

幂函数型单势阱随机振动系统的广义随机共振*

季袁冬 张路 罗懋康†

(四川大学数学学院, 成都 610065)

(2014年3月13日收到; 2014年4月29日收到修改稿)

将线性随机振动系统中通常的简谐势阱推广为更一般的幂函数型势阱, 得到幂函数型单势阱非线性随机振动系统. 利用随机情形下的二阶 Runge-Kutta 算法研究了噪声强度、势阱参数和周期激励参数对系统稳态响应的一阶矩振幅和系统响应的稳态方差的影响. 对决定势阱形状的势阱参数之一 b 历经 $b < 2$, $b > 2$ 以及相当于简谐势阱的 $b = 2$ 等全部情况的研究表明: 随噪声强度 D 的变化, 系统稳态响应的一阶矩振幅可以在 $b < 2$ 时出现非单调变化, 即发生广义随机共振现象, 而对通常的 $b = 2$ 简谐势阱以及 $b > 2$ 的情况, 则无该现象发生; 随势阱参数的变化, 系统稳态响应的一阶矩振幅以及系统响应的稳态方差也可以发生非单调变化.

关键词: 单势阱系统, 随机振动, 随机共振, 随机 Runge-Kutta 算法

PACS: 43.40.Hb, 05.40.-a, 05.10.-a

DOI: 10.7498/aps.63.164302

1 引言

随机振动是指由随机激励引起的机械或结构等动力学系统的振动^[1]. 爱因斯坦^[2]在1905年发表了第一篇关于随机振动的论文, 研究了悬浮于水中的微粒在随机力作用下的随机运动. 人们对地震、风、海浪、粗糙路面上行驶的汽车、不稳定气流中飞行的飞行器等的研究中广泛地观察到了随机振动^[3]. 近几十年, 学者们对随机振动系统的随机共振现象^[4]进行了广泛而深入的研究. 目前, 随机振动的相关应用研究已拓展到了一些新的领域, 例如 Chen 等^[5]研究发现在弱信号检测中随机共振现象对提高信号可检测性起着非常重要的作用.

传统的随机共振是指系统的输出信噪比随噪声强度非单调变化的现象, 在对双势阱系统(如具有 Duffing 型势函数 $V(x) = -\frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{4}x^4$ 的 Duffing 系统)随机振动的研究中广泛发现了这种随机共振现象^[6]. Gitterman^[7]在对线性振动系统(即简谐势阱系统, 其势函数 $V(x) = \frac{1}{2}\omega^2x^2$)随机振

动的研究中提出了广义随机共振的概念, 即系统输出响应或响应的某些函数(如矩、自相关函数、功率谱或信噪比等)随噪声的某些特征参数(如噪声强度、相关率等)非单调变化的现象^[8]. 在对带线性边界的 Duffing 型双势阱系统^[9]、混合双势阱 ($V(x) = e^{-x^2} + k|x|^q/q$) 系统^[10]、幂函数型双势阱 ($V(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2\gamma}|x|^{2\gamma}$) 系统^[11]的研究中均发现了广义随机共振现象. 最近, 学者们也开始关注单势阱系统的随机振动. 在对绝对值型单势阱

$$\left(V(x) = \begin{cases} k_1|x| & (|x| \leq L), \\ k_2(|x| - L) + k_1L & (|x| > L) \end{cases} \right)$$

系统^[12]和指数型单势阱 ($V(x) = \epsilon e^{-(x-x_0^2)/2\delta^2}$) 系统^[13]的研究中也发现了广义随机共振现象; 田祥友等^[14]在对一阶线性振动系统的研究中发现了系统输出信噪比随系统参数非单调变化的调参广义随机共振现象.

本文将简谐势阱 ($V(x) = \frac{1}{2}\omega^2x^2$) 推广为更一般的幂函数型势阱 ($V(x) = \frac{a}{b}|x|^b$), 得到了幂函数型单势阱随机振动系统, 其势函数如图 1 所示. 当

* 国家自然科学基金(批准号: 11171238)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: makaluo@scu.edu.cn

势阱参数 $b < 1$ 时, 势阱中心宽度较窄且越靠近中心势阱壁越陡峭, 而势阱两边沿比较平坦; 当 $b = 1$ 时, 势阱为 V 型; 当 $1 < b < 2$ 时, 势阱形状由 V 型逐渐过渡为 U 型; 当 $b \geq 2$ 时, 势阱为 U 型, 势阱中心较平坦而势阱边沿比较陡峭.

