

系统非对称性及记忆性对布朗马达 输运行行为的影响*

王飞¹⁾²⁾ 谢天婷¹⁾ 邓翠³⁾ 罗懋康^{1)†}

1)(四川大学数学学院, 成都 610065)

2)(电子信息控制重点实验室, 成都 610036)

3)(西南技术物理研究所, 成都 610041)

(2014年3月21日收到; 2014年4月28日收到修改稿)

在对分数阶布朗马达输运现象研究的基础上, 引入了描述系统势场对称性的参数(简称对称性参数), 并详细分析了该参数及记忆性参数(分数阶阶数)对粒子输运状态的影响. 仿真结果表明, 分数阶阶数和对称性参数的共同作用会使得布朗粒子形成定向输运反向流, 反向后达到最大平均流速所对应的阶数与外加驱动力频率无关联, 但会随对称性参数的增加而单调递增.

关键词: 分数阶布朗马达, 记忆性介质, 非对称性, 定向输运

PACS: 05.10.Gg, 45.10.Hj

DOI: 10.7498/aps.63.160502

1 引言

关于布朗马达^[1]问题的研究, 最初是源于热力学中有关第二类永动机问题的争论, 以及希望对一些复杂的输运机理给出合理解释. 1912年, Smoluchowski^[2]对所提出的假想实验进行了专门讨论. 随后, Feynman等^[3]对此进行了推广并引入了教科书. 近年来, 随着分子操纵技术的发展, 布朗马达的定向输运问题受到物理学、生物学等不同领域的密切关注^[4-6]. 1994年, Astumian和Bier^[7]发现涨落势、涨落力两种情况下的布朗粒子均能产生定向输运行为. 随后, Reimann^[8]详细总结了在具有空间周期性及非对称性系统中噪声诱导的定向输运现象. 2010年, Ai等^[9]发现分数阶噪声频谱成分的不同会影响布朗马达的输运方向. 2013年, Yang和Ripoll^[10]建立了粒子在非均匀悬浮液中的输运模型, 并对其进行了系统的理论分析. 同年, Simon等^[11]研究了一维、二维情况下过阻尼布

朗粒子在随机复杂势场下的输运及扩散行为, 发现在特殊的势场作用下粒子输运可以同时具有欠扩散和超扩散. 但是, 目前关于布朗马达输运现象的研究成果大多仍局限于整数阶动力系统^[1-12].

越来越多的研究表明, 粒子在黏性介质中的运动具有“记忆性”^[13], 即当前时刻的运动状态与之前时刻有关, 若用传统微积分刻画该过程, 其局限性一览无余. 近年迅速发展起来的分数阶随机微分方程理论却为解决该问题提供了崭新的数学工具^[14,15]. 2012年, Goychuk和Kharchenko^[16]研究了分数阶布朗马达输运速度随噪声强度变化产生的随机共振行为, 发现随噪声强度的增加, 粒子输运速度出现先增加后减小的现象. 同年, Ernst等^[17]对拥挤流体中的分数阶布朗运动进行了研究. 2013年, 文献^[18]研究了链状耦合分数阶布朗马达在非对称势场力作用下的输运行为, 发现平均输运流速会随耦合强度的变化出现广义共振. 可是, 这些研究均未考虑势场对称性与系统记忆性联合作用对粒子输运速度的影响.

* 国家自然科学基金(批准号: 11171238)和电子信息控制重点实验室基金(批准号: 2013035)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: makaluo@scu.edu.cn

本文应用分数阶朗之万方程研究粒子在黏性介质中的定向输运行为, 引入描述系统势场对称性的参数 (简称对称性参数), 系统地研究了外加驱动力频率不同的情况下该参数和分数阶阶数共同作用所产生的复杂输运现象, 详细讨论了分数阶阶数、对称性参数分别对布朗粒子平均流速的影响.

2 分数阶过阻尼布朗马达模型

2.1 分数阶朗之万方程

在非黏性均匀介质中运动的布朗粒子受到的阻尼力只与粒子当前时刻的速度有关. 而在黏性介质中, 粒子受到的阻尼力通常具有记忆性, 即作用在粒子上的阻尼力不仅依赖于当前时刻的速度, 还与过去时刻的速度有关, 并以加权的方式表现为阻尼核函数 $\gamma(t)$ ^[19,20], 此时可以得到下列广义朗之万方程:

$$m\ddot{x} + \int_0^t \gamma(t-\tau)\dot{x}(\tau)d\tau = F(x,t) + \sqrt{2D}\xi(t), \quad (1)$$

其中, m 为粒子质量; $F(x,t)$ 为外力; D 为噪声强度; $\xi(t)$ 满足涨落耗散定理, $\langle \xi(t) \rangle = 0$, $\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \gamma(t-t')$.

