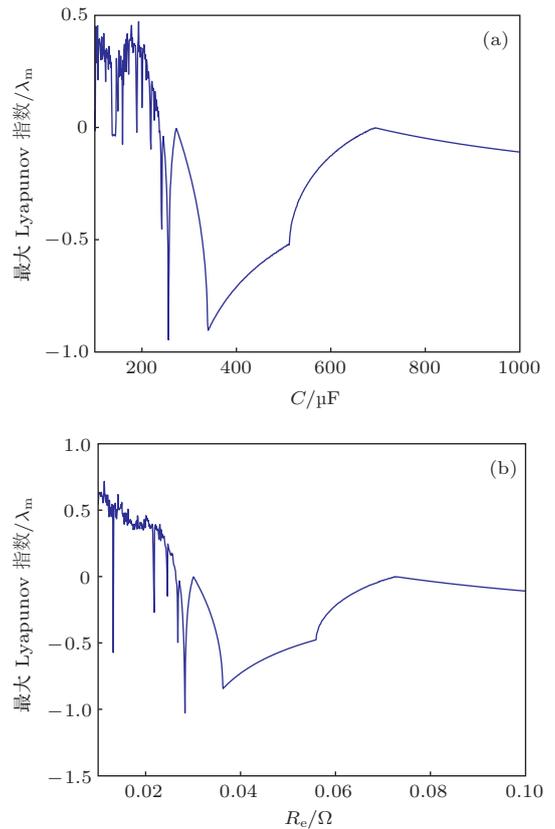


图 5 以 C 和 R_e 为参数的最大 Lyapunov 指数 (a) $C = 100\text{--}1000 \mu\text{F}$; (b) $R_e = 0.01\text{--}0.1 \Omega$

4 典型的时域波形及相轨图

选取与第 3 节相同的仿真参数, 利用 Psim 软件平台, 通过建立电路仿真模型, 可对 V^2 控制 Buck 变换器进行时域仿真分析. 其他参数保持不变, 输出电容 C 变化时, 锁存器输出 V_p 、输出电压 v_o 和电感电流 i_L 的仿真时域波形和 i_L - v_o 相轨图如图 6 所示.

由图 6 可以看出, 当 $R_e = 0.1 \Omega$ 不变: $C = 1000 \mu\text{F}$ 时, V^2 控制 Buck 变换器工作在稳定的周期 1 状态; $C = 470 \mu\text{F}$ 时, 变换器呈现出次谐波振荡现象; $C = 150 \mu\text{F}$ 时, 变换器呈现出 DCM 混沌现象. 当 R_e 不变时, 随着 C (亦即输出电容时间常数 $R_e C$) 的减小, 输出电压从稳定的周期 1 状态逐渐转移到不稳定的 DCM 混沌状态, 仿真结果与第 3 节的动力学行为分析一致.

其他参数保持不变, 输出电容 ESR 变化时, 输出电压 v_o 和电感电流 i_L 的仿真时域波形和 i_L - v_o 相轨图如图 7 所示.

