基于符号动力学的开关变换器时间不可逆性分析*

徐红梅† 金永镐 金璟璇

(延边大学工学院, 延吉 133002)

(2014 年 1 月 16 日收到; 2014 年 3 月 4 日收到修改稿)

本文提出了一种采用符号动力学和相对熵理论分析开关变换器非线性特性的新方法. 根据迭代映射描述的开关变换器非线性系统得到离散数值序列, 基于拓扑共轭理论将其转化为符号序列, 通过前向序列和后向序列概率计算该符号序列的相对熵. 文中以一阶电压反馈 DCM Boost 变换器为例, 研究结果表明, 开关变换器存在时间不可逆性, 相对熵数值能够量化开关变换器处于混沌状态时离开平衡点的距离, 从而得到一种新的可量化的开关变换器非线性动力学行为指标.

关键词: 符号动力学, 开关变换器, 相对熵, 时间不可逆性

PACS: 05.45.–a **DOI:** 10.7498/aps.63.130502

1 引 言

开关变换器作为供电电源的核心装置, 对于整个系统的稳定运行具有重要意义. 由于二极管和场效应管等器件的存在, 使得开关变换器成为典型的非线性系统. 对于开关变换器非线性特性的研究, 主要从定性和定量两方面分析. 文献 [1] 详细分析了开关变换器的 C 型倍周期分岔机理, 文献 [2] 对开关变换器的切分岔现象进行了全面论证, 文献 [3] 首次提出了开关变换器基于三个频率的伪周期特性, 文献 [4] 采用带权 Lemple-Ziv 算法复杂度分析开关变换器分段光滑系统的非线性特性. 上述方法都属于定性方法. 但是, 对于开关变换器这个典型的非线性系统, 仅进行定性分析还不足以深刻认识其本质特征. 定量度量开关变换器的复杂程度, 不仅有助于深刻理解开关变换器的内在变化规律, 还可以依据开关变换器的特性进行预测和控制, 具有潜在的实际应用前景.

为了定量描述开关变换器的非线性特性, 许多学者已采用 Lyapunov 指数、频谱和熵等指标对开关变换器的特性进行定量分析. 文献 [5] 提出了从混沌序列中估计最大 Lyapunov 指数和噪声水平的方法, 文献 [6] 提出了一种精确配置离散动力系统所有 Lyapunov 指数的方法, 文献 [7] 基于不变分布方法得到了开关变换器混沌频谱特性量化方法, 文献 [8] 运用模块熵量化开关变换器的倍周期分岔和混沌行为, 文献 [9] 采用信息熵理论论证了开关变换器的熵特性不具有初值依赖性. 但是, Lyapunov 指数只能辨别系统什么时刻出现了混沌现象, 连续的频谱状态能够证明开关变换器处于混沌状态, 模块熵和信息熵是从整体的统计意义度量开关变换器混沌系统的特性, 上述方法对于开关变换器处于混沌状态时离开平衡状态的具体度量却无能为力.

2007 年, Porporate 等 [10] 提出了运用相对熵的方法量化系统的时间不可逆性, 并指出, 系统的相对熵值反映了系统远离平衡状态的程度. 近年来, 相对熵在生理时间序列 [11–13] 中得到了广泛研究. 从微观角度来讲, 开关变换器中的混沌序列和生理时间序列具有类似的特性, 因此, 相对熵是否可以运用于开关变换器的非线性研究是一个值得研究的问题. 本文以 DCM Boost 变换器为例, 运用符号动力学相关理论将离散数值序列转化为符号序列, 结合分岔图的定性方法和相对熵的定量方法来分

* 吉林省科技厅 (批准号:201115224) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: hmxu@ybu.edu.cn

析开关变换器的混沌状态离开平衡状态的度量方法, 为揭示开关变换器的非线性特性提供新的思路和方法.