然而在很多物理和生化环境中, 黏性介质对速度通常具有幂律记忆性: 距当前时刻越近, 记忆性越强; 距当前时刻越远, 记忆性越差. 描述这种退色记忆性的阻尼核函数 $\gamma(t)$ 为^[21]

$$\gamma(t) = \frac{\gamma_0}{\Gamma(1-\alpha)} |t|^{-\alpha} \quad (0 < \alpha < 1), \quad (2)$$

其中 $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$. 为了方便, 通常设 $\gamma_0 = 1$.

图 1 给出了分数阶阻尼核函数 $\gamma(t)$ 与 t 的关系. 从图 1 可以看出, $\gamma(t)$ 随着时间 t 的增加按 t 的幂次逐渐衰减, α 越大 $\gamma(t)$ 衰减越快, α 越小 $\gamma(t)$ 衰减越慢.

将 (2) 式代入 (1) 式得到

$$m\ddot{x} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \dot{x}(\tau) d\tau = F(x,t) + \sqrt{2D}\xi(t) \quad (0 < \alpha < 1). \quad (3)$$

根据 Caputo 分数阶微积分的定义^[22,23], (3) 式可以写为

$$m\ddot{x} + {}_0^C D_t^\alpha x(t)$$

$$= F(x,t) + \sqrt{2D}\xi(t) \quad (0 < \alpha < 1). \quad (4)$$

称 (4) 式为分数阶朗之万方程.

在大尺度的动力学研究中, 我们通常忽略噪声等随机因素的影响, 例如牛顿力学. 但在粒子层面的研究中, 却发现随机噪声总是必然存在的, 而且对粒子的运动状态有显著影响. 朗之万认为, 布朗马达在介质中的输运主要依靠以下两种类型的力: 一类是为系统提供能量的随机力 (即涨落); 另一类是在系统中耗散能量的阻尼力 (即耗散). 根据噪声的来源, 又可以将噪声分为内部噪声及外部噪声, 内部噪声满足涨落耗散定理, 而外部噪声是由外部输入或由外部参数控制的无规则涨落, 可以是各种形式的随机干扰, 不满足涨落耗散定理. 在真实的系统中, 外部噪声和内部噪声总是同时存在, 但本文主要研究阶数 α 及系统对称性参数 Δ 对粒子输运状态的影响, 因此, 主要考虑可控的外部噪声, 并将其建模为高斯白噪声形式.

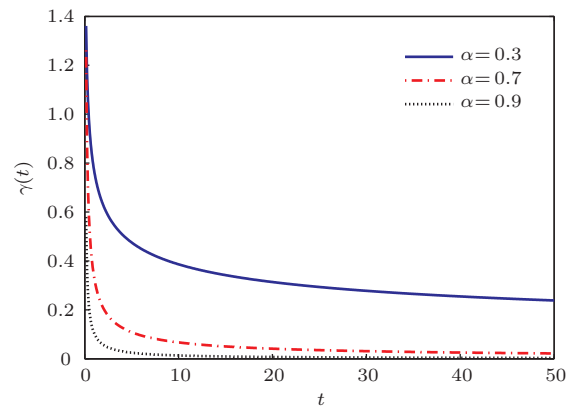


图 1 分数阶阻尼核函数 $\gamma(t)$

2.2 分数阶过阻尼布朗马达模型

由于布朗马达的质量很小, 因此可以得到过阻尼分数阶朗之万方程

$${}_0^C D_t^\alpha x(t) = F(x,t) + \sqrt{2D}\xi(t) \quad (0 < \alpha < 1). \quad (5)$$

通常在研究布朗粒子的输运状态时, $F(x,t)$ 主要包括非对称的周期势场力 $-V'(x)$ 及外加驱动力 $y(t)$. 在本文中选用周期 $l = 1$ 的棘轮势, 形式为^[24]

$$V(x) = -\frac{1}{2} \sin(2\pi x) - \frac{\Delta}{8} \sin(4\pi x), \quad (6)$$

其中 Δ 为对称性参数. Δ 反映了棘轮势的对称性 (图 2), 特别是当 $\Delta = 0$ 时, $V(x)$ 为对称势. 在整数阶情况下, 当 $\Delta > 0$ 时 (即 $L_1 < L_2$), 粒子更容易

向正向运动, 具有正的定向输运流; 当 $\Delta < 0$ 时 (即 $L_1 > L_2$), 粒子具有负的定向输运流.

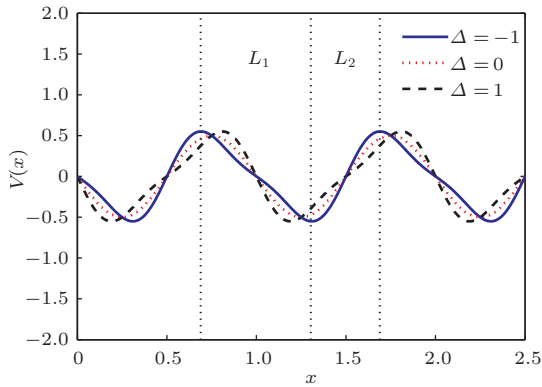


图2 对称性参数 Δ 不同情况下的棘轮势 $V(x)$

对外加驱动力 $y(t)$, 要求满足 $\langle y(t) \rangle = 0$, 即外力无偏置. 这里主要考虑 $y(t)$ 为对称的周期力

$$y(t) = A \sin(\omega t), \quad (7)$$

其中, A 为周期力幅度, ω 为周期力角频率.