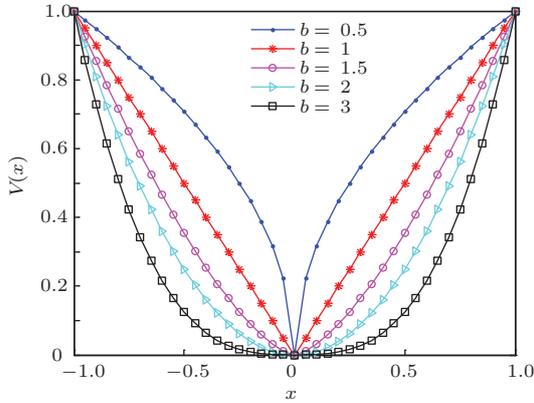


图1 幂函数型势函数 $V(x)$ ($a = 1$)

根据 Taylor 公式, 更复杂的势阱系统的势函数 $V(x)$ 基本上均可展开成为若干幂函数型势函数叠加的形式, 所以, 本文研究结果更重要的意义在于为更复杂的势阱系统随机振动研究提供了基础.

本文利用随机情形下的二阶 Runge-Kutta 算法, 研究了各参数对幂函数型单势阱随机振动系统稳态响应的一阶矩振幅和稳态方差的影响. 结果表明: 随噪声强度 D 的变化, 系统稳态响应的一阶矩振幅可以在势阱参数 $b < 2$ 时出现广义随机共振现象, 而对通常的 $b = 2$ 简谐势阱以及势阱参数 $b > 2$ 的情况, 则无该现象发生; 随势阱参数 b 的变化, 系统稳态响应的一阶矩振幅以及系统响应的稳态方差可以发生非单调变化; 随势阱参数 a 的变化, 系统响应的稳态方差也可以发生非单调变化; 随周期激励振幅 A 和角频率 ω 的变化, 系统响应的稳态方差在势阱参数 $b \neq 2$ 时出现了单调递增或单调递减变化, 而对通常的简谐势阱 ($b = 2$) 情况, 系统响应的稳态方差与周期激励振幅 A 和角频率 ω 无关.

因势阱参数 a, b 对幂函数型单势阱系统的随机振动影响较大, 故可以通过对势阱参数的调节实现对幂函数型单势阱系统随机振动的有效控制^[15]. 因而, 本文结果除了为研究复杂势函数 $V(x)$ 提供方法基础外, 对于展开和加强单势阱系统在弱信号检测中的应用研究具有基本的意义.

2 系统模型

在周期信号和高斯白噪声共同激励下, 忽略惯性项的随机振动系统的数学模型如下:

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dV(x)}{dx} = A \cos(\omega t) + \eta(t), \quad (1)$$

其中, $V(x)$ 为系统的势函数; $A > 0$, 为周期激励信号振幅; $\omega > 0$, 为周期激励信号角频率; $\eta(t)$ 为高斯白噪声. 噪声均值和自相关函数满足:

$$\langle \eta(t) \rangle = 0, \quad \langle \eta(t)\eta(s) \rangle = 2D\delta(t-s), \quad (2)$$

其中 D 是噪声强度.

本文研究的单势阱系统的势函数为如下幂函数形式:

$$V(x) = \frac{a}{b}|x|^b, \quad (3)$$

其中, 参数 $a > 0, b > 0$. $V(x)$ 是一个含绝对值函数的复合函数, 令 $U(x) = \frac{dV(x)}{dx}$, 利用复合函数求导法则可得

$$\begin{aligned} U(x) &= \left(\frac{a}{b}|x|^b \right)' \\ &= a|x|^{b-1}(|x|)' \\ &= \begin{cases} a|x|^{b-1} \frac{|x|}{x} = \frac{a|x|^b}{x} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0), \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

当 $x \neq 0$ 时, $(|x|)' = \frac{|x|}{x}$; 当 $x = 0$ 时, 需要注意的是, 在通常意义下 $(|x|)'$ 的导数并不存在, 这里我们利用了弱导数的定义进行求导^[16], 在弱导数意义下有 $(|0|)' = 0$.

不同参数条件下势函数 $V(x)$ 及其导数 $U(x)$ 的图像分别如图 1 和图 2 所示, 势函数 $V(x)$ 的形状由参数 a, b 共同控制. 将 (4) 式代入 (1) 式可得幂函数型单势阱随机振动系统满足的 Langevin 方程为

$$\dot{x}(t) = -U(x) + A \cos(\omega t) + \eta(t), \quad (5)$$

由于 (5) 式是一个非线性随机微分方程, 求解它的精确解存在理论困难, 现有的对于 Duffing 型双势阱随机振动系统的理论分析结果主要是在绝热近似条件下得到的^[17]. 当噪声 $\eta(t)$ 为外部噪声时系统并不一定满足绝热近似条件, 为了得到更一般的结果, 我们以二阶随机 Runge-Kutta 算法近似求解这个方程, 从而研究系统的随机振动特性.