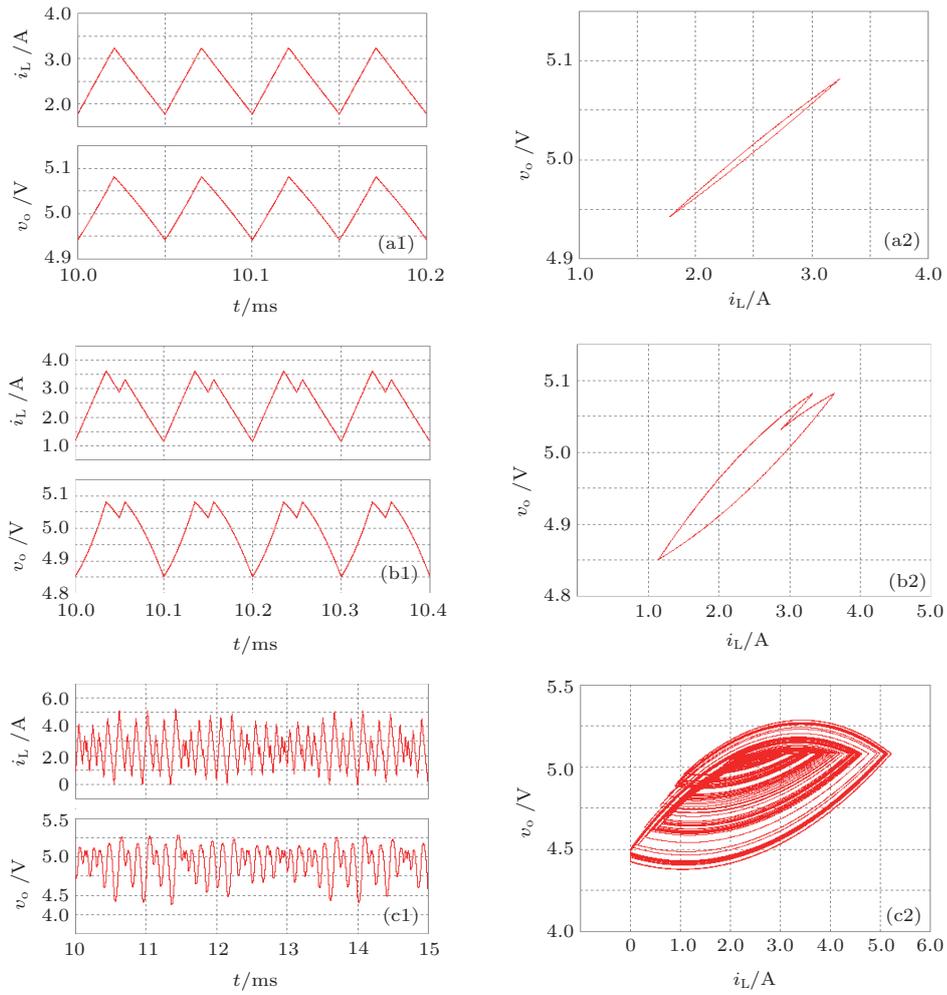


图6 不同输出电容 C 情况下的输出电压和电感电流仿真波形 (a1), (b1) 和 (c1) 为时域波形, (a2), (b2) 和 (c2) 为相轨图: (a) $C = 1000 \mu\text{F}$; (b) $C = 470 \mu\text{F}$; (c) $C = 150 \mu\text{F}$

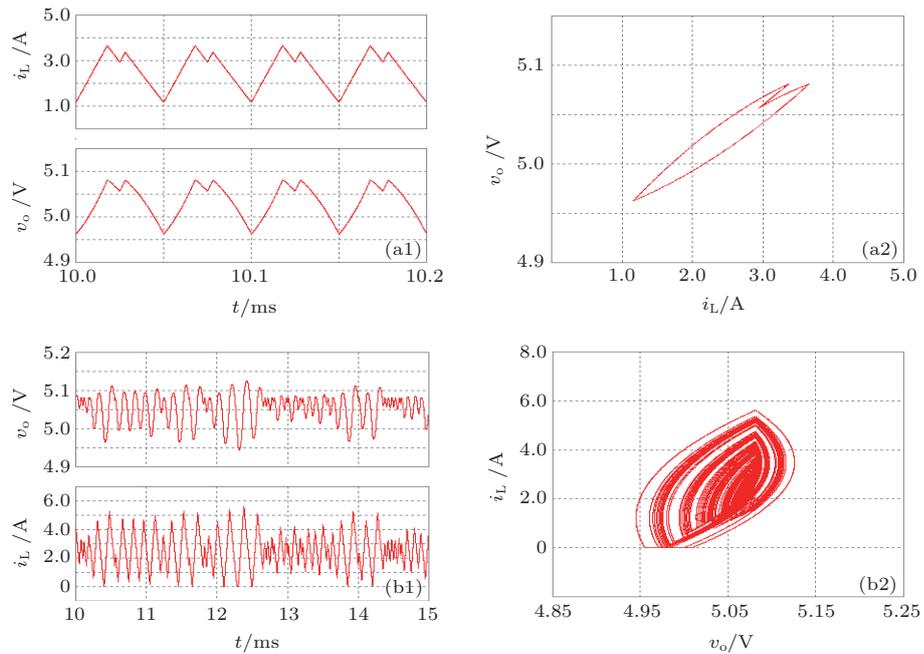


图7 不同 ESR 情况下的输出电压和电感电流仿真波形 (a1) 和 (b1) 为时域波形, (a2) 和 (b2) 为相轨图: (a) $R_e = 0.05 \Omega$; (b) $R_e = 0.018 \Omega$