3 数值模拟与分析

为了研究布朗马达的轨道性质, 本文采用分数阶差分法来求解方程 (5), 其数值计算公式如下 [22]:

$$x(t_j) = (\Delta t)^\alpha \left[-\frac{dV(x)}{dx} + y(t_j) + \sqrt{2D}\xi(t_{j-1}) \right] - \sum_{i=1}^{j-1} (-1)^i \binom{\alpha}{i} x(t_{j-1}), \quad (8)$$

其中, Δt 为采样步长,

$$\Delta t = 0.005 \text{ s}; \quad t_j = (j-1)\Delta t, \quad j = 1, 2, \dots, n;$$

$$\binom{\alpha}{i} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-i+1)i!}, \quad i = 1, 2, \dots, j-1.$$

我们主要关注布朗粒子输运状态, 为此选用布朗粒子的平均流速来描述粒子的运动 [25],

$$v = \left\langle \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} \right\rangle, \quad (9)$$

其中, t 和 t_0 分别为终止时刻和起始时刻, $\langle \cdot \rangle$ 表示求平均. 在模拟实验中, 我们用 $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{x(T) - x(t_0)}{T - t_0}$ 代替平均流速 v , 其中, N 为仿真次数, T 为仿真总时间.

在仿真过程中, 若仿真时间 T 选取过短, 就有可能导致输运速度不稳定; 若仿真时间 T 选取过

长, 就会花费不必要的时间. 设 $\alpha = 1$, $\omega = 1$, $D = 0.5$, 仿真得到布朗粒子平均流速 v 与仿真时间 T 的关系, 结果如图 3 所示. 对于布朗粒子在非对称势中的输运行为, 仿真时间 T 选取 150 s 是恰当的.

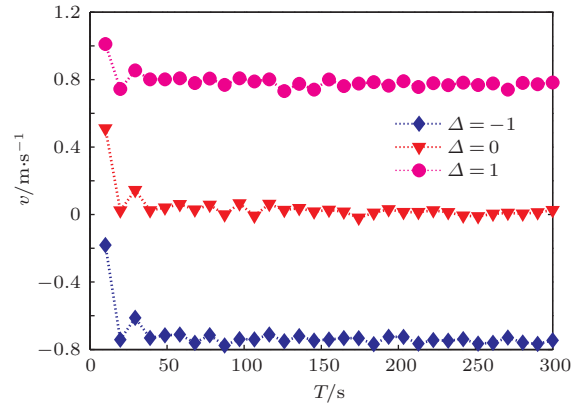


图3 平均流速 v 与仿真时间 T 的关系

3.1 分数阶过阻尼布朗马达的输运机理

一方面, 布朗粒子在 t 时刻受到的阻尼力大小为 $\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \dot{x}(\tau) d\tau$, 即 t 时刻的阻尼力是 $[0, t]$ 时段内的速度关于阻尼核 $\gamma(t)$ 的加权平均. 当阶数 $\alpha \rightarrow 1$ 时, 即系统的记忆性变差, 核函数 $\gamma(t)$ 的衰减加快, 这意味着历史速度对当前阻尼力贡献减少. 当阶数 α 降低时, 即系统的记忆性增强, 历史速度对当前阻尼力贡献增强.

在势场力固定的情况下, 当驱动力频率较小时, 布朗粒子受到一个固定方向驱动力的持续时间较长, 粒子在一段时间内具有相同运动方向的可能性较大. 而当前时刻粒子受到的分数阶阻尼力是之前各时刻速度的加权, 运动方向的一致使得加权后的阻尼力阻碍了粒子的定向输运, 粒子输运平均流速减小, 甚至当这种记忆性增强到某一程度时, 促使粒子反向越过势垒, 形成定向输运反向流.

当驱动力频率达到一定大小后, 由于外加驱动力正负变化较快, 粒子运动速度方向变化的频率也较快. 当系统记忆性达到某一程度时, 该段时间内不同方向速度产生的当前阻尼力相互抵消, 促进了布朗粒子的正向输运过程.

另一方面, 在过阻尼情况下, 阻尼力还可以表示为 $F(x, t) + \sqrt{2D}\xi(t)$ (即 (5) 式右端), 其中 $F(x, t)$ 是与系统对称性参数 Δ 密切相关的. 因此, 阻尼力不仅与系统阶数 α 、外加驱动力频率 ω 有关, 还与对称性参数 Δ 有关.