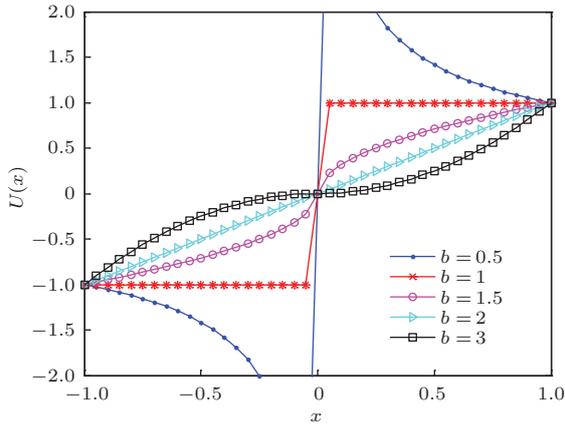


图2 幂函数型势函数的导数 $U(x)$ ($a = 1$)

首先, 我们考虑如下不显含时间 t 的 Langevin 方程:

$$\dot{x} = f(x) + \eta(t). \quad (6)$$

Honeycutt^[18] 将确定性常微分方程的 Runge-Kutta 算法扩展到包含随机项的情况, 提出了二阶随机 Runge-Kutta 算法:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \Delta t(K_n^1 + K_n^2)/2 \\ &\quad + \sqrt{2D\Delta t}\zeta, \\ K_n^1 &= f(x_n), \\ K_n^2 &= f(x_n + \Delta tK_n^1 + \sqrt{2D\Delta t}\zeta), \end{aligned} \quad (7)$$

其中, Δt 为采样间隔; ζ 为标准高斯随机数,

$$\langle \zeta(t) \rangle = 0, \quad \langle \zeta^2 \rangle = 1. \quad (8)$$

文献 [19] 指出相较于直接使用确定性常微分方程的 Runge-Kutta 算法进行随机振动系统的数值模拟, 该算法提高了数值模拟精度, 对于无惯性项的 Langevin 方程, 该算法是最简单方便的数值求解算法.

在 Honeycutt 的研究基础上, 我们将二阶随机 Runge-Kutta 算法推广到显含时间 t 的 Langevin 方程. 令

$$f(t, x) = -U(x) + A \cos(\omega t), \quad (9)$$

代入 (1) 式可得

$$\dot{x}(t) = f(t, x) + \eta(t). \quad (10)$$

参考一般的常微分方程 Runge-Kutta 算法^[20], 将 (7) 式推广为如下显含时间 t 的二阶随机 Runge-Kutta 算法:

$$x_{n+1} = x_n + \Delta t(K_1 + K_2)/2$$

$$+ \sqrt{2D\Delta t}\zeta,$$

$$K_1 = f(t_n, x_n),$$

$$K_2 = f(t_n + \Delta t, x_n + \Delta tK_1 + \sqrt{2D\Delta t}\zeta), \quad (11)$$

其中 ζ 为满足 (8) 式标准高斯随机数.

由显含时间 t 的二阶随机 Runge-Kutta 算法表达式可知, 当系统方程不显含时间 t 时, (11) 式退化为 (7) 式; 当噪声强度 $D = 0$ 时, (7) 和 (11) 式均退化为求解确定性常微分方程的二阶 Runge-Kutta 算法.

二阶随机 Runge-Kutta 算法 (11) 式是一种推广的随机 Euler 算法, 部分文献也称其为随机 Heun 算法. 由文献 [21] 的研究结果可以证明二阶随机 Runge-Kutta 算法 (11) 式计算得到的随机序列 $\{x_n\}$ 在 $\Delta t \rightarrow 0$ 时均方收敛于 (10) 式所对应的在 Stratonovic 意义下随机微分方程的解 $x(t)$; 由文献 [22] 的研究结果可知, 随机序列 $\{x_n\}$ 的均值收敛于 $x(t)$ 的均值, 随机序列 $\{x_n\}$ 的方差收敛于 $x(t)$ 的方差, 即满足

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle x_n \rangle &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle x \rangle, \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle [x_n - \langle x_n \rangle]^2 \rangle &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle [x - \langle x \rangle]^2 \rangle. \end{aligned}$$

文献 [23] 指出由二阶随机 Runge-Kutta 算法计算的随机序列 $\{x_n\}$ 估计 $x(t)$ 均值的误差是 $(\Delta t)^2$ 阶的, 估计 $x(t)$ 标准差 (方差的平方根) 的误差是 $(\Delta t)^{3/2}$ 阶的. 综上可知, 以二阶随机 Runge-Kutta 算法求解随机微分方程 (10) 是有效的, 相关证明和推导过程可以参见文献 [21—23].