当 $C = 1000 \mu\text{F}$, $R_e = 0.1 \Omega$ 的仿真波形和相轨图与图 6 (a1), (b1) 一致, V^2 控制 Buck 变换器工作在稳定的周期 1 状态. 由图 7 可以看出, 当 $C = 1000 \mu\text{F}$ 不变: $R_e = 0.05 \Omega$ 时, 变换器呈现出次谐波振荡现象; $R_e = 0.018 \Omega$ 时, 变换器呈现出 DCM 混沌现象. 当 C 不变时, 随着 R_e (亦即输出电容时间常数 $R_e C$) 的减小, V^2 控制 Buck 变换器从稳定的周期 1 状态逐渐转移到不稳定的 DCM 混沌状态, 仿真结果与第 3 节动力学行为分析一致.

5 实验验证

选择与第 4 节仿真相同的电路参数, 建立相应的实验平台, 其中负载电阻采用电子负载, 误差放

大器采用 LM324, 比较器采用 KA319, RS 锁存器采用或非门构成, MOSFET 开关管采用 IR2125 驱动, 时钟脉冲 CP 由双踪信号发生器提供. 输出电容 ESR 变化 (采用多个瓷片电容并联, 再串联不同电阻) 时, 输出电压 v_o 和电感电流 i_L 的实验时域波形和 i_L-v_o 相轨图如图 8 所示.

从图 8 可以看出: 当 $R_e = 0.1 \Omega$ 时, 变换器处于稳定运行的周期 1 状态; $R_e = 0.05 \Omega$ 时, 变换器处于次谐波振荡状态; $R_e = 0.018 \Omega$ 时, 变换器处于 DCM 混沌状态. 随着 R_e 的减小, V^2 控制 Buck 变换器逐渐从稳定运行的周期 1 状态转移至 DCM 混沌状态. 对比图 6、图 7 和图 8 可以发现, 实验结果与仿真结果一致, 验证了仿真结果和理论分析的正确性.