综上所述, 系统对称性参数 Δ 和系统阶数 α 均会影响粒子的输运状态, 两者间的相互作用将会形成粒子的复杂输运行为.

3.2 系统阶数、对称性参数及外加驱动力频率对粒子平均流速的影响

本文仿真均固定外加周期驱动力幅度 $A = 5$ 、噪声强度 $D = 0.5$.

首先固定对称性参数 $\Delta = 1$, 在系统阶数 α 不同的情况下, 图 4 给出了布朗粒子平均流速 v 与外加驱动力频率 ω 的关系. 从图 4 可以看出, 当驱动力频率较小时, 系统的记忆性阻碍了粒子的定向运动, 即随阶数的增加, 粒子的平均流速随之减小. 从图 4 还可以看出, 当外加驱动力频率 $\omega = 10$ 时, 在分数阶情况下布朗粒子具有更大的输运平均流速, 这与上述分析一致. 为了研究典型的外加驱动力频率 ω 下不同对称性参数 Δ 对输运速度 v 的影响, 主要选取较小频率 ($\omega = 1$) 与较大频率 ($\omega = 10$) 的情况进行对比.

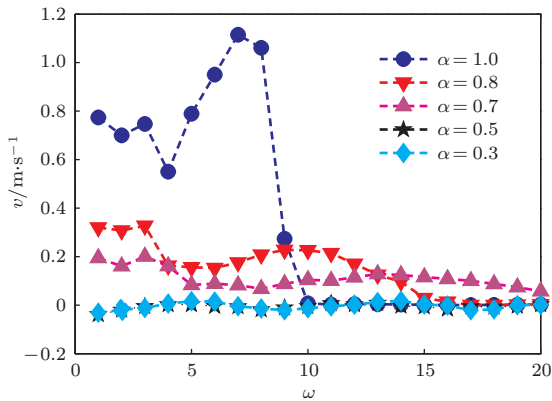


图 4 平均流速 v 与外加驱动力频率 ω 的关系

在外加驱动力频率 $\omega = 1, 10$ 的情况下, 图 5 给出了布朗粒子平均流速 v 与对称性参数 Δ 及系统阶数 α 的关系. 从图 5 可以明显地看出, 平均流速 v 关于 $\Delta = 0$ 平面反对称, 这与整数阶情况相同, 但在分数阶情况下, 当 $\Delta > 0$ 时, 出现了负向流; 当 $\Delta < 0$ 时, 出现了正向流.

选取图 5 中不同阶数情况下平均流速 v 与对称性参数 Δ 的关系曲线示于图 6.

因为平均流速 v 关于 $\Delta = 0$ 平面是反对称的, 因此下面的研究只讨论 $\Delta > 0$ 的情况. 当外加驱动力频率较小 ($\omega = 1$) 时, 在阶数 $\alpha = 1, 0.8, 0.7$ 的情况下, 布朗粒子平均流速出现了正向上的共振曲

线, 即在某一优化对称性参数 Δ 下系统存在正向极大平均流速. 同时, 随着阶数的降低 (即系统记忆性增强), 粒子运动的阻尼力增加, 致使不同阶数所对应的 $v(\Delta)$ 曲线 (平均流速关于对称性参数的曲线) 正向最大值减小, 甚至在阶数达到 0.5 时产生了定向输运反向流, 即出现了反向上的共振曲线. 当阶数降低到 0.3 的情况下, 布朗粒子的定向输运现象消失, 因此 α 在 0.3 与 0.5 之间存在使得输运速度反向最大的最优阶数. 下面将详细研究该最优阶数与系统对称性参数的关系.

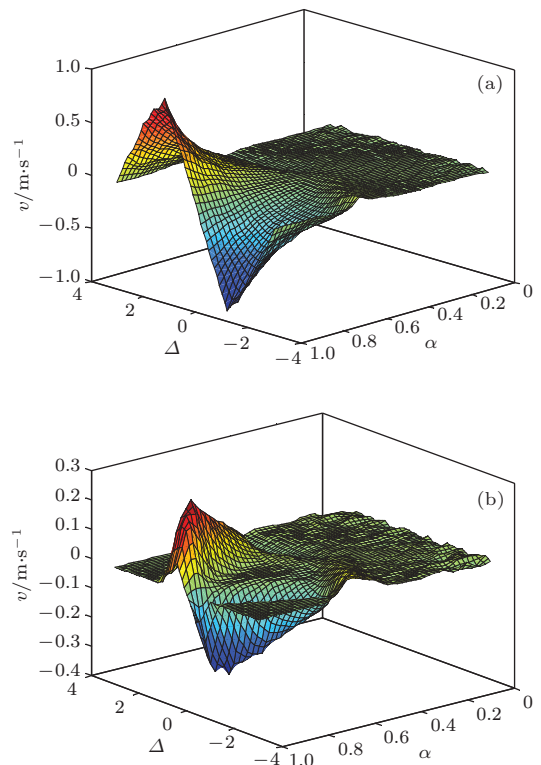


图 5 外加驱动力频率 ω 不同的情况下, 平均流速 v 与对称性参数 Δ 及系统阶数 α 的关系 (a) $\omega = 1$; (b) $\omega = 10$