2 相关研究

2.1 拓扑共轭

考虑相空间X, 根据动力学F把X映射到自身, 即$F: X \to X$, 通过动力学F生成各种符号序列空间ψ, 忽略相空间X中各个点x的精确位置, 依据落在不同区间而分配相应的符号s, 进行粗粒化操作并形成对应关系$\Sigma: x \to s$, 移位操作定义了符号序列空间ψ自身的动力学关系:$\lambda: \psi \to \psi$, 其中λ定义为移位算子, 它是通过将符号序列中第一个符号去掉后得到的, 即

$$\lambda(s_0 s_1 s_2 \cdots s_n \cdots) = s_1 s_2 s_3 \cdots s_n \cdots \tag{1}$$

(1)式代表动力学系统的演化过程, 即移位算子λ和动力学映射F是一一对应的关系[14].

对于连续性, 可以通过对符号序列进行度量得到. 令u和v分表示两个符号序列, 则u和v之间的度量为

$$d(u,v) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|u_i - v_i|}{2^i}, \tag{2}$$

其中, u_i和v_i的取值为二进制数0或者1. 因此, (2)式又可以改写为

$$d(u,v) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\delta_i}{2^i},$$
$$\delta_i = \begin{cases} 0, & u_i = v_i, \\ 1, & u_i \neq v_i. \end{cases} \tag{3}$$

当u_i和v_i前n个符号相同时, 则有

$$\begin{aligned} d(u,v) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{|u_i - v_i|}{2^i} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|u_i - v_i|}{2^i} \\ &\leqslant \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^n}. \end{aligned} \tag{4}$$

设任意给定正数$\varepsilon > 0$, 取n使得$\varepsilon > 1/2^n$, 且令$\zeta = 1/2^{n+1}$, 则对于满足$d(u,v) < \zeta$的任意u和v应该有$u_i = v_i$ $(i = 1, 2, 3, \cdots, n+1)$, 即$\lambda(u)$和$\lambda(v)$的前$n+1$项完全相同, 从而$d(\lambda(u), \lambda(v)) \leqslant 1/2^n < \varepsilon$, λ是连续的.

λ和F一一对应且连续, 因此λ和F拓扑共轭. 根据拓扑共轭理论, 复杂的动力学系统特性研究可以转化为相对简单的符号序列的研究.

2.2 相对熵

相对熵是两个随机分布之间距离的度量, 用于衡量两个随机分布之间的相似程度. 在统计学中, 它对应的是似然比的对数期望. 根据KL (Kullback-Leibler divergence)散度理论[15], 离散型随机变量的相对熵定义为

$$D(P_{\mathrm{f}} \| P_{\mathrm{b}}) = \sum_{s \in S} P_{\mathrm{f}}(s) \log \frac{P_{\mathrm{f}}(s)}{P_{\mathrm{b}}(s)}, \tag{5}$$

其中, $P_{\mathrm{f}}(s)$和$P_{\mathrm{b}}(s)$分别为前向序列和后向序列的概率分布, 且$S = 2^m$, m为编码长度. (5)式代表的相对熵具有以下性质:

1) 当P_{f}和P_{b}各自总和均为1, 且对于任何s均需满足$P_{\mathrm{f}}(s) \geqslant 0$和$P_{\mathrm{b}}(s) \geqslant 0$;

2) 当$P_{\mathrm{f}}(s) = 0$或$P_{\mathrm{b}}(s) = 0$时, 规定其对应的相对熵为0;

3) 相对熵不具有对称性, 即$D(P_{\mathrm{f}} \| P_{\mathrm{b}}) \neq D(P_{\mathrm{b}} \| P_{\mathrm{f}})$.

符号化处理后的离散序列, 根据滑动窗口方法分别向前和向后划分符号序列, 将其转化为十进制的表示形式, 分别计算两个序列中对应字出现的概率分布, 然后根据(5)式计算相对熵. 文献[16]指出处于非稳定状态的电子电路中存在时间非对称性. 文献[17]得出结论, 任何物理系统只要存在时间非对称性就存在时间不可逆性. 相对熵理论通常用于衡量系统时间不可逆性的大小. 熵的本质是变化的方向性和时间的方向性, 只要相对熵可以计算且大于等于零, 就表明存在时间不可逆性[18]. 自然界的一切自发进行过程都是朝熵增方向进行的, 在熵增原理的前提下, 相对熵量化了系统状态和时间不可逆性之间的关系[19,20], 相对熵值较小对应于比较有序的状态, 相对熵值较大对应于比较无序的状态, 处于稳定可逆过程的相对熵值为零.