3 简谐单势阱系统输出响应的一阶矩和稳态方差

当 $b = 2$ 时, 势函数 $V(x)$ 称为简谐势^[7], 其表达式为

$$V(x) = \frac{a}{2}x^2, \quad (12)$$

代入 (1) 式有

$$\frac{dx}{dt} = -ax + A \cos(\omega t) + \eta(t). \quad (13)$$

(13) 式是一个线性随机微分方程, 可以精确求得系统输出响应的一阶矩和稳态方差的解析表达式. 下面我们将系统输出响应的一阶矩和稳态方差的解析解和二阶随机 Runge-Kutta 算法求解得到的

近似解进行对比, 以此为例, 进一步验证二阶随机 Runge-Kutta 算法的有效性.

对 (13) 式两边取均值, 则有

$$\frac{d\langle x \rangle}{dt} = -a\langle x \rangle + A \cos(\omega t), \quad (14)$$

这是一个关于系统输出响应一阶矩 $\langle x \rangle$ 的非齐次线性常微分方程 [24], 求解可得

$$\begin{aligned} \langle x(t) \rangle = & e^{-at}(x(0) - A_p \cos \phi_p) \\ & + A_p \cos(\omega t - \phi_p), \end{aligned} \quad (15)$$

其中, $x(0)$ 为初值, 稳态响应振幅 A_p 和稳态响应相角 ϕ_p 分别满足:

$$A_p = \frac{A}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}, \quad (16)$$

$$\tan \phi_p = \frac{\omega}{a}. \quad (17)$$

由 (16) 式可知, 简谐单势阱系统稳态响应的一阶矩振幅与周期激励参数 A , ω 和势阱参数 a 有关, 而与噪声强度 D 无关. 文献 [7] 研究得到了高斯白噪声激励简谐单势阱系统输出响应的稳态方差的表达式,

$$\sigma^2 = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle [x(t) - \langle x(t) \rangle]^2 \rangle = \frac{D}{a}, \quad (18)$$

由 (18) 式可知, 简谐单势阱系统响应的稳态方差与噪声强度 D 成正比, 与势阱参数 a 成反比, 而与周期激励参数无关.

利用二阶随机 Runge-Kutta 算法求解 (13) 式, 参数 $a = 1$, $b = 2$, $D = 1$, $A = 1$, $\omega = 1$ rad/s, 初值 $x(0) = 1$, 采样间隔 = 0.01 s, 仿真时长为 30 s, 仿真 1000 次并对系统输出响应求平均得到输出响应的一阶矩, 结果如图 3 所示. 由图 3 可知, 二阶随机 Runge-Kutta 算法求得的系统输出响应的一阶矩和利用 (15) 式得到的精确解之间的误差非常小.

利用二阶随机 Runge-Kutta 算法数值求解系统输出响应的稳态方差时, 由于仿真时长的限制, 数值仿真无法得到 $t \rightarrow \infty$ 的情况, 但从图 3 可以看出, 当 t 较大时系统输出响应已趋于稳定, 所以我们可用数值求解得到的时域上最后 1000 个时刻系统输出响应的方差的均值近似得到系统输出响应的稳态方差, 计算公式如下:

$$\sigma^2 \approx \frac{1}{M} \sum_{i=M-1000}^M \langle [x(t_i) - \langle x(t_i) \rangle]^2 \rangle, \quad (19)$$

其中 M 为仿真数据点数. 噪声强度 D 取为 [0, 10], 其他仿真参数与前面一致, 利用二阶随机 Runge-Kutta 算法和 (19) 式进行数值仿真求得系统响应的稳态方差, 结果如图 4 所示. 由图 4 可知, 由二阶随机 Runge-Kutta 算法求得的系统响应的稳态方差随噪声强度 D 的变化趋势和利用 (18) 式所得的理论结果是一致的.

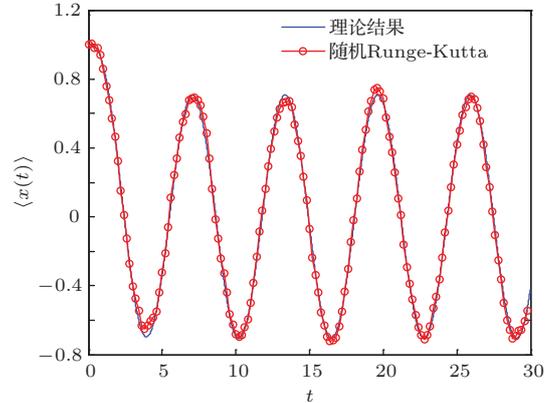


图3 (网刊彩色) 系统输出响应的一阶矩

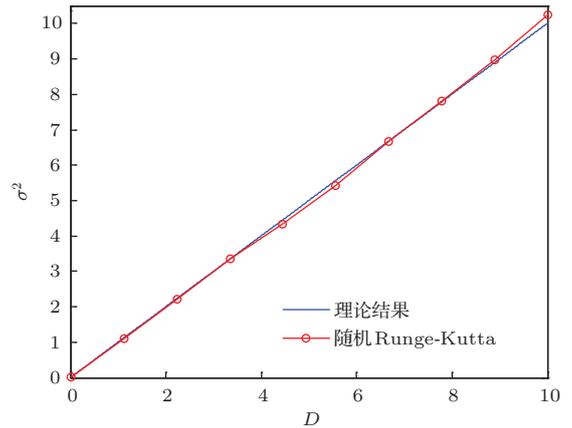


图4 系统输出响应的稳态方差 σ^2 随噪声强度 D 的变化

上述对简谐单势阱系统输出响应的一阶矩和稳态方差的数值仿真表明, 利用二阶随机 Runge-Kutta 算法进行数值仿真得到的结果与理论结果的误差非常小, 进一步说明了该算法的有效性.