在外加驱动力频率较大 ($\omega = 10$) 时, 阶数 $\alpha = 1, 0.8, 0.7$ 的情况下, 出现了小频率驱动力时一样的现象——正向上的共振曲线. 但是, 与小频率情况不同的是, 达到正向最大平均流速所对应的对称性参数 Δ 随着阶数的降低而增加, 阶数为 0.8 时所对应的最大值明显大于整数阶情况, 说明当驱动力频率 $\omega = 10$ 时, 系统记忆性 ($\alpha = 0.8$) 与系统对称性 ($\Delta = 1$) 共同作用促使布朗粒子产生极大输运平均流速. 当 $0 < \Delta < 0.5$ 时, 系统记忆性阻碍了粒子的定向输运, 而当 $\Delta > 0.5$ 时, 适当的记忆性可以促进布朗粒子定向输运, 这是外加驱动力频率较低时没有发生的. 因此, 系统记忆性对

粒子输运行为是促进还是阻碍, 不仅依赖于外加驱动力频率, 还与对称性参数的选取密切相关.

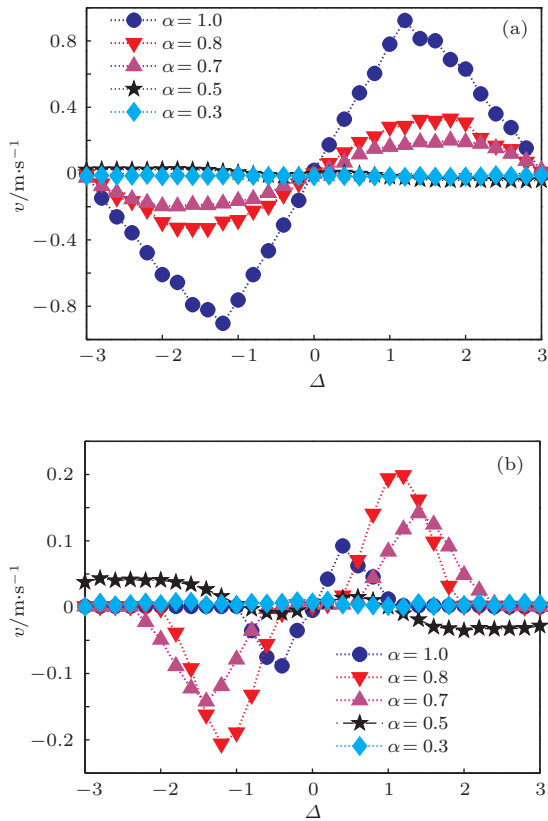


图6 外加驱动力频率 ω 不同的情况下, 平均流速 v 与对称性参数 Δ 的关系 (a) $\omega = 1$; (b) $\omega = 10$

在外加驱动力频率 ω 不同的情况下, 图7给出了平均流速 v 与系统阶数 α 的关系. 在外加驱动力频率较小 ($\omega = 1$) 的情况下, 当 $\alpha \rightarrow \alpha_0$ (α_0 为 $v = 0$ 时所对应的系统阶数, 见图7(a)) 时, 系统的记忆性增强导致粒子运动的阻尼力增强, 平均流速 v 减小并趋于0; 随着阶数 α 继续减小, 出现定向输运反向流, 并在负方向上出现一个共振峰值. 在外加驱动力频率较大 ($\omega = 10$) 的情况下, 当 $\Delta = 0.5, 1$ 时, 随阶数的降低, 平均流速出现了正向共振曲线; 而当 $\Delta = 2.6$ 时, 平均流速出现了反向共振曲线, 说明当对称性参数较大时, 分数阶阻尼力使得粒子输运反向.

选取外加驱动力频率 $\omega = 10$, 图8给出了对称性参数 Δ 分别为1和2.6时布朗粒子平均位移 x 随时间 t 的演化. 从图8可以明显地看出: 当 $\Delta = 1$, 布朗粒子在阶数 $\alpha = 0.85$ 时有正向最大流速; 当 $\Delta = 2.6$, 布朗粒子在阶数 $\alpha = 0.55$ 时有负向最大流速.

