

# 单-双模组合压缩热态的纠缠性质及在量子隐形传态中的应用\*

刘世右 郑凯敏 贾芳 胡利云<sup>†</sup> 谢芳森

(江西师范大学物理与通信电子学院, 南昌 330022)

(2014年2月9日收到; 2014年3月13日收到修改稿)

基于单-双模组合压缩真空态一定范围内能够获得压缩增强的效果, 引入单-双模组合压缩热态(DSMST), 讨论其纠缠性质. 利用 Weyl 编序算符在相似变换下的不变性, 简洁方便地导出了 DSMST 的纠缠度-负对数值, 并给出了当热效应存在时保持纠缠的条件. 研究表明: 与通常的双模压缩态相比, 随着参数的增加, DSMST 的纠缠度增加. 作为 DSMST 的应用, 利用其实现相干态的量子隐形传输. 结果表明: 不同于纠缠度随压缩参数增加, 保真度获得改善是有条件的, 该条件恰好就是一正交分量涨落出现压缩增强的参数区域. 此外, 解析推导了有效隐形传输保真度 ( $> 1/2$ ) 的条件.

**关键词:** 单-双模组合压缩热态, Wigner 函数, 纠缠, 量子隐形传态

**PACS:** 03.67.-a, 42.50.Dv, 03.65.Wj, 03.67.Mn

**DOI:** 10.7498/aps.63.140302

## 1 引言

非经典量子态在量子光学中扮演着重要的角色, 对量子物理的基本原理的理解也起到重要作用, 并且在量子计算与量子通信等领域中得到诸多的应用. 一般而言, 量子态的非经典特性可以通过量子态的量子统计特点来表现. 为了获取非经典态, 人们提出了诸多方法, 如对高斯态进行光子扣除或增加操作; 通过增加(扣除)光子也可以使一些量子态得到较深程度的压缩<sup>[1]</sup>, 从而改善量子态的非经典性质. 研究者提出了光子扣除压缩热态, 并通过  $Q$  分布、光子数分布、Wigner 函数等准概率分布来研究该量子态的非经典特性. 特别地, 利用 Wigner 函数的负值特征可以很好地讨论量子态的非经典性质, 因而, Wigner 函数的负值特征被看作是光场的高度非经典特性的一个重要标志<sup>[2]</sup>.

量子纠缠态作为一类典型的量子态, 是量子计算与量子信息中的重要资源之一. 纠缠在量子信息

处理中起着重要的作用, 如量子隐形传输、密集编码、量子克隆等. 近年来, 各种纠缠态也引起了实验和理论物理学家的广泛关注<sup>[3-8]</sup>, 如双模压缩真空态就是一类典型的连续变量的纠缠态. 为更好地实现量子信息与量子计算任务, 人们期望制备出高纠缠度、高隐形传输保真度、强抗退相干能力的纠缠源, 这也是目前量子信息研究中的重要课题之一. 这就要求人们进一步提出满足要求的高纠缠度的纠缠源. 值得注意的是, Fan<sup>[9]</sup> 理论上提出了一类新的纠缠态——单-双模组合压缩真空态(它包含了两个压缩参数, 由单-双模压缩算符作用于真空态得到; 当其中一个参数为零时, 就退化为通常的双模压缩真空态). 研究指出, 当两参数值满足一定条件时, 与通常的双模压缩真空态相比, 其正交分量之一展现更强的压缩效应. 由于双模压缩真空态的压缩与纠缠程度密切相关, 那么, 自然产生三个问题: 单-双模组合压缩真空态是否具有更强的纠缠度呢? 将其作为量子隐形传输通道时, 输保真度会

\* 国家自然科学基金(批准号: 11264018)、江西省自然科学基金(批准号: 20132BAB212006)和江西省教育厅科技项目(批准号: GJJ14274)资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯作者. E-mail: hlyun2008@126.com

得到改善吗? 纠缠度的改善是否意味着保真度的改善呢?

另一方面, 任何量子系统都不可能与外界环境完全隔绝, 即总是受外界环境影响的. 因此, 我们通常没有足够的信息描述完整的量子系统. 在这种情况下, 系统只能被考虑成混合态, 如热态; 或者说制备出来的纠缠态或因作为传输通道而被远距离分发的纠缠态通常都处于混合态, 这使得纠缠系统不可避免地失去其原本的量子特征, 如非局域性、纠缠特点和相干性等, 使用这种纠缠混合态进行量子通信和量子计算将会导致信息失真. 此外, 压缩热态也常常被看成是广义的高斯量子态. 基于此, 本文从理论上引入一种新的量子态——单-双模组合压缩热态, 即考虑单-双模压缩算符作用于热态得到的单-双模组合压缩热态的纠缠情况, 以期考察双压缩参数和热场平均光子数对纠缠度的影响, 以及将该纠缠态作为纠缠源在量子隐形传输中的应用.

利用 Wigner 算符在 Weyl 编序下的不变性, 可以方便地推导单-双模组合压缩热态的 Wigner 函数. 将 Wigner 函数改写成相应的矩阵形式, 并利用对数负定性计算了此纠缠态的纠缠度. 研究表明: 单-双模组合压缩真空态表现出的纠缠性比一般的双模压缩真空态要好, 单-双模组合压缩操作有助于改善量子态的纠缠; 当热场平均光子数不为零时, 则要求压缩参数超过一定的阈值, 纠缠态才能展现出一定的纠缠; 此阈值会随双压缩参数的变换而变化, 具体而言, 对于给定的平均热光子数,  $\lambda$  的域值随着  $\gamma$  的增加而减小, 而  $\gamma$  的域值也随着  $\lambda$  增加而减小; 当  $\gamma, \lambda$  达到相对应的域值时, 单-双模组合压缩热态的纠缠度  $E_N$  随着  $\gamma, \lambda$  的增加而增强. 当将单-双模组合压缩态作为纠缠量子通道, 实现相干态的隐形传态时, 研究表明: 与通常的双模压缩态相比, 尽管单-双模组合压缩态具有更高的纠缠度, 但隐形传输保真度并不是全参数范围都能得到改善. 我们发现: 保真度得到改善的参数区域恰好与一正交分量涨落出现压缩增强的参数区域完全一致.

文章结构如下: 第二部分, 回顾单-双模组合压缩真空态及其压缩特点; 第三部分引入单-双模组合压缩热态, 并利用 Wigner 算符在 Weyl 编序下的不变性, 推导其 Wigner 函数; 第四部分, 研究单-双模组合压缩热态的纠缠性质; 第五部分讨论单-双模组合压缩热态作为纠缠源实现相干态的隐形传

输的保真度; 最后是结论部分.