4 幂函数型单势阱系统稳态响应的一阶矩振幅随参数的变化

对于简谐势阱系统 ($V(x) = \frac{a}{2}x^2$), 由 (15) 和 (16) 式可知系统稳态响应的一阶矩振幅与噪声强度 D 无关. 而我们研究发现, 对于幂函数型单势阱系统 (5), 在势阱参数 a 一定时, 随着势函数参数 b

的变化, 噪声强度 D 对系统稳态响应的一阶矩的影响是不同的. 下面利用二阶随机 Runge-Kutta 算法数值仿真得到系统输出响应的一阶矩, 势函数参数 b 从小到大增加, 分别取为 0.1, 0.5, 2, 3, 噪声强度 D 取为 0, 0.5, 2, 其他仿真参数为 $a = 1$, $A = 1$, $\omega = 1$ rad/s, 初值 $x(0) = 0$, 采样间隔 $\Delta t = 0.005$ s, 仿真时长为 30 s. 仿真 1000 次并对系统输出响应求平均得到的输出响应的一阶矩如图 5 所示.

如图 5(a) 所示, 当 $b = 0.1$ 时, 若 $D = 0$, 在周期激励的影响下系统输出响应跳跃到了较为平坦的势阱边沿做简谐振动; 在 $D > 0$ 时, 在周期激励和白噪声共同作用下, 系统稳态响应的一阶矩也跳跃到了较平坦的势阱边沿做简谐振动. 但需要指出的是, 这种跳跃是不稳定的, 即每次数值模拟得到的系统稳态响应一阶矩的图像可能不相同. 如图 5(b) 所示, 当 $b = 0.5$ 时, 若 $D = 0$, 由于此时势阱中心较陡峭而周期激励幅度较小, 不足以使系统输出响应跳跃到平坦的势阱边沿, 故系统输出响应没有产生振动; 但 $D > 0$ 时, 系统稳态响应的一阶矩在平衡点附近做简谐振动, 且振幅随噪声强

度 D 的增加而增大, 此时噪声对系统响应的振动起促进作用. 如图 5(c) 所示, 当 $b = 2$ 时, 噪声强度 D 对系统稳态响应的一阶矩振幅不产生影响, 这与利用 (15) 和 (16) 式所得的理论分析结果一致. 如图 5(d) 所示, 当 $b = 3$ 时, 因势阱中心也较平坦, 系统稳态响应的一阶矩在平衡点附近做简谐振动, 但振幅随噪声强度 D 的增大而减小, 在 $D = 0$ 时系统稳态响应的一阶矩振幅最大, 此时噪声对系统响应的振动起阻碍作用.

由前面分析可知, 在周期信号和高斯白噪声的共同激励下, 幂函数型单势阱系统稳态响应的一阶矩也可以近似表示为如下形式:

$$\langle x(t) \rangle_{st} \approx A_p \cos(\omega t - \phi_p). \quad (20)$$

为了进一步研究系统稳态响应的一阶矩振幅与各参数的关系, 我们对利用二阶随机 Runge-Kutta 算法数值仿真得到的系统响应一阶矩 $\langle x(t_n) \rangle$ 进行离散傅里叶变换^[25], 得到其振幅的近似值:

$$A_p \approx F(k_0) = \sum_{n=0}^{N-1} \langle x(t_n) \rangle e^{-i \frac{2\pi n}{N} k_0}, \quad (21)$$