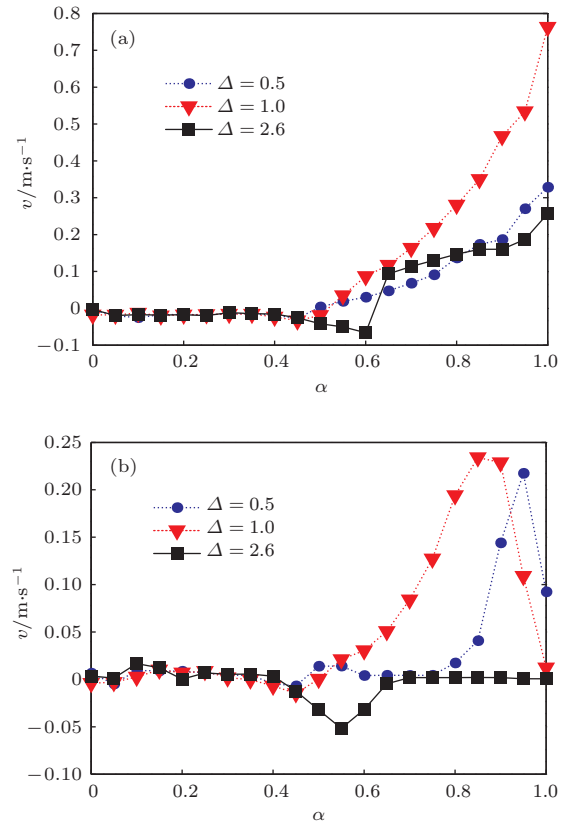


图7 外加驱动力频率 ω 不同的情况下, 平均流速 v 与系统阶数 α 的关系 (a) $\omega = 1$; (b) $\omega = 10$

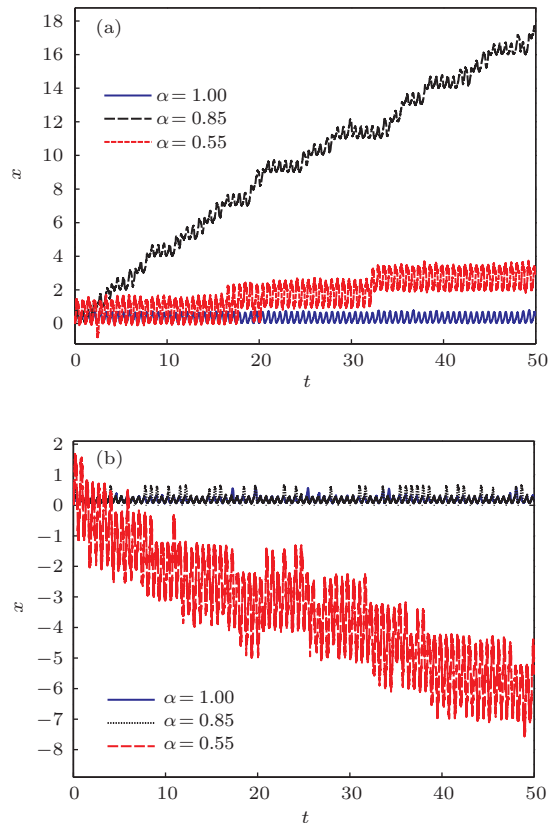


图8 对称性参数 Δ 不同的情况下, 粒子平均位移 x 随时间 t 的演化 (a) $\Delta = 1$; (b) $\Delta = 2.6$

图9给出了对称性参数 Δ 不同的情况下布朗粒子平均流速 v 与系统阶数 α 的关系. 从图9可以看出: 随着阶数 α 的递减, 粒子平均流速反向时(即 $v(\alpha)$ 曲线从正值变为负值时)所对应的阶数及负向共振时所对应的阶数只与对称性参数 Δ 有关, 与外加驱动力频率 ω 是无关联的, 而 ω 只以确定的方式影响曲线的形状. 当 $\Delta = 1$ 时, 若外加驱动力频率 $\omega < 5$, $v(\alpha)$ 随着 α 的降低而单调递减并最终反向, 出现负向共振; 若外加驱动力频率 $\omega > 10$, $v(\alpha)$ 随着 α 的降低先出现正向共振, 再出现负向共振. 当 $\Delta = 2.6$ 时, 若外加驱动力频率 $\omega < 2$, $v(\alpha)$ 随着 α 的降低而单调递减并最终反向, 出现负向共振; 若外加驱动力频率 $\omega = 5$, $v(\alpha)$ 随着 α 的降低先出现正向共振, 再出现负向共振; 若外加驱动力频率 $\omega > 10$ 时, $v(\alpha)$ 随着 α 的降低只出现负向共振.