## 2 单-双模组合压缩真空态

双模压缩真空态是一个典型的连续变量纠缠态. 理论上, 它可以通过双模压缩算符作用到真空态上而获得, 即

$$S|00\rangle = \text{sech}\lambda \exp(-a^\dagger b^\dagger \tanh \lambda)|00\rangle, \quad (1)$$

其中  $S = \exp\{\lambda(ab - a^\dagger b^\dagger)\}$  为双模压缩算符,  $\lambda$  为实压缩参数. 引入双模正交分量

$$x_1 = (Q_1 + Q_2)/2, \quad x_2 = (P_1 + P_2)/2,$$

其中

$$Q_1 = (a + a^\dagger)/\sqrt{2}, \quad P_1 = (a - a^\dagger)/(\sqrt{2}i)$$

以及

$$Q_2 = (b + b^\dagger)/\sqrt{2}, \quad P_2 = (b - b^\dagger)/(\sqrt{2}i),$$

则在双模压缩真空态 (1) 下, 正交分量  $x_1, x_2$  的涨落为

$$\begin{aligned} \langle 00|S^\dagger x_1^2 S|00\rangle &= \frac{1}{4} e^{-2\lambda}, \quad \langle 00|S^\dagger x_2^2 S|00\rangle \\ &= \frac{1}{4} e^{2\lambda}, \end{aligned} \quad (2)$$

此即通常的双模压缩态的压缩特点. 注意到产生算符、湮灭算符与坐标、动量算符的关系, 即

$$\begin{aligned} a &= (Q_1 + iP_1)/\sqrt{2}, \quad a^\dagger = (Q_1 - iP_1)/\sqrt{2}, \\ b &= (Q_2 + iP_2)/\sqrt{2}, \quad b^\dagger = (Q_2 - iP_2)/\sqrt{2}, \end{aligned} \quad (3)$$

可进一步将双模压缩算符  $S$  改写成如下形式

$$S = \exp[-i\lambda(Q_1 P_2 + Q_2 P_1)]. \quad (4)$$

另一方面, Fan<sup>[9]</sup> 提出了一类新的双模压缩真空态, 即单-双模组合压缩真空态, 它由单-双模组合压缩算符作用于真空态得到. 单-双模组合压缩算符为

$$V = \exp[-i(\lambda_1 Q_1 P_2 + \lambda_2 Q_2 P_1)], \quad (5)$$

显然, 它满足么正算符的条件  $V^{-1} = V^\dagger$ . (5) 式中,  $\lambda_1 = \lambda e^\gamma, \lambda_2 = \lambda e^{-\gamma}, \lambda > 0$ . 特别地, 当  $\gamma = 0$  的时候,  $V$  就是通常的双模压缩算符  $S$ .

为了获得在单-双模组合压缩真空态  $V|00\rangle$  下正交分量的涨落结果, 可利用有序算符内的积分技术 (IWOP 技术)<sup>[10,11]</sup> 以及真空投影算符的正规积表示:

$$|00\rangle\langle 00| = : \exp(-a^\dagger a - b^\dagger b) :$$

(: : 为正规排序符号), 可得单-双模组合压缩算符的正规排序形式<sup>[9,12]</sup>, 从而单-双模组合压缩真空态  $V|00\rangle$  可表示为

$$V|00\rangle = \frac{2}{\sqrt{L}} \exp \left\{ \frac{1}{L} [(b^{\dagger 2} - a^{\dagger 2}) \sinh^2 \lambda \sinh 2\gamma + 2a^{\dagger} b^{\dagger} \sinh 2\lambda \cosh \gamma] \right\} |00\rangle, \quad (6)$$

其中,  $\lambda, \gamma$  皆为实压缩参数,

$$L = 4(1 + \sinh^2 \gamma \tanh^2 \lambda) \cosh^2 \lambda.$$

上式计算过程中利用了积分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-\alpha x^2 + \beta x) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp\left(\frac{\beta^2}{4\alpha}\right), \quad (7)$$

以及利用 Baker-Hausdorff 公式

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!} [A, [A, B]] + \frac{1}{3!} [A, [A, [A, B]]] + \dots, \quad (8)$$

可得算符  $V$  的变换关系

$$\begin{aligned} V^{-1} Q_1 V &= Q_1 \cosh \lambda + Q_2 e^{-\gamma} \sinh \lambda, \\ V^{-1} Q_2 V &= Q_2 \cosh \lambda + Q_1 e^{\gamma} \sinh \lambda, \\ V^{-1} P_1 V &= P_1 \cosh \lambda - P_2 e^{\gamma} \sinh \lambda, \\ V^{-1} P_2 V &= P_2 \cosh \lambda - P_1 e^{-\gamma} \sinh \lambda. \end{aligned} \quad (9)$$

故而在  $V|00\rangle$  态下, 可得正交分量的涨落分别为

$$\langle (\Delta x_1)^2 \rangle = \frac{1}{4} (\cosh 2\lambda + 2 \sinh^2 \lambda \sinh^2 \gamma + \sinh 2\lambda \cosh \gamma), \quad (10)$$

$$\langle (\Delta x_2)^2 \rangle = \frac{1}{4} (\cosh 2\lambda + 2 \sinh^2 \lambda \sinh^2 \gamma - \sinh 2\lambda \cosh \gamma). \quad (11)$$

比较 (10), (11) 和 (2) 式可知<sup>[9]</sup>, 在以下参数

$$0 < \tanh \lambda < \frac{1}{1 + \cosh \gamma} \quad \lambda > 0 \quad (12)$$

条件下, 有

$$\langle (\Delta x_1)^2 \rangle > \frac{1}{4} e^{2\lambda}, \langle (\Delta x_2)^2 \rangle < \frac{1}{4} e^{-2\lambda}. \quad (13)$$

此结果表明, 与通常的双模压缩真空态相比, 在某一个正交分量上, 可以获得更强的压缩效果. 正是这个原因, 下面考虑单-双模组合压缩热态的纠缠特性随参数  $\lambda, \gamma$  的变化情况, 期望在一定条件下, 它能展现更大的纠缠.