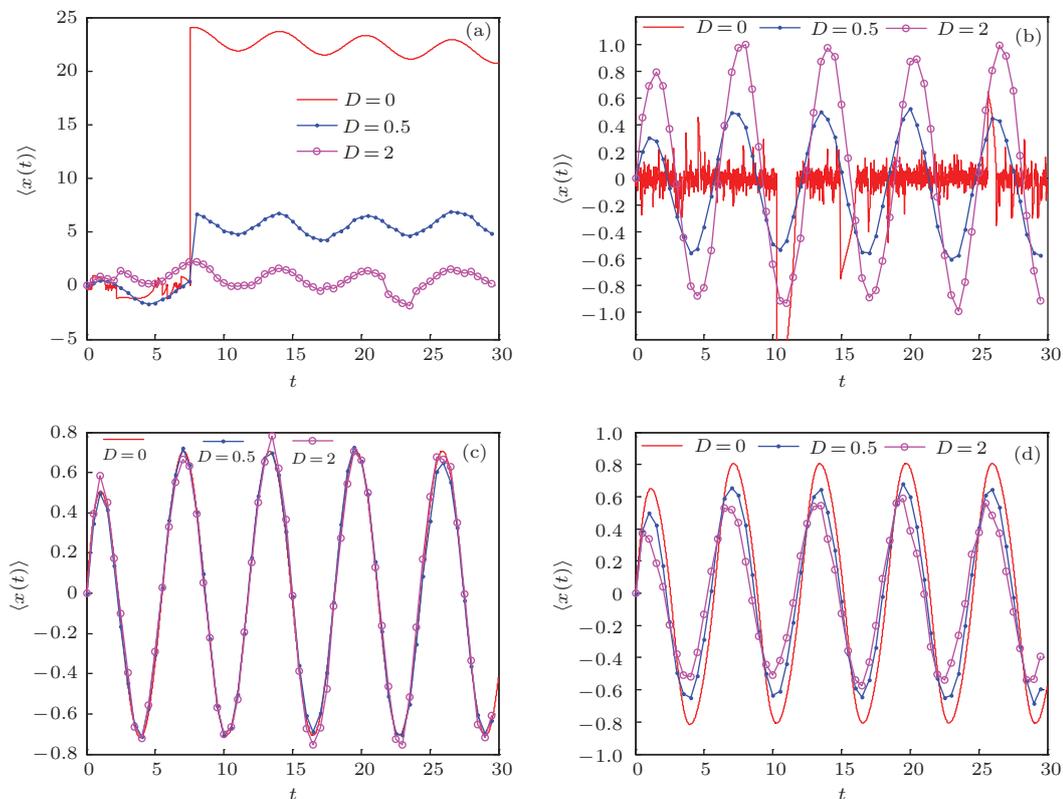
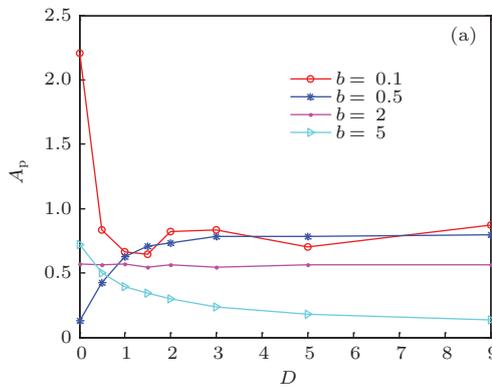


图5 (网刊彩色) 系统输出响应一阶矩 (a) $b = 0.1$; (b) $b = 0.5$; (c) $b = 2$; (d) $b = 3$

其中, $k_0 = \frac{\omega}{2\pi} N \Delta t$, ω 为系统激励角频率, N 为离散数据点数, Δt 为采样间隔. 仿真参数取为初值 $x(0) = 0$, 采样间隔 $\Delta t = 0.005$ s, 仿真时长为 30 s, 仿真 1000 次.

1) 系统稳态响应的一阶矩振幅随噪声强度 D 的变化

由前面分析可知, 势阱的形状不同, 噪声强度对系统振动的影响不同. 如图 6(a) 所示, 当 $a = 1$ 时振幅 A_p 随噪声强度 D 的变化有四种变化趋势: 若 b 较小 ($b = 0.1$), 随噪声强度 D 的增大, 系统稳态响应的一阶矩振幅 A_p 先减小再增大, 最后趋于稳定, 此时产生了广义随机共振; 若 b 较大但小于 2 ($b = 0.5$), 振幅 A_p 随噪声强度 D 的增加而增大, 最后趋于稳定, 在噪声强度较小时噪声对系统振动



起促进作用; 若 $b = 2$, 噪声强度 D 的变化不影响振幅 A_p 的大小; 若 $b > 2$ ($b = 5$), 振幅 A_p 随噪声强度 D 的增大而减小, 此时噪声对系统振动起抑制作用. 由图 6(b) 可知, 当 $b = 0.5$ 时, 参数 a 的变化也引起了势阱形状的变化, 从而改变了振幅 A_p 随噪声强度 D 的变化趋势. 综上所述, 对于 $b < 2$ 的情况, 因为势阱中心较陡峭而边沿较平坦, 随噪声强度 D 的变化, 幂函数单势阱系统稳态响应的一阶矩振幅可以出现非单调变化, 即发生广义随机共振.

2) 系统稳态响应的一阶矩振幅随势阱参数 a 的变化

对于幂函数型单势阱系统, 参数 a 越大, 势阱中心越陡峭且势阱高度越高, 系统越难产生简谐振动, 如图 7 所示, 系统稳态响应的一阶矩振幅 A_p 均随 a 的增大而减小.