3 开关变换器的相对熵分析

以一阶电压反馈DCM Boost变换器为例, 计算不同反馈增益k和初值x_0对应的符号序列产生的相对熵, 说明相对熵理论对于开关变换器混沌特性分析的适用性, 并将这种影响量化.

3.1 开关变换器数值序列的符号化

当开关变换器处于不连续工作模式时, 可以视为一维动力系统. 以一阶电压反馈DCM Boost变换器为例, 讨论开关变换器的精确离散映射的符号化时间序列. 电压型反馈型DCM Boost变换器原理图如图1所示, 以反馈增益k为参数的分岔图如图2所示. 其中E为输入电压, X为期望的稳态输出电压, D为稳态占空比, k为反馈比例增益, 一阶迭代映射方程近似描述为[21]

$$x_{n+1} = f(k, x_n) = \alpha x_n + \frac{\beta h(d_n)^2 E^2}{x_n - E}, \tag{6}$$

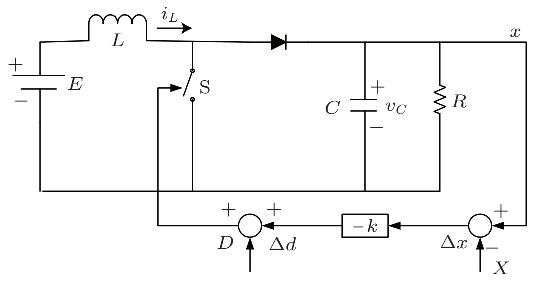

图1 电压反馈型DCM Boost变换器原理图

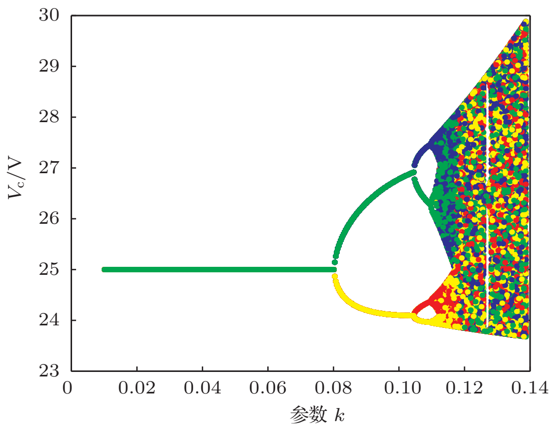

图2 电压反馈型DCM Boost变换器分岔图

其中, x_n代表第n次迭代电感电流为零时刻的电容电压, 式中,

$$\alpha = 1 - \frac{T}{RC} + \frac{T^2}{2C^2R^2}, \tag{7}$$

$$\beta = \frac{T^2}{2LC}, \tag{8}$$

$$h(d_n) = \begin{cases} 0, & d(x_n) < 0, \\ 1, & d(x_n) > 0, \\ d(x_n), & \text{其他}, \end{cases} \tag{9}$$

$$d(x_n) = D - k(x_n - X). \tag{10}$$

变换器参数选取如下: 开关周期$T = 333.33$ μs, $E = 16$ V, $C = 222$ μF, $R = 12.5$ Ω, $L = 208$ μH, 输出电压$X = 25$ V, 占空比$D = 0.2874$, 将参数代入(7)式和(8)式, 得出$\alpha = 0.8872$, $\beta = 1.2$当开关变换器处于混沌状态时根据(6)式得到连续的返回映射如图3所示, 其中$x_{\rm p}$称为定点, 是映射函数与对角线的交点. 根据文献[8]提出的拓扑判据分区方法, 将映射函数的最低点$C = 26.4$定义为临界点, 可以定义为“0”或者“1”, 单调上升分支定义为“0”, 单调下降分支定义为“1”, 令

$$s_n = \begin{cases} 0, & x_n > x_c, \\ 1, & x_n \leqslant x_c, \end{cases} \tag{11}$$

得到离散数值序列$\{s_0, s_1, s_2, \cdots, s_n \cdots\}$, 数值序列和符号序列之间的转换关系如图4所示. 这样就可以将复杂的动力学特性分析转化为相对简单的符号序列研究.