### 3 单-双模组合压缩热态的引入及其 Wigner 函数

本节中, 我们首先引入热态. 热态是一个混合态, 其态矢量不再用狄拉克符号  $|\Psi\rangle$  来表征, 而是用约化密度算符来表示. 对于单模热态, 即只有一个频率的光场, 其约化密度算符表示为

$$\rho_c = (1 - e^{\xi}) e^{\xi a^{\dagger} a} = \frac{1}{n_c + 1} e^{\frac{n_c}{n_c + 1} a^{\dagger} a}, \quad (14)$$

式中  $\xi = -\hbar\omega/(\kappa T)$ ,  $\kappa$  为玻尔兹曼常量,  $\omega$  热光场的频率,  $T$  热光场为温度,

$$n_c = \text{tr}(\rho_c a^{\dagger} a) = (e^{-\xi} - 1)^{-1}$$

为平均热光子数. 单-双模组合压缩热态可通过单-双模压缩算符作用于双模热态得到:

$$\rho = V(1 - e^{\xi_1}) e^{\xi_1 a^{\dagger} a} (1 - e^{\xi_2}) e^{\xi_2 b^{\dagger} b} V^{-1}, \quad (15)$$

式中  $\xi_1 = -\hbar\omega_1/(\kappa T_1)$ ,  $\xi_2 = -\hbar\omega_2/(\kappa T_2)$ , 参数  $\omega_1, \omega_2$  分别为  $a, b$  模热光场的频率,  $T_1, T_2$  分别为  $a, b$  模热光场的温度. 显然,  $\rho$  满足归一化条件  $\text{tr}[\rho] = 1$ , 且每个模的平均热光子数为  $n_{cj} = (e^{-\xi_j} - 1)^{-1}$ ,  $j = 1, 2$ . 为讨论方便, 以下计算中取  $\omega_1 = \omega_2, T_1 = T_2$ , 即  $n_{c1} = n_{c2} = n_c$ .

为了研究讨论单-双模组合压缩热态的纠缠情况, 这里我们先计算它的 Wigner 函数. Wigner 函数是一个准概率分布函数, 尤其是它的负部特征已经成为了考察量子态的非经典性质的有效工具之一<sup>[2]</sup>. 此外, 它对于导出高斯量子态的对数负定性也是十分方便的. 对于单模量子态  $\rho_c$ , 其 Wigner 函数可以通过计算下式得到

$$W(q_1, p_1) = \text{tr}(\rho_c \Delta_1(q_1, p_1)), \quad (16)$$

其中,  $\Delta_1(q_1, p_1)$  为 Wigner 算符<sup>[13]</sup>,

$$\begin{aligned} \Delta_1(q_1, p_1) &= e^{2i\alpha|z|^2} \int \frac{d^2 z}{\pi^2} |z\rangle \langle -z| e^{2(\alpha z^* - z\alpha^*)}, \end{aligned} \quad (17)$$

$\alpha = (q_1 + ip_1)/\sqrt{2}$ ,  $|z\rangle = \exp\{za^{\dagger} - z^*a\}|0\rangle$  为相干态. 利用 IWOP 技术以及真空投影算符的正规乘积表示, 我们可以给出  $\Delta_1(q_1, p_1)$  的正规乘积形式

$$\begin{aligned} \Delta_1(q_1, p_1) &= \frac{1}{\pi} : \exp[-(q_1 - Q_1)^2 - (p_1 - P_1)^2] :. \end{aligned} \quad (18)$$

进一步利用将正规乘积转换为 Weyl 编序的算符公式<sup>[14]</sup>,

$$O = : \int \frac{d^2 z}{\pi} \langle -z|O|z\rangle e^{|z|^2 + az^* - za^{\dagger} + a^{\dagger}a} : \quad (19)$$

可得 Wigner 算符  $\Delta_1(q_1, p_1)$  的 Weyl 编序形式

$$\Delta_1(q_1, p_1) = \begin{Bmatrix} \delta(q_1 - Q_1)\delta(p_1 - P_1) \end{Bmatrix}, \quad (20)$$

式中  $\begin{Bmatrix} \end{Bmatrix}$  为 Weyl 编序, 在 Weyl 编序内的算符是可对易的, 即  $\begin{Bmatrix} aa^\dagger \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a^\dagger a \end{Bmatrix}$ .

下面, 考虑双模 Wigner 算符在相似变换  $V^{-1} \dots V$  下的变换关系. 注意到, 算符 Weyl 编序的一大优点就是: 在相似变换下具有不变性,

$$V^{-1} \begin{Bmatrix} \dots \end{Bmatrix} V = \begin{Bmatrix} V^{-1} \dots V \end{Bmatrix}, \quad (21)$$

即变换可以直接作用于 Weyl 编序内的算符, 而 Weyl 编序保持不变<sup>[13]</sup>. 应该注意的是, 在其他编序形式下, 如正(反)规排序形式, 它们不能使得相似变换具有不变性. 利用这一特点, 以及变换关系(9), 可得

$$\begin{aligned} & V^{-1} \Delta_1(q_1, p_1) \Delta_2(q_2, p_2) V \\ &= \begin{Bmatrix} \delta(q_1 - Q_1 \cosh \lambda - Q_2 e^{-\gamma} \sinh \lambda) \\ \times \delta(p_1 - P_1 \cosh \lambda + P_2 e^\gamma \sinh \lambda) \\ \times \delta(q_2 - Q_2 \cosh \lambda - Q_1 e^\gamma \sinh \lambda) \\ \times \delta(p_2 - P_2 \cosh \lambda + P_1 e^{-\gamma} \sinh \lambda) \end{Bmatrix} \\ &= \Delta_1(q'_1, p'_1) \Delta_2(q'_2, p'_2), \end{aligned} \quad (22)$$

式中  $q'_1, p'_1, q'_2, p'_2$  定义如下

$$\begin{aligned} q'_1 &= -q_1 \cosh \lambda + q_2 e^{-\gamma} \sinh \lambda, \\ p'_1 &= -p_1 \cosh \lambda - p_2 e^\gamma \sinh \lambda, \\ q'_2 &= q_1 e^\gamma \sinh \lambda - q_2 \cosh \lambda, \\ p'_2 &= -p_1 e^{-\gamma} \sinh \lambda - p_2 \cosh \lambda. \end{aligned} \quad (23)$$

可见, 双模 Wigner 算符在相似变换下保持了 Wigner 算符的特征, 只需将参数做如上替换即可.