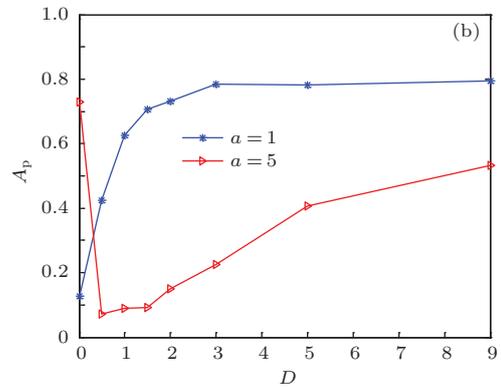


图6 振幅 A_p 随噪声强度 D 的变化 ($A = 1, \omega = 1$) (a) $a = 1$; (b) $b = 0.5$

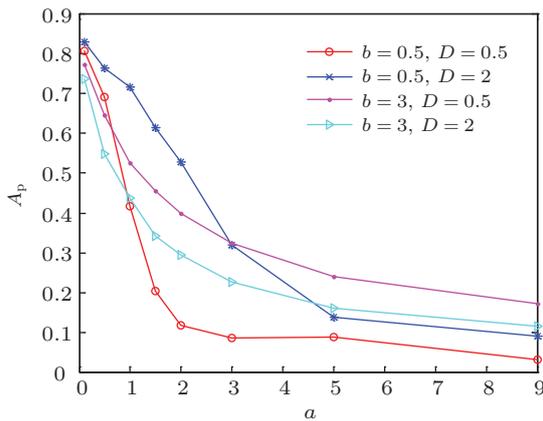


图7 振幅 A_p 随势阱参数 a 的变化 ($A = 1, \omega = 1$)

3) 系统稳态响应的一阶矩振幅随势阱参数 b 的变化

当势阱参数 a 一定时, 参数 b 将影响势阱的形状(图 1). 如图 8(a) 所示, 当 $a = 1$ 时, 振幅 A_p 随势阱参数 b 的变化有以下两种变化趋势: 若噪声强

度较小 ($D = 0, 0.5$), 随 b 的增大, 振幅 A_p 先减小再增大, 最后趋于稳定, 即振幅 A_p 的大小出现了非单调变化; 若噪声强度较大 ($D = 2, 9$), 振幅 A_p 随 b 的增大而不断减小. 当参数 b 一定时, 参数 a 越大, 势阱中心将越陡峭, 由图 8(b) 可知, 当 $D = 2$ 时, a 的变化改变了振幅 A_p 随参数 b 的变化趋势.

4) 系统稳态响应的一阶矩振幅随周期激励振幅 A 和角频率 ω 的变化

周期激励振幅 A 和角频率 ω 对幂函数型单势阱系统振动的影响与简谐单势阱系统的情况相似: 周期激励振幅 A 越大, 振子越容易产生简谐振动, 系统稳态响应的一阶矩振幅 A_p 也越大, 如图 9(a), (b) 所示; 周期激励角频率 ω 越大, 振子越难产生简谐振动, 系统稳态响应的一阶矩振幅 A_p 越小, 势阱参数 a 或 b 越大, 势阱中心将越陡峭, 相应振幅 A_p 也减小得越慢, 如图 10 所示.