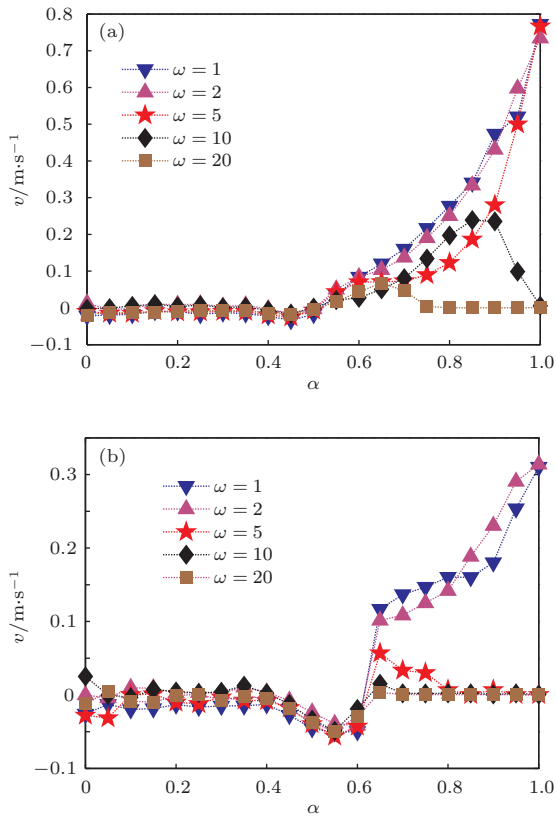


图9 对称性参数 Δ 不同的情况下, 平均流速 v 与系统阶数 α 的关系 (a) $\Delta = 1$; (b) $\Delta = 2.6$

在外加周期力频率不同条件下, 反向后最大平均流速 v 和反向后最大平均流速所对应阶数 α 与对称性参数 Δ 的关系分别如图10和图11所示. 由此可以发现随着对称性参数 Δ 的增加, 反向后最大平均流速 v 的绝对值增大, 并且所对应的阶数 α 随对称性参数 Δ 的变化单调增加. 图11中不同频率所

对应的曲线几乎重叠, 即负向共振时所对应的阶数与外加驱动力频率 ω 是无关联的. 这与上述分析一致.

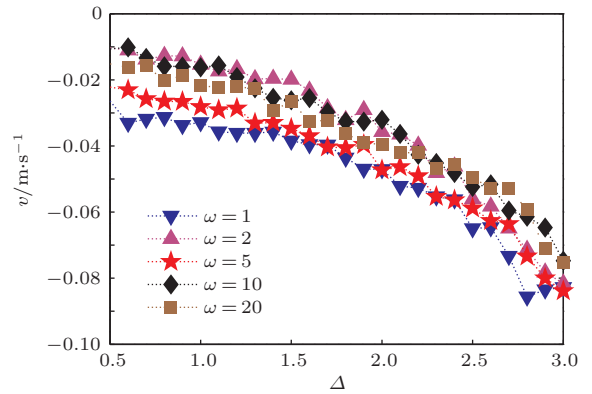


图10 反向后最大平均流速 v 与对称性参数 Δ 的关系

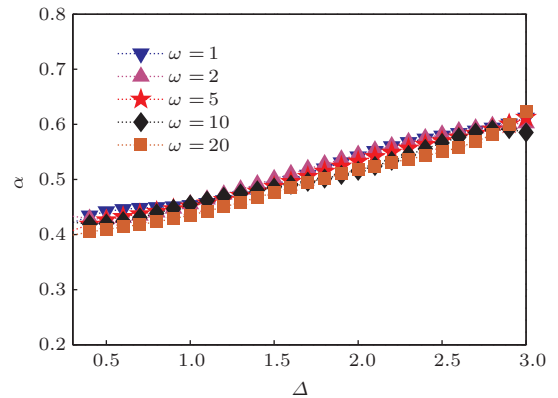


图11 反向后最大平均流速所对应的阶数 α 与对称性参数 Δ 的关系

4 结 论

本文主要研究了在阶数、对称性参数及其他参数共同作用下布朗粒子产生的复杂输运现象. 研究表明, 无论是整数阶情况还是分数阶情况, 布朗粒子平均流速均关于 $\Delta = 0$ 反对称. 在固定外加周期力幅度及噪声强度的情况下, 通过对称性参数-平均流速 $v(\Delta)$ 曲线的研究, 发现在小频率的外加驱动力作用下, 随着阶数降低, 该曲线所对应的正向最大流速下降, 而在较高频率的外加驱动力作用下, 适当的阶数更有利于粒子的输运, 并且不同阶数情况下达到正向最大平均流速所对应的对称性参数是不同的. 针对不同的外加驱动力频率, 对反向后最大平均流速所对应阶数与对称性参数的关系进行了研究, 发现布朗粒子形成定向输运反向流的条件只与阶数及对称性参数有关, 反向后最大平均流速所对应的阶数随对称性参数的增加而单调

递增. 此时, 外加驱动力频率只以确定的方式影响阶数-平均流速 $v(\alpha)$ 曲线的形状. 在小频率的外部周期性驱动下, 记忆性阻碍粒子的输运行为, 平均流速随阶数的下降而下降, 达到一定值后反向, 并在负向上形成共振峰; 而在较高频率的外加驱动力作用下, 可以使得 $v(\alpha)$ 曲线产生正向共振然后再负向共振, 或者只有负向共振. 对称性参数和记忆性参数的相互作用使得布朗粒子具有了更为丰富的输运行为.