利用热场态的相干态表示<sup>[15]</sup>

$$\rho_c = \frac{1}{n_c} \int \frac{d^2 z}{\pi} e^{-\frac{1}{n_c} |z|^2} |z\rangle \langle z|, \quad (24)$$

以及 Wigner 算符的正规乘积表示(18)式, 可得热场态的 Wigner 函数为

$$\begin{aligned} W(q_1, p_1) &= \text{tr}[\rho_c \Delta_1(q_1, p_1)] \\ &= \frac{1}{\pi n} \exp \left\{ -\frac{1}{n} (q_1^2 + p_1^2) \right\}. \end{aligned} \quad (25)$$

上式  $n = 2n_c + 1$ , 并利用了积分公式

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^2 z}{\pi} e^{\zeta |z|^2 + \xi z + \eta z^*} \\ &= -\frac{1}{\zeta} e^{-\frac{\xi \eta}{\zeta}} \quad \text{Re}(\zeta) < 0. \end{aligned} \quad (26)$$

注意到(22)式, 单-双模组合压缩热态的 Wigner 函数可计算为

$$\begin{aligned} & W(q_1, p_1, q_2, p_2) \\ &= \text{tr}[\rho V^{-1} \Delta_1(q_1, p_1) \Delta_2(q_2, p_2) V] \\ &= \text{tr}[\rho \Delta_1(q'_1, p'_1) \Delta_2(q'_2, p'_2)]. \end{aligned} \quad (27)$$

则利用已知热场态的 Wigner 函数(25), 并将关系式(23)代入, 可得单-双模组合压缩热态的 Wigner 函数

$$\begin{aligned} W(q_1, p_1, q_2, p_2) &= W(q'_1, p'_1) W(q'_2, p'_2) \\ &= \frac{1}{\pi^2 n^2} \exp \left\{ -\frac{m_1}{n} (p_2^2 + q_1^2) \right. \\ &\quad \left. - \frac{m_2}{n} (q_2^2 + p_1^2) - \frac{2m_3}{n} (p_1 p_2 - q_1 q_2) \right\}, \end{aligned} \quad (28)$$

式中  $m_1, m_2, m_3$  分别定义为

$$\begin{aligned} m_1 &= \cosh^2 \lambda + e^{2\gamma} \sinh^2 \lambda, \\ m_2 &= \cosh^2 \lambda + e^{-2\gamma} \sinh^2 \lambda, \\ m_3 &= \sinh 2\lambda \cosh \gamma, \end{aligned} \quad (29)$$

且可证明关系式  $m_1 m_2 - m_3^2 = 1$ , 这个结果在以下计算中会应用到. 特别地, 当平均光子数  $n_c = 0$ , 压缩参数  $\gamma = 0$  时, 有  $m_1 = m_2 = \cosh 2\lambda$ ,  $m_3 = \sinh 2\lambda$ , 则(28)式恰好退化成双模压缩真空态的 Wigner 函数, 即

$$\begin{aligned} & W(q_1, p_1, q_2, p_2) \\ &= \frac{1}{\pi^2} \exp \left\{ -(p_2^2 + q_2^2 + q_1^2 + p_1^2) \cosh 2\lambda \right. \\ &\quad \left. - 2(p_1 p_2 - q_1 q_2) \sinh 2\lambda \right\}. \end{aligned} \quad (30)$$

#### 4 单-双模组合压缩热态的纠缠性质

量子态的纠缠是量子信息研究的一个核心问题, 对量子信息的传输应用有重要的影响. 通常地, 一个高斯态可以分离成两个单独的量子态, 则它们之间不存在纠缠, 反之则存在纠缠. 针对两体量子系统, 纠缠的度量方法有纯态的部分熵, 两体纠缠混态的 Concurrence 和对数负定性等<sup>[16,17]</sup>. 对于高斯纠缠态(即其 Wigner 分布函数是高斯型的量子态), 它可以完全由一阶和二阶统计矩、协方差矩阵来描述. 因此, 采用负对数值  $E$  来描述纠缠是比较方便的<sup>[18,19]</sup>.

为了计算负对数值  $E$ , 我们将 Wigner 函数(28)改写成

$$W(q_1, p_1, q_2, p_2)$$

$$= \frac{1}{\pi^2 n^2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \mathbf{M} \boldsymbol{\sigma}^{-1} \mathbf{M}^T \right\}, \quad (31)$$

其中矩阵  $\mathbf{M} = (q_1 \ p_1 \ q_2 \ p_2)$ , 相应的协方差矩阵为

$$\boldsymbol{\sigma}^{-1} = \frac{2}{n} \begin{pmatrix} m_1 & 0 & -m_3 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & m_3 \\ -m_3 & 0 & m_2 & 0 \\ 0 & m_3 & 0 & m_1 \end{pmatrix}, \quad (32)$$

以及

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \begin{pmatrix} u & \omega \\ \omega^T & v \end{pmatrix}, \\ \mathbf{u} &= \frac{n}{2} \begin{pmatrix} m_2 & 0 \\ 0 & m_1 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{v} &= \frac{n}{2} \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}, \\ \boldsymbol{\omega} &= \frac{n}{2} \begin{pmatrix} m_3 & 0 \\ 0 & -m_3 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (33)$$

特别地, 当  $n_c = 0$ , 即单-双模组合压缩真空态情况; 又当压缩参数  $\gamma = 0$  时, 即通常的双模压缩真空态情况, 有

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cosh 2\lambda & 0 & \sinh 2\lambda & 0 \\ 0 & \cosh 2\lambda & 0 & -\sinh 2\lambda \\ \sinh 2\lambda & 0 & \cosh 2\lambda & 0 \\ 0 & -\sinh 2\lambda & 0 & \cosh 2\lambda \end{pmatrix}. \quad (34)$$

对于 Gaussian 量子态, 其纠缠条件可以通过部分转置密度矩阵来获得<sup>[19]</sup>, 即根据部分转置态的最小辛本征值  $n_s$  来描述,  $n_s$  定义为  $n_s = \min[n_+, n_-]$ , 其中

$$\begin{aligned} n_{\pm} &= \sqrt{\frac{\Delta \pm (\Delta^2 - 4 \det \boldsymbol{\sigma})^{1/2}}{2}}, \\ \Delta &= \det \mathbf{u} + \det \mathbf{v} - 2 \det \boldsymbol{\omega}. \end{aligned} \quad (35)$$