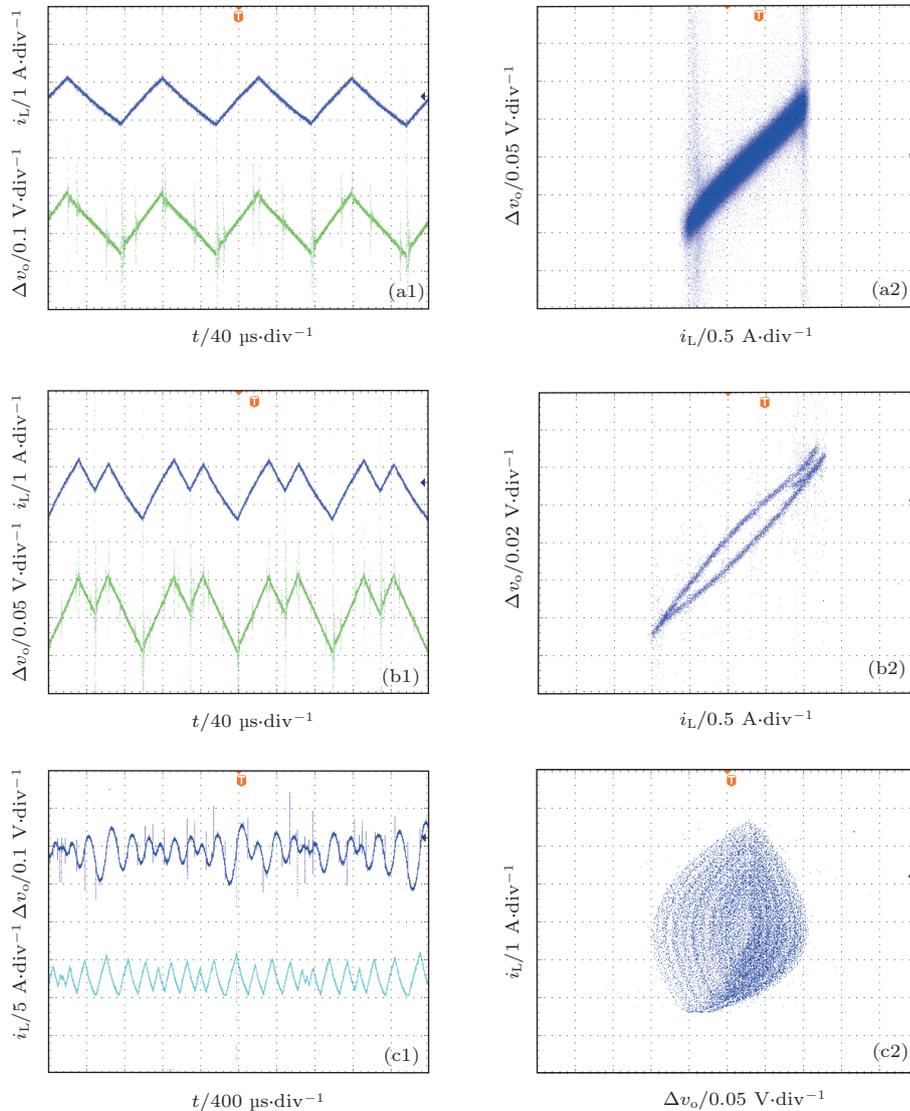


图 8 不同 ESR 情况下的输出电压和电感电流实验波形 (a1), (b1), (c1) 为时域波形; (a2), (b2), (c2) 为相轨图: (a) $R_e = 0.1 \Omega$; (b) $R_e = 0.05 \Omega$; (c) $R_e = 0.018 \Omega$

6 结 论

本文通过不同开关工作模式下的Buck变换器的状态方程,推导了 V^2 控制Buck变换器的二阶离散迭代模型,深入研究了输出电容时间常数对 V^2 控制Buck变换器的动力学特性的影响.利用分岔图分析了输出电容时间常数由大向小变化时,变换器从稳定的CCM周期1态、CCM周期2态、CCM周期4态、CCM周期8态、CCM混沌态、DCM混沌状态之间逐渐转移的动力学特性.在离散迭代模型的基础上推导了 V^2 控制Buck变换器在不动点处的雅可比矩阵,通过雅可比矩阵的特征值变化和最大Lyapunov指数研究了系统的稳定性.研究结果表明, V^2 控制Buck变换器的动力学特性和输出电容时间常数密切相关,输出电容时间常数越大,变换器越稳定;输出电容时间常数越小,变换器越容易进入DCM混沌区.最后,采用Psim仿真和电路实验验证了离散迭代模型和理论分析的正确性.本文的研究结果对 V^2 控制Buck变换器的输出电容选择和参数设计具有重要的指导意义.