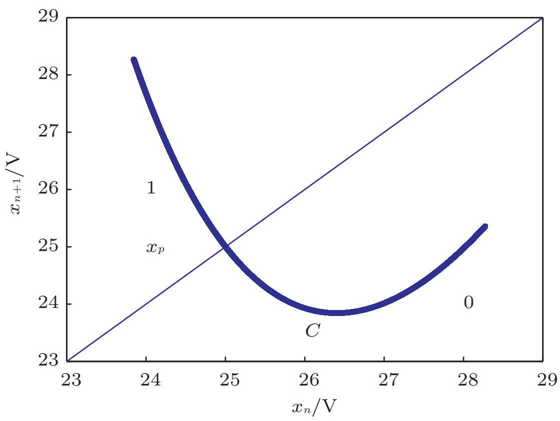

图3 电压反馈型DCM Boost变换器返回映射($k = 0.12$)

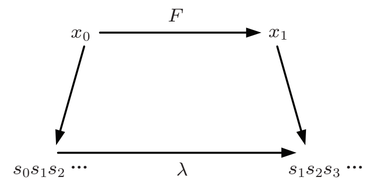

图4 电压反馈型DCM Boost变换器拓扑共轭示意图

3.2 DCM Boost变换器的相对熵

计算DCM Boost变换器相对熵的仿真实验规则如下: 实验是在Matlab7.0环境下进行, 系统采用默认精度, 双精度浮点数64 bit, 小数可以达到10^{-13}. 反馈比例增益参数k在[0.1, 0.14]之间取值, 系统初值x_0取值范围为[23.7, 29.9], 根据(6)式迭代映射得到离散混沌序列, 所有数据不做删减均

计入计算, 按照 (11) 式定义的数值符号转化原则进行计算, 得到由 0 和 1 组成的符号序列. 取符号序列长度为 3000, 选取 8 位字长编码, 得到一阶 DCM Boost 变换器的相对熵如图 5 所示.

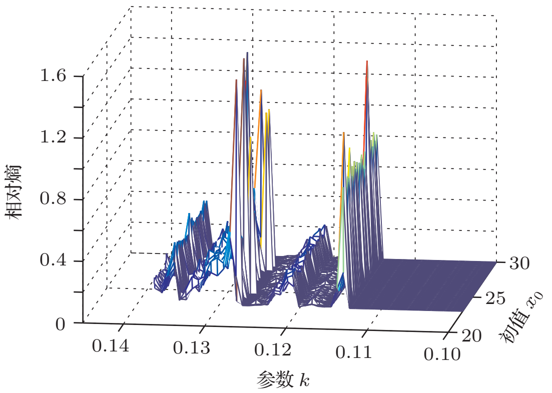

图 5 电压反馈型 DCM Boost 变换器相对熵

结合图 2 整体分岔图和图 6 局部放大分岔图, 由图 5 中电压反馈型 DCM Boost 变换器相对熵反映的信息归纳如下:

1) 当开关变换器处于周期态时, 相对熵值为零, 随着周期数增加, 相对熵值增大. 反馈比例增益参数 k 处于 [0.1112, 0.1260] 范围内时, 由倍周期分岔演变形成的吸引子相遇, 使开关变换器处于阵发混沌状态, 相对熵值较小, 当 k 处于 [0.126, 0.128] 时, 分岔图缩为三条轨迹, 出现吸引的周期 3 轨道, 即出现了切分岔. 根据周期 3 意味着混沌理论, 反馈比例增益参数 k 大于 0.128 以后开关变换器进入完全混沌状态, 对应的相对熵值较大. 抛开突变点情况, 随着反馈比例增益参数 k 增加, 混沌序列取值范围增大, 开关变换器混沌系统远离平衡状态程度增强, 从而使得序列相对熵值随着反馈比例增益参数 k 的增加而增大.