当  $n_s < 1/2$  时表示系统间有纠缠. 因此, 可以用负对数值  $E_N$  表示纠缠度, 即

$$E_N = \max[0, -\ln(2n_s)]. \quad (36)$$

将 (29) 和 (33) 式代入 (35) 式可得

$$\Delta = \frac{n^2}{2} (m_1 m_2 + m_3^2), \det \boldsymbol{\sigma}$$

$$= \frac{n^4}{16} (m_1 m_2 - m_3^2)^2 = \frac{n^4}{16}. \quad (37)$$

上式计算中利用到了结果  $m_1 m_2 - m_3^2 = 1$ . 故而

$$\begin{aligned} n_{\pm} &= \frac{n}{2} \\ &\times \sqrt{(m_1 m_2 + m_3^2) \pm ((m_1 m_2 + m_3^2)^2 - 1)^{1/2}}. \end{aligned} \quad (38)$$

注意到  $m_1 m_2 + m_3^2 = \cosh^2 2\lambda + \sinh^2 2\lambda \cosh 2\gamma \geq 1$ , 则

$$n_s = \frac{n}{2} (\sqrt{m_1 m_2} - m_3). \quad (39)$$

显然, 当  $n_c = 0$  时,  $n_s = 1/2(\sqrt{m_1 m_2} - m_3)$ , 这就是单-双模组合压缩真空态的最小辛本征值. 因此, 负对数值  $E_N$  为

$$E_N = \max[0, -\ln(n(\sqrt{m_1 m_2} - m_3))]. \quad (40)$$

可见, 单-双模压缩热态的纠缠度不仅依赖于热平均光子数  $n_c$ , 而且依赖于单-双模组合压缩参数. 要保持纠缠, 则要求

$$\sqrt{m_1 m_2} - m_3 < \frac{1}{2n_c + 1}. \quad (41)$$

当平均热光子数  $n_c$  越大, 则要求  $\sqrt{m_1 m_2}$  与  $m_3$  的差值越小. 特别地, 对于通常的双模压缩热态 ( $\gamma = 0$ ), 其保持纠缠的条件变成

$$\lambda > \frac{1}{2} \ln(2n_c + 1). \quad (42)$$

为了进一步比较单-双模组合压缩热态和通常双模压缩热态的压缩条件, 在图 1 中绘制了相应图形, 即当给定平均热光子数的情况下, 我们比较  $\sqrt{m_1 m_2} - m_3$  与  $e^{-2\lambda}$  的大小, 取  $Y1 = (\sqrt{m_1 m_2} - m_3)/e^{-2\lambda}$ . 由图 1 可知, 当  $\gamma = 0$  时,  $Y1 = 1$ , 这正是所期望的; 当  $\gamma > 0$  时, 随着  $\gamma, \lambda$  的增大,  $Y1$  不断减小, 即  $\sqrt{m_1 m_2} - m_3$  的值比  $e^{-2\lambda}$  的值小, 这一变化趋势在  $\lambda$  较大时更为明显. 这就意味着单-双模组合压缩热态较双模压缩热态更容易满足纠缠条件. 在图 2 中, 对于不同的热平均光子数 ( $n_c = 0.2, 0.5$ ), 我们绘制了保持纠缠的条件:  $Y2 = (\sqrt{m_1 m_2} - m_3)(2n_c + 1) < 1$ . 由图 2 清晰可见, 当  $n_c \neq 0$  时, 对于参数  $\lambda$  和  $\gamma$  分别存在一个阈值, 即当  $\lambda$  和  $\gamma$  超过此阈值时, 系统才能展现纠缠; 并且此阈值随  $n_c$  的增大而增大; 对于给定的  $n_c$  值,  $\lambda$  的阈值随  $\gamma$  值的增加而减小,  $\gamma$  的阈值随  $\lambda$  值的增加而增大, 二者呈现相反的变化趋势. 在图 3 中, 我们给出了纠缠度随压缩参数  $\lambda$  和  $\gamma$  以及  $n_c$  的变化情况, 结论与图 2 情况基本相同, 这里不再复述.

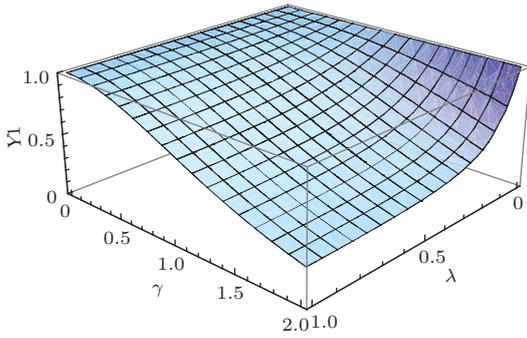


图1 单-双模组合压缩热态与通常双模压缩热态的纠缠条件比较

### 5 单-双模组合压缩热态在量子隐形传态中的应用

由前一部分可知, 单-双模组合压缩热态能比通常的双模组合压缩热态更容易产生纠缠, 纠缠随参数  $\gamma$  的增加而增加. 那么, 当单-双模组合压缩热态作为纠缠源, 用于实现量子隐形传输, 隐形传输保真度是否也会随纠缠参数  $\gamma$  的增加而增加呢? 为

了回答这个问题, 本节考察用它实现相干态的量子隐形传输. 用双模压缩真空态作为量子通道来实现一些量子态的远程传输已进行了研究<sup>[20]</sup>, 对于连续变量量子系统, 已提出了量子隐形传输方案, 并建立了保真度与特征函数的关系<sup>[21]</sup>. 注意到, 此传输方案中, 当相干态  $|z\rangle$  作为待传输态时, 保真度不依赖于相干态的振幅  $z$ . 为方便, 取  $z = 0$ , 即真空态, 其特征函数为  $\chi_{in}(\eta) = \exp[-|\eta|^2/2]$ .