参考文献

- [1] Hänggi P, Marchesoni F 2009 *Rev. Mod. Phys.* **81** 387
- [2] Smoluchowski M V 1912 *Physik. Z.* **13** 1069
- [3] Feynman R P, Leighton R B, Sands M 1963 *The Feynman Lectures on Physics* (Boston: Addison-Wesley) p46
- [4] Fendrik A J, Romanelli L 2012 *Phys. Rev. E* **85** 041149
- [5] Zheng Z G 2004 *Spatiotemporal Dynamics and Collective Behaviors in Coupled Nonlinear Systems* (Beijing: Higher Education Press) pp279–286 (in Chinese) [郑志刚 2004 耦合非线性系统的时空动力学与合作行为 (北京: 高等教育出版社) 第 279—286 页]
- [6] Qian M, Wang Y, Zhang X J 2003 *Chin. Phys. Lett.* **20** 810
- [7] Astumian R, Bier M 1994 *Phys. Rev. Lett.* **72** 1766
- [8] Reimann P 2002 *Phys. Rep.* **361** 57
- [9] Ai B Q, He Y F, Zhong W R 2010 *Phys. Rev. E* **82** 061102
- [10] Yang M C, Ripoll M 2013 *Phys. Rev. E* **87** 062110
- [11] Simon M S, Sancho J M, Lindenberg K 2013 *Phys. Rev. E* **88** 062105
- [12] Gao T F, Zheng Z G, Chen J C 2013 *Chin. Phys. B* **22** 080502
- [13] Bhat D, Gopalakrishnan M 2013 *Phys. Rev. E* **88** 042702
- [14] Liu F, Anh V V, Turner I, Zhuang P 2003 *J. Appl. Math. Comput.* **13** 233
- [15] Zhang L, Deng K, Luo M K 2012 *Chin. Phys. B* **21** 090505
- [16] Goychuk I, Kharchenko V 2012 *Phys. Rev. E* **85** 051131
- [17] Ernst D, Hellmann M, Kohler J, Weiss M 2012 *Soft Matter* **8** 4886
- [18] Wang F, Deng C, Tu Z, Ma H 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 040501 (in Chinese) [王飞, 邓翠, 屠浙, 马洪 2013 物理学报 **62** 040501]
- [19] Oldham K B, Spanier J 1974 *The Fractional Calculus* (New York: Academic Press) pp198–216
- [20] Kou S C, Xie X S 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 180603
- [21] Gao S L, Zhong S C, Wei K, Ma H 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 100502 (in Chinese) [高仕龙, 钟苏川, 韦鹏, 马洪 2012 物理学报 **61** 100502]
- [22] Podlubny I 1999 *Fractional Differential Equations* (San Diego: Academic Press) pp78–81
- [23] Samko S G, Kilbas A A, Marichev O I 1993 *Fractional Integrals and Derivatives Theory and Applications* (New York: Gordon and Breach Science Publisher Inc.) pp321–344
- [24] He Y F, Ai B Q 2010 *Phys. Rev. E* **81** 021110
- [25] Bai W S M, Peng H, Tu Z, Ma H 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 210501 (in Chinese) [白文斯密, 彭皓, 屠浙, 马洪 2012 物理学报 **61** 210501]

Influences of the system symmetry and memory on the transport behavior of Brownian motor^{*}

Wang Fei¹⁾²⁾ Xie Tian-Ting¹⁾ Deng Cui³⁾ Luo Mao-Kang^{1)†}

1) (*College of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610065, China*)

2) (*Science and Technology on Electronic Information Control Laboratory, Chengdu 610036, China*)

3) (*Southwest Institute of Technical Physics, Chengdu 610041, China*)

(Received 21 March 2014; revised manuscript received 28 April 2014)

Abstract

Based on the research on transport phenomenon of fractional Brownian motor, a systematic parameter (i.e. symmetry parameter) which describes the asymmetry of the periodic potential field is introduced, and the influences of the symmetry parameter and the memory parameter (i.e. the fractional order) on the transport behavior are also investigated. The numerical results show that the combined effect of fractional order and symmetry parameter can result in the reverse flow of Brownian particle's transport, and the fractional order corresponding to the maximal averaged velocity is irrelevant to the frequency of the external periodic force, but it will still increase monotonically as the symmetry parameter increases.

Keywords: fractional Brownian motor, memorable medium, asymmetry, directed transport

PACS: 05.10.Gg, 45.10.Hj

DOI: [10.7498/aps.63.160502](https://doi.org/10.7498/aps.63.160502)

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11171238) and the Foundation of Science and Technology on Electronic Information Control Laboratory, China (Grant No. 2013035).

[†] Corresponding author. E-mail: makaluo@scu.edu.cn