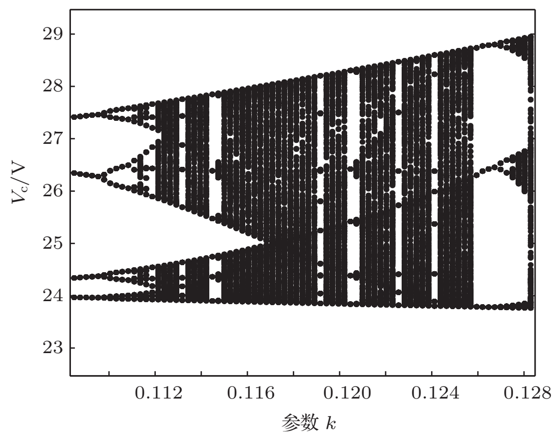

图 6 电压反馈型 DCM Boost 变换器局部放大分岔图

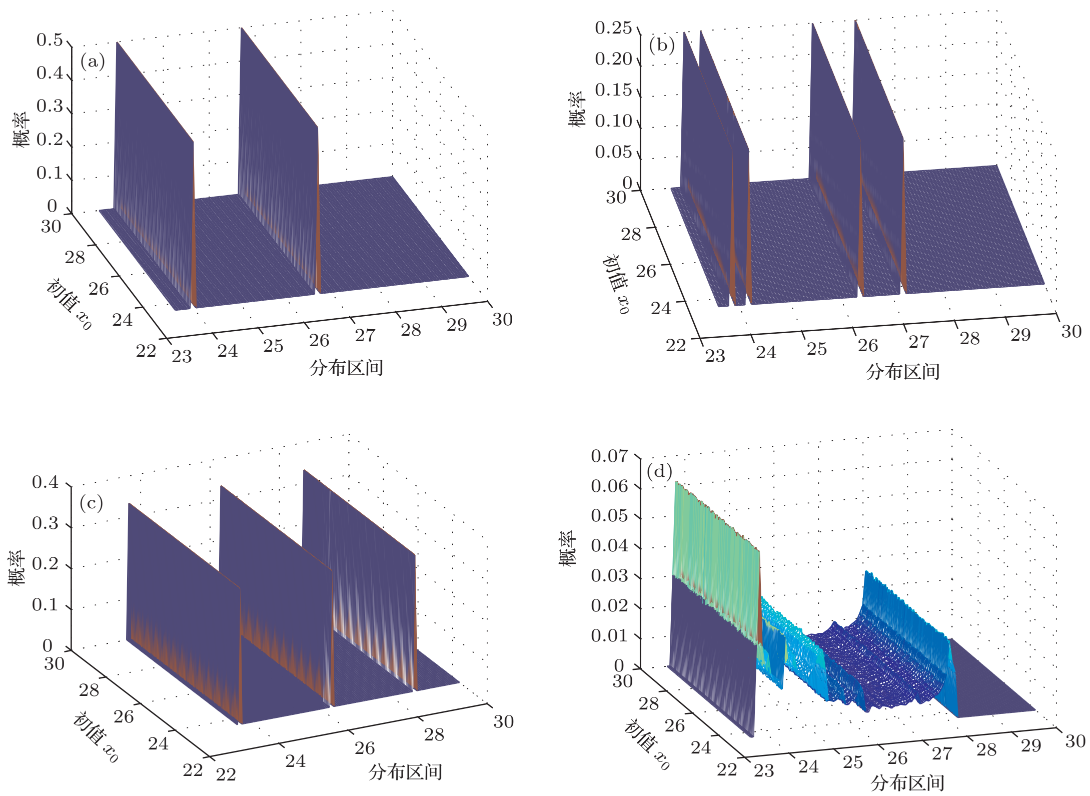

图 7 电压反馈型 DCM Boost 变换器数值序列分布图 (a) $k = 0.09$; (b) $k = 0.1061$; (c) $k = 0.1264$; (d) $k = 0.1372$

2) 当反馈比例增益参数k大于0.1372时, 相对熵值反而出现了下降的趋势. 这是因为当反馈比例增益参数k达到一定数值时, 开关变换器处于各态历经的完全混沌状态, 将数值序列转化为符号序列后, 前向和后向序列差别减小, 从而出现相对熵值减小的趋势.