#### 5.1 单-双模组合压缩热态的特征函数

首先, 我们推导单-双模组合压缩热态的特征函数. 对于双模系统, 其特征函数定义为  $\chi(\alpha, \beta) = \text{tr}[D_a(\alpha)D_b(\beta)\rho]$ , 这里  $D_{a,b}(\alpha)$  为平移算符  $D_a(\alpha) = \exp\{\alpha a^\dagger - \alpha^* a\}$ . 引入  $\alpha = (q_1 + ip_1)/\sqrt{2}$ ,  $\beta = (q_2 + ip_2)/\sqrt{2}$ , 则平移算符可表示为

$$\begin{aligned} D_a(\alpha) &= \exp\{ip_1 Q_1 - iq_1 P_1\}, \\ D_b(\beta) &= \exp\{ip_2 Q_2 - iq_2 P_2\}. \end{aligned} \quad (43)$$

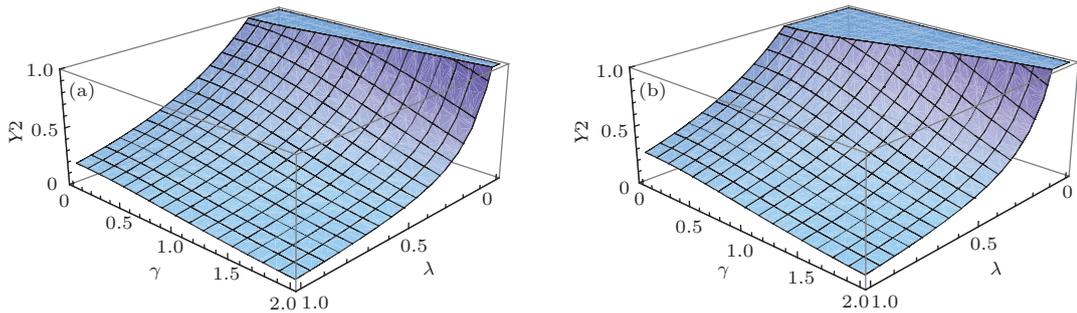


图2 单-双模组合压缩热态的纠缠条件, 即与平均热光子数的关系, 以及随压缩参数  $\lambda, \gamma$  的变化

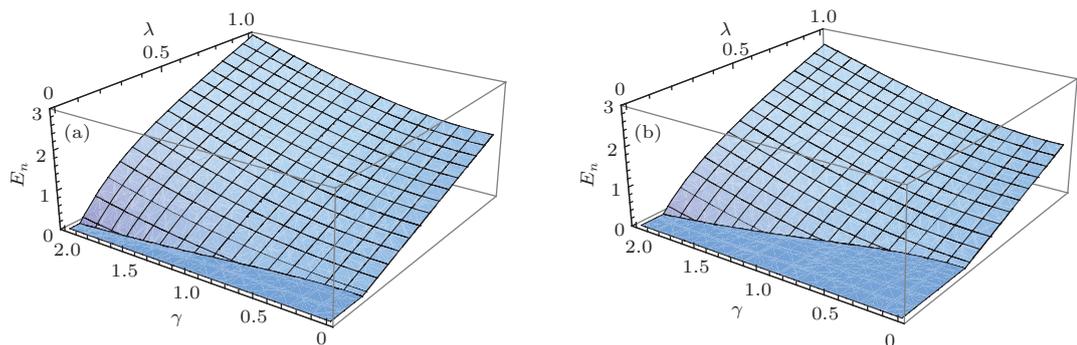


图3 单-双模组合压缩热态的纠缠度随压缩参数  $\lambda, \gamma$  的变化 (a)  $n_c = 0.2$ ; (b)  $n_c = 0.5$

注意到, (43) 式实际上就是平移算符的 Weyl 编序形式. 故而利用变换关系式 (9), 与 (22) 式类似, 有

$$V^{-1} D_a(\alpha) D_b(\beta) V = D_a(\bar{\alpha}) D_b(\bar{\beta}), \quad (44)$$

其中

$\bar{\alpha} = (\bar{q}_1 + i\bar{p}_1)/\sqrt{2}$ ,  $\bar{\beta} = (\bar{q}_2 + i\bar{p}_2)/\sqrt{2}$ , 以及

$$\begin{aligned} \bar{p}_1 &= p_1 \cosh \lambda + p_2 e^\gamma \sinh \lambda, \\ \bar{q}_1 &= q_1 \cosh \lambda - q_2 e^{-\gamma} \sinh \lambda, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{p}_2 &= p_2 \cosh \lambda + p_1 e^{-\gamma} \sinh \lambda, \\ \bar{q}_2 &= q_2 \cosh \lambda - q_1 e^{\gamma} \sinh \lambda, \end{aligned}$$

或者

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &= \alpha \cosh \lambda + (\beta \sinh \gamma - \beta^* \cosh \gamma) \sinh \lambda, \\ \bar{\beta} &= \beta \cosh \lambda - (\alpha \sinh \gamma + \alpha^* \cosh \gamma) \sinh \lambda. \end{aligned} \quad (45)$$

因此, 只需计算单模热态的特征函数, 再通过上式关系做参数替换即可得到单-双模组合压缩热态的特征函数. 利用单模热态的相干态表示 (24) 式, (26) 式以及平移算符的正规乘积形式:

$$D_a(\alpha) = e^{\alpha a^\dagger} e^{-\alpha^* a} e^{-|\alpha|^2/2},$$

则单模热态 (14) 式的特征函数可计算为

$$\chi_{c1}(\alpha) = \text{tr}(\rho_c D_a(\alpha)) = \exp \left\{ -\frac{n}{2} |\alpha|^2 \right\}, \quad (46)$$

$n = 2n_c + 1$ . 因此, 单-双模组合压缩热态的特征函数为

$$\begin{aligned} \chi(\alpha, \beta) &= \chi_{c1}(\bar{\alpha}) \chi_{c2}(\bar{\beta}) \\ &= \exp \left\{ -\frac{n}{2} (|\bar{\alpha}|^2 + |\bar{\beta}|^2) \right\}. \end{aligned} \quad (47)$$

当  $n_c = 0, \gamma = 0$  时, (47) 式退化成

$$\begin{aligned} \chi(\alpha, \beta) &= \exp \left[ -\frac{1}{2} (|\alpha|^2 + |\beta|^2) \cosh 2\lambda \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (\alpha\beta + \alpha^*\beta^*) \sinh 2\lambda \right], \end{aligned} \quad (48)$$

此即通常双模压缩真空态的特征函数.