参考文献

- [1] Goder D, Pelletier W R 1996 *Proceeding of HFPC' 1996* **19**
- [2] Li J, F C 2009 *IEEE Tran. Circuits and Systems, Part I* **57** 2552
- [3] Wang F Y, Xu J P, Xu J F 2005 *Proc. CSEE* **25** 67 (in Chinese) [王凤岩, 许建平, 许峻峰 2005 中国电机工程学报 **25** 67]
- [4] He S Z, Zhou G H, Xu J P, Bao B C, Yang P 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 110503 (in Chinese) [何圣仲, 周国华, 许建平, 包伯成, 杨平 2013 物理学报 **62** 110503]
- [5] Zhou Y F, Chen J N, Tse C K, Ke D M, Shi L X, Sun W F 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3676 (in Chinese) [周宇飞, 陈军宁, 谢智刚, 柯导明, 时龙兴, 孙伟峰 2004 物理学报 **53** 3676]
- [6] Zhou G H, Xu J P, Bao B C, Zhang F, Liu X S 2010 *Chin. Phys. Lett.* **27** 090504
- [7] Wang F Q, Ma X K, Yan Y 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 060510 (in Chinese) [王发强, 马西奎, 闫晔 2011 物理学报 **60** 060510]
- [8] Lu W G, Zhou L W, Luo Q M, Du X 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6275 (in Chinese) [卢伟国, 周维维, 罗全明, 杜雄 2007 物理学报 **56** 6275]
- [9] Dai D, Ma X K, Li X F 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2729 (in Chinese) [戴栋, 马西奎, 李小峰 2003 物理学报 **52** 2729]
- [10] Bao B C, Xu J P, Liu Z 2009 *Chin. Phys. B* **18** 4742
- [11] Wang F Q, Zhang H, Ma X K 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2842 (in Chinese) [王发强, 张浩, 马西奎 2008 物理学报 **57** 2842]
- [12] Bao B C, Xu J P, Liu Z 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2949 (in Chinese) [包伯成, 许建平, 刘中 2009 物理学报 **58** 2949]
- [13] Yang P, Bao B C, Sha J, Xu J P 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 010504 (in Chinese) [杨平, 包伯成, 沙金, 许建平 2013 物理学报 **62** 010504]
- [14] Zhou G H, Xu J P, Bao B C 2012 *Int. J. Bifurc. Chaos* **22** 1250008
- [15] Wang F Q, Zhang H, Ma X K 2012 *Chin. Phys. B* **21** 020505
- [16] Zhou G H, Xu J P, Bao B C, Jin Y Y 2010 *Chin. Phys. B* **19** 060508
- [17] M. Veerachary, 2003 *Proceeding of ISCAS' 03* **344**
- [18] Xie F, Yang R, Zhang B 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 8393 (in Chinese) [谢帆, 杨汝, 张波 2010 物理学报 **59** 8393]
- [19] Banerjee S, Chakrabarty K 1998 *IEEE Trans. Power Electronics* **13** 252
- [20] Zhang B, Li P, Qi Q 2002 *Proc. CSEE* **22** 81 (in Chinese) [张波, 李萍, 齐群 2002 中国电机工程学报 **22** 81]
- [21] Bao B C 2013 *An Introduction to Chaotic Circuits* (Beijing: Science Press) p164 (in Chinese) [包伯成 2013 混沌电路导论 (北京: 科学出版社) 第 164 页]

Effect of output capacitance time-constant on dynamic characteristics of V^2 -controlled buck converter*

He Sheng-Zhong[†] Zhou Guo-Hua Xu Jian-Ping Wu Song-Rong Chen Li

(Key Laboratory of Magnetic Suspension Technology and Maglev Vehicle, Ministry of Education, School of Electrical Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

(Received 11 November 2013; revised manuscript received 17 March 2014)

Abstract

The second-order discrete iterative map model of V^2 -controlled Buck converter is established, based on which, the bifurcation diagrams with variation of output capacitance and its equivalent series resistance (ESR) are obtained, and the effect of output capacitance time-constant on the dynamic characteristics of V^2 -controlled Buck converter is investigated. It is found that with gradual reduction of output capacitance time-constant, the V^2 -controlled Buck converter shows the evolutive dynamic behavior from continuous conduction mode (CCM) period-1 to CCM period-2, CCM period-4, CCM period-8, CCM chaos, and discontinuous conduction mode (DCM) chaos. Jacobi matrix at a fixed point is also derived. According to this, the converter stability is analyzed by using characteristic values and maximum Lyapunov exponent, which validates the correctness of bifurcation analysis. Finally, the simulation and experimental circuits are set up, and the correctness of the theoretical analysis is verified by simulation and experimental results.

Keywords: switching converter, V^2 -control, output capacitance time-constant, dynamics

PACS: 05.45.-a

DOI: 10.7498/aps.63.130501

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 51177140, 61371033), the Specialized Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education, China (Grant No. 20130184120011), the Sichuan Provincial Youth Science and Technology Fund, China (Grant No. 2013JQ0033), and the Fundamental Research Funds for the Central Universities of China (Grant Nos. SWJTU11CX029, 2682013ZT20).

[†] Corresponding author. E-mail: szhe_0@swjtu.edu.cn