3) 在熵值递增过程中会出现一些突变点情况, 即在特定反馈比例增益参数k处, 开关变换器迭代映射没有进入混沌状态, 而是停留在周期分岔状态, 并且周期点附近数据稠密, 所有数据都集中在某几个统计区间, 导致这些突变点的相对熵值迅速增大, 图7分别给出了数据长度$L = 100000$时, 对数值序列进行100个分区, 不同反馈增益k对应的数值序列统计分布情况也证明了这一点.

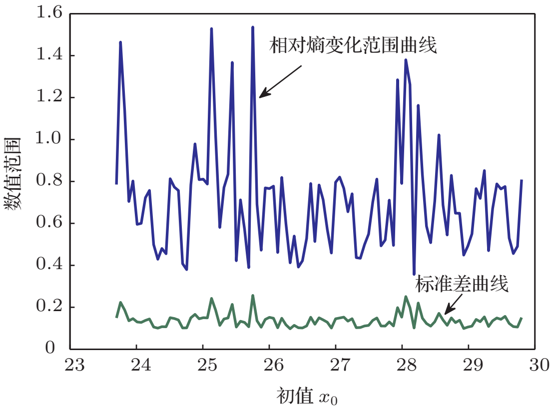

图8 DCM Boost变换器不同初值对应的相对熵变化范围及标准差曲线

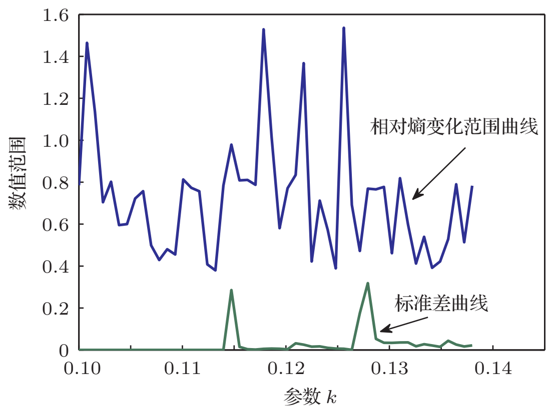

图9 DCM Boost变换器不同参数k相对熵变化范围及标准差曲线

4) 为了全面衡量开关变换器处于混沌状态时离开平衡点的距离, 分别计算由不同初值x_0和反馈比例增益参数k对应的相对熵变化范围及标准差曲线如图8和图9所示. 从图中可以得出, 不同参数k对应的相对熵变化范围明显不同, 从倍周期状态刚进入阵发混沌状态、从阵发混沌状态进入切分岔状态时刻及从切分岔状态进入各态历经的完全混沌状态时刻的相对熵及变化范围明显不同, 并从数值上进一步体现出来, 从而可以对开关变换器处于混沌状态时离开平衡点的距离进行量化分析处理.

5) 在反馈比例增益参数k取值范围内, 无论系统初值x_0如何取值, 处于混沌状态的开关变换器相对熵值变化趋势相同, 从而证明开关变换器系统的相对熵不具有初值依赖性.

4 结 论

本文提出一种基于符号动力学和相对熵理论分析开关变换器非线性特性的新方法. 通过对一阶DCM Boost变换器不同参数对应的相对熵分析结果表明, DCM Boost变换器相对熵值可以计算且大于等于零, 证明开关变换器混沌系统存在时间不可逆性, 从而得到开关变换器混沌系统一些新的特性: 1) 开关变换器处于周期态时相对熵值为零, 进入混沌状态时相对熵为大于或等于零的数值, 尤其是从周期态进入弱混沌态、出现切分岔状态及从切分岔进入强混沌状态时相对熵值会出现明显的突变; 2) 随着反馈比例增益参数k的增加, 序列的相对熵值增大, 表明开关变换器混沌系统的相对熵特性由反馈比例增益参数k决定; 3) 初值x_0的变化基本没有改变序列的相对熵值变化趋势, 相对熵变化范围及标准差趋于稳定, 从而证明了开关变换器混沌系统的相对熵不具有初值依赖性. 由于相对熵值可以量化开关变换器的混沌状态离开平衡状态的距离, 从而可以对DC-DC变换器混沌系统的变化趋势做出合理的预判, 为揭示开关变换器的非线性特性提供新的思路和方法.