### 5.2 相干态隐形传输保真度

下面, 我们考虑利用单-双模组合压缩热态作为量子通道实现相干态的隐形传输的保真度. 对于连续变量系统, 采用已有的传输方案 [21,22]. 在此方案中, 输出态的特征函数  $\chi_{\text{out}}(\eta)$  与被传输态的特征函数  $\chi_{\text{in}}(\eta)$  以及纠缠源的特征函数  $\chi_E(\alpha, \beta)$  关系已被建立, 即  $\chi_{\text{out}}(\eta) = \chi_{\text{in}}(\eta) \chi_E(\eta^*, \eta)$ . 基于此, 量子隐形传输保真度可通过下式计算 [21]:

$$\mathcal{F} = \int \frac{d^2\eta}{\pi} \chi_{\text{in}}(\eta) \chi_{\text{out}}(-\eta). \quad (49)$$

利用 (45) 式可得

$$\chi_E(-\eta^*, -\eta) = \exp\{-nA|\eta|^2\}, \quad (50)$$

其中  $A = 2 \cosh^2 \lambda \cosh^2 \gamma - \sinh 2\lambda \cosh \gamma - \cosh 2\gamma$ . 因此, 将特征函数  $\chi_{\text{in}}(\eta) = \exp[-|\eta|^2/2]$  和 (50) 式代入 (49) 式积分可得

$$\mathcal{F} = \frac{1}{1 + (2n_c + 1)A}. \quad (51)$$

当  $n_c = 0$ , 即单-双模组合压缩真空态情况,  $\mathcal{F} = 1/(1 + A)$ ; 而当  $\gamma = 0$  时, 即双模压缩热态情况,  $\mathcal{F} = 1/[1 + (2n_c + 1)e^{-2\lambda}]$ ; 当  $n_c = \gamma = 0$ , 即双模压缩真空态情况,  $\mathcal{F} = 1/[1 + e^{-2\lambda}] = (1 + \tanh \lambda)/2$  [12,23]. 由 (51) 式可见, 由于热效应的引入, 隐形传输保真度随平均光子数的增加而减小. 要实现有效的量子隐形传输, 则要求  $\mathcal{F} > 1/2$ , 即

$$A < \frac{1}{2n_c + 1}. \quad (52)$$

那么, 当纠缠条件 (41) 式得到满足时, 有效的量子隐形传输的条件 (52) 式是否也得以满足呢? 为清楚地看到这一点, 图 4 给出了曲线  $Y3 = (\sqrt{m_1 m_2} - m_3)/A$ . 由图 4 容易看出, 在小压缩参数范围内, 当纠缠条件满足时, 有效的量子隐形传输的条件也得以满足; 但在较大压缩参数范围, 有  $\sqrt{m_1 m_2} - m_3 < A$ , 即, 当纠缠条件满足时, 有效的量子隐形传输的条件却不一定能满足; 当有效的量子隐形传输的条件满足时, 纠缠条件必然满足. 简单地说, 当单-双模压缩态的纠缠条件满足时, 有效的隐形传输的条件不一定能得到满足.

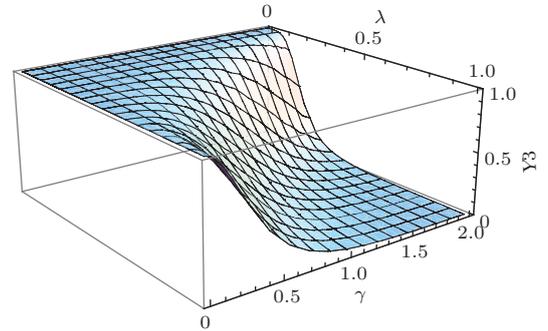


图 4 纠缠条件与有效隐形传输条件的比较:  $Y3 = (\sqrt{m_1 m_2} - m_3)/A$  随参数  $\lambda, \gamma$  的变化曲线

下面, 比较由单-双模压缩热态和通常的双模压缩热态作为纠缠通道传输相干态的保真度. 图 5 给出了二者相应的保真度比率曲线, 即  $R = [1 + (2n_c + 1)e^{-2\lambda}]/[1 + (2n_c + 1)A]$ . 由图 5 可知, 当压缩参数  $\lambda$  在小压缩范围内 ( $0 < \lambda < 0.5$ ), 以及  $\gamma > 0$  时, 单-双模组合压缩情况下的保真度较通常的双模压缩情况要高; 尤其是当  $\gamma$  值较大时, 情况更为明显; 当压缩参数  $\lambda$  在大压缩范围内 ( $0.5 < \lambda < 1$ ) 时, 情况恰好相反. 为了严格确定以上保真度比率大于 1 的区域, 即要求  $R > 1$ , 则有

$$1/[1 + (2n_c + 1)A] > 1/[1 + (2n_c + 1)e^{-2\lambda}],$$

亦即  $A < e^{-2\lambda}$ . 由此可得  $R > 1$  的条件为

$$0 < \tanh \lambda < \frac{1}{1 + \cosh \gamma}. \quad (53)$$

有趣的是, (53) 式恰好也是单-双模组合压缩能出现压缩增强效应的区域. 应该指出的是, 单-双模组合压缩态纠缠度随压缩参数  $\lambda, \gamma$  的增加而增大; 而当将其作为量子隐形传输通道传输相干态时, 要获得较通常双模压缩态更高的保真度, 必须满足一定条件, 且此条件恰好就是单-双模组合压缩态产生压缩增强的区域.

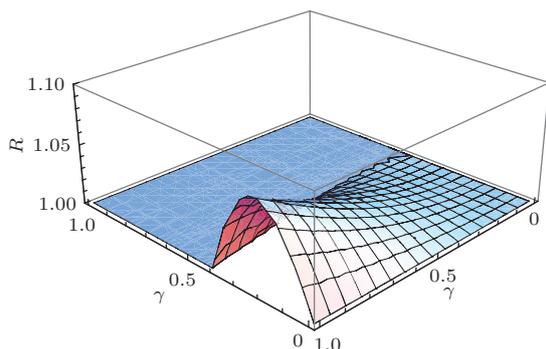


图5 单-双模压缩热态与通常的双模压缩热态作为纠缠源实现相干态的隐形传输的保真度比率  $R = [1 + (2n_c + 1)e^{-2\lambda}]/[1 + (2n_c + 1)A]$ ,  $R > 1$  表示单-双模组合压缩态对应的保真度高

## 6 结 论

本文引入了一类新的量子态——单-双模组合压热态, 讨论了它的纠缠性质及其在量子隐形传态中的应用. 利用有序算符内的积分技术以及 Wigner 算符的相干态表示, 我们解析推导了单-双模组合压缩热态的 Wigner 函数, 并利用 Wigner 函数的矩阵表示与纠缠度之间的关系讨论了单-双模组合压缩热态的纠缠特性, 导出了单-双模组合压缩热态保持纠缠的条件(41)式. 研究表明, 单-双模组合压缩真空态表现出的纠缠性比一般的双模压缩真空态要好, 可见单-双模组合压缩操作有助于改善量子态的纠缠; 当热场平均光子数不为零时, 则要求压缩参数超过一定的阈值, 纠缠态才能展现出一定的纠缠; 参数阈值随另一参数阈值增加而减少. 此外, 我们还讨论了单-双模组合压缩热态作为纠缠通道时, 解析推导出了传输相干态的隐形传输保真度  $\mathcal{F}$  (51) 式. 研究表明: 1) 要实现有效的量子隐形传输, 即  $\mathcal{F} > 1/2$ , 则要求条件  $A < \frac{1}{2n_c + 1}$  得以满足; 2) 在小压缩参数范围内, 当纠缠条件满足时, 有效的量子隐形传输的条件也得以满足; 但在较大

压缩参数范围, 有  $\sqrt{m_1 m_2} - m_3 < A$ , 即, 当纠缠条件满足时, 有效的量子隐形传输的条件却不一定能满足; 当有效的量子隐形传输的条件满足时, 纠缠条件必然满足, 简单地说, 当单-双模压缩态的纠缠条件满足时, 有效的隐形传输的条件不一定能得到满足; 3) 通过比较单-双模压缩热态和通常的双模压缩热态作为纠缠通道传输相干态的保真度, 研究发现, 当压缩参数  $\lambda$  在小压缩范围内 ( $0 < \lambda < 0.5$ ), 以及  $\gamma > 0$  时, 单-双模组合压缩情况下的保真度较通常的双模压缩情况要高; 尤其是当  $\gamma$  值较大时, 情况更为明显; 该参数区域的严格条件恰好就是单-双模组合压缩能出现压缩增强效应的区域. 有趣的是, 单-双模组合压缩态纠缠度随压缩参数  $\lambda, \gamma$  的增加而增大; 而当将其作为量子隐形传输通道传输相干态时, 要获得较通常双模压缩态更高的保真度, 必须满足一定条件, 且此条件恰好就是单-双模组合压缩态产生压缩增强的区域. 可见, 我们可以通过引入额外的参数来改善量子态的纠缠度或作为纠缠源实现的量子隐形传输保真度, 纠缠改善的同时并不一定意味着保真度的改善.

## 参考文献

- [1] Lü J F, Ma S J 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 080301 (in Chinese) [吕菁芬, 马善钧 2011 物理学报 **60** 080301]
- [2] Kenfack A, Życzkowski K 2004 *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* **6** 396
- [3] Bouwmeester D, Ekert A, Zeilinger A 2000 *The Physics of Quantum Information* (Berlin: Springer)
- [4] Nielsen M A, Chuang I L 2000 *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [5] Liang Y, Wu Q C, Ji X 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 020301 (in Chinese) [梁艳, 吴奇成, 计新 2014 物理学报 **63** 020301]
- [6] Wu Q, Zhang Z M 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 174206 (in Chinese) [吴琴, 张智明 2013 物理学报 **62** 174206]
- [7] Wu Q, Zhang Z M 2014 *Chin. Phys. B* **23** 034203
- [8] Liu P, Feng X M, Jin R G 2014 *Chin. Phys. B* **23** 030310
- [9] Fan H Y 1990 *Phys. Rev. A* **41** 1526
- [10] Fan H Y 2003 *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* **5** R147
- [11] Hu L Y, Fan H Y 2009 *Phys. Rev. A* **80** 022115
- [12] Hu L Y, Xu X X, Guo Q, Fan H Y 2010 *Opt. Commun.* **283** 5074
- [13] Fan H Y 2012 *Representation and Transformation Theory in Quantum Mechanics* (Hefei: University of Science and Technology of China Press) (in Chinese) [范洪义 2012 量子力学纠缠态表象与变换 (合肥: 中国科技大学出版社出版)]

- [14] Fan H Y, Hu L Y 2010 *Investigation on Quantum Decoherence for Open Systems by Using Entangled State Representation Method* (Shanghai: Shanghai Jiaotong University Press) p110 (in Chinese) [范洪义, 胡利云 2010 开放系统量子退相干的纠缠态表象论 (上海: 上海交通大学出版社出版) 第 110 页]
- [15] Hu L Y, Jia F, Zhang Z M 2012 *J. Opt. Soc. Am. B* **29** 1456
- [16] Vidal G, Werner R F 2002 *Phys. Rev. A* **65** 032314
- [17] Eisert J, Plemio M B 1999 *J. Mod. Opt.* **46** 145
- [18] Duan L M, Giedke G, Cirac J O, Zoller P 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 2722
- [19] Simon R 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 2726
- [20] Song T Q 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3358 (in Chinese) [宋同强 2004 物理学报 **53** 3358]
- [21] Marian P, Marian T A 2006 *Phys. Rev. A* **74** 042306
- [22] Braunstein S L, Kimble H J 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 869
- [23] Hu L Y, Zhang Z M 2013 *J. Opt. Soc. Am. B* **30** 518

## Entanglement of one- and two-mode combination squeezed thermal states and its application in quantum teleportation\*

Liu Shi-You Zheng Kai-Min Jia Fang Hu Li-Yun<sup>†</sup> Xie Fang-Sen

(College of Physics and Communication Electronics, Jiangxi Normal University, Nanchang 330022, China)

( Received 9 February 2014; revised manuscript received 13 March 2014 )

### Abstract

In view of the fact that one- and two-mode combination squeezed vacuum states may exhibit stronger squeezing in a certain range, we introduce one- and two-mode combination squeezed thermal states (OTCSTS) and investigate the property of entanglement in detail. Using the remarkable property of Weyl ordering, i.e., the order-invariance of Weyl ordered operator under similar transformations, we conveniently derive the analytical expression of entanglement degree-logarithmic negativity, and then present the condition of keeping entanglement for these squeezed thermal states. It is found that the OTCSTS possesses higher entanglement than the usual two-mode squeezed thermal states for any non-zero squeezing parameter. As an application, the quantum teleportation for coherent state is considered by using the OTCSTS as an entangled channel. It is shown that the teleportation fidelity can only be enhanced within a certain range of parameters, which is just the same as the condition of exhibiting stronger squeezing in one quadrature. In addition, the condition of realizing effective quantum teleportation ( $> 1/2$ ) is obtained analytically.

**Keywords:** one- and two-mode combination squeezed thermal states, Wigner function, entanglement, quantum teleportation

**PACS:** 03.67.-a, 42.50.Dv, 03.65.Wj, 03.67.Mn

**DOI:** 10.7498/aps.63.140302

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11264018), the Natural Science Foundation of Jiangxi Province of China (Grant No. 20132BAB212006) and the Science and Technology Foundation of the Education Department of Jiangxi Province, China (Grant No. GJJ14274).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: [hlyun2008@126.com](mailto:hlyun2008@126.com)