参考文献

[1] Laugesen J L, Mosekilde E, Zhusubaliyev Z T 2012 *Phys. D* **241** 488

[2] Xie L L, Gong R X, Zhao H Z, Ma X H 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 058401 (in Chinese)[谢玲玲, 龚仁喜, 卓浩泽, 马献花 2012 物理学报 **61** 058401]

[3] Giaouris D, Banerjee S, Imrayed O, Mandal, K, Zahawi B, Pickert V 2012 *IEEE Trans. Circuit and Syst. I* **59** 207

[4] Xie F, Yang R, Zhang B 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 110504 (in Chinese)[谢帆, 杨汝, 张波 2012 物理学报 **61** 110504]
[5] Yao T L, Liu H F, Xu J L, Li W F 2012 *Chaos* **22** 033102
[6] Chen X, Qiu S S 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 7630 (in Chinese)[陈旭, 丘水生 2010 物理学报 **59** 7630]
[7] Yang R, Zhang B 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5667 (in Chinese)[杨汝, 张波 2006 物理学报 **55** 5667]
[8] Wang X M, Zhang B, Qiu D Y 2011 *IEEE Trans. on Power Electronics* **26** 2101
[9] Xu H M, Jin Y G, Gou S X 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 248401 (in Chinese)[徐红梅, 金永镐, 郭树旭 2013 物理学报 **62** 248401]
[10] Porporato A, Rigby J R, Daly E 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 094101
[11] Costa M, Goldberger A L, Peng C K 2010 *Phys. Rev. Lett.* **95** 198102
[12] Camillo C, Enrico R 2007 *Chaos* **32** 1649
[13] Bian C H, Ning X B 2004 *Chin. Phys.* **13** 633
[14] Yang R, Zhang B, Zhao S B, Lao Y J 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 3756 (in Chinese)[杨汝, 张波, 赵寿柏, 劳裕锦 2010 物理学报 **59** 3756]
[15] Rached Z, Alajaji F, Campbell L L 2004 *IEEE Trans. on Information Theory.* **50** 917
[16] Andrieux D, Gaspard P 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 150601
[17] Muriel A 2013 *Phys. Lett. A* **377** 1161
[18] Zhang M, Wang J 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 038701 (in Chinese)[张梅, 王俊 2013 物理学报 **62** 038701]
[19] Huang J H, Liu N H, Liu J T, Yu T B, He X 2010 *Chin. Phys. B* **19** 110312
[20] Lu H X, Zhao Bo 2006 *Chin. Phys.* **15** 1914
[21] Tse C K 1994 *IEEE Trans. Circuit and Syst. I* **41** 16

Time irreversibility analysis of converter based on symbolic dynamics*

Xu Hong-Mei† Jin Yong-Gao Jin Jing-Xuan

(*College of Engineeing, Yanbian University, Yanji 133002, China*)

(Received 16 January 2014; revised manuscript received 4 March 2014)

Abstract

A new method based on symbobic dynamics and relative entropy theory is proposed to examine the nonlinear behaviours of converters. Firstly, the discrete numerical sequence is obtained from iteration map, which is then transferred to a symbol-time series according to the topological conjugation, and the relative entropy is calculated by means of forward and backward probabilities. This paper takes a first one-order voltage feedback DCM Boost converter as an example, and the result shows that the relative entropy, which can measure quantitatively the distance apart from equilibrium when converter lies in a chaotic state, is a new and quantified nonlinear dynamic behaviours which has not been used in converters yet.

Keywords: symbolic dynamics, converters, relative entropy, time irreversibility

PACS: 05.45.–a **DOI:** 10.7498/aps.63.130502

* Project supported by the Science & Technology Department of Jilin Province, China (Grant No. 201115224).

† Corresponding author. E-mail: hmxu@ybu.edu.cn