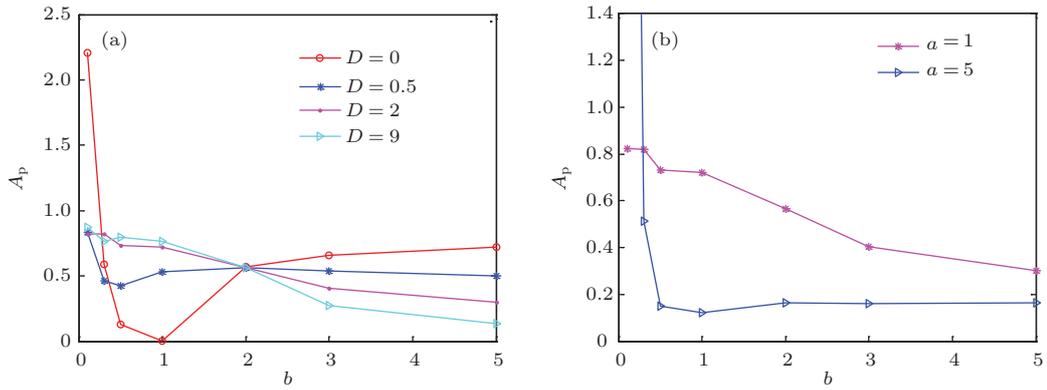


图8 振幅 A_p 随势阱参数 b 的变化 ($A = 1, \omega = 1$) (a) $a = 1$; (b) $D = 2$

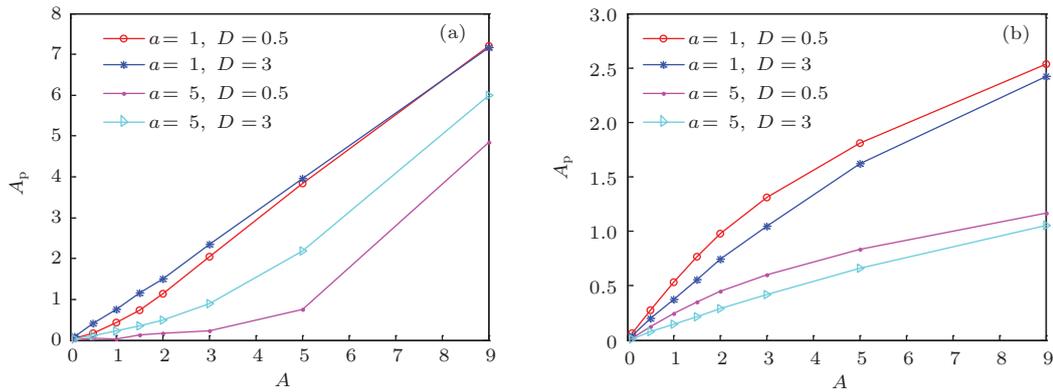


图9 振幅 A_p 随周期激励振幅 A 的变化 (a) $b = 0.5, \omega = 1$; (b) $b = 3, \omega = 1$

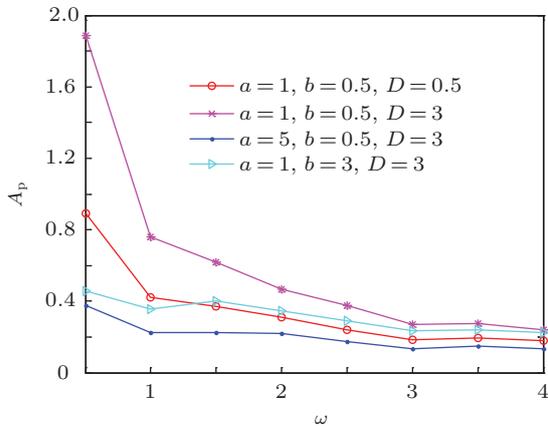


图10 振幅 A_p 随周期激励角频率 ω 的变化 ($A = 1$)

5 幂函数型单势阱系统响应的稳态方差随参数的变化

系统输出响应的稳态方差反映了系统稳态响应与系统稳态响应的平均值(即系统稳态响应的一阶矩或期望值)的偏离程度, 稳态方差越小表明系统稳态响应在系统稳态响应的平均值附近的波动越小. 对于简谐单势阱系统($b = 2$), 由(18)式可

知, 系统响应的稳态方差与噪声强度 D 成正比, 与参数 a 成反比, 而与周期激励振幅 A 和角频率 ω 无关. 我们研究发现, 对于其他幂函数型单势阱系统 ($b \neq 2$), 各系统参数的变化均会影响系统输出响应稳态方差 σ^2 的变化. 下面利用二阶随机 Runge-Kutta 算法和(19)式估计其他幂函数型单势阱系统响应的稳态方差, 并进一步分析各参数对稳态方差的影响. 数值仿真参数取为初值 $x(0) = 0$, 采样间隔 $\Delta t = 0.005$ s, 仿真时长为 30 s, 仿真 1000 次.

1) 系统响应的稳态方差随噪声强度 D 的变化

对于简谐势阱系统 ($b = 2$), 系统响应的稳态方差 σ^2 随噪声强度 D 的变化趋势与利用(18)式得到的结果一致. 当 $b < 2$ 时, 随噪声强度 D 的增加, 稳态方差 σ^2 不断增大, 且增加速度越来越大, 如图 11(a) 所示, 此时当参数 a, b 的变化使得在平衡点附近势阱中心越陡峭时, 在周期激励和噪声的共同作用下系统响应将有很大概率从势阱中心跳跃到平坦的势阱边沿, 于是系统稳态响应在其平均值附近的波动情况受噪声的影响越大, 且噪声越强, 跳跃发生的概率越大, 波动越剧烈; 当 $b > 2$ 时, 随

噪声强度 D 的增加, 稳态方差 σ^2 不断增大, 但增加速度越来越小, 如图 11 (b) 所示, 此时当参数 a, b 的变化使得在平衡点附近势阱中心越平坦而边沿越陡峭时, 在周期激励和噪声的共同作用下系统响应将在平衡点附近做简谐运动, 陡峭的势阱边沿限制了噪声对系统输出响应的影响, 势阱中心越平坦, 势阱边沿越陡峭, 系统稳态响应在其平均值附近的波动越小.

2) 系统响应的稳态方差随势阱参数 a 的变化

当 b 较小时, 随着参数 a 的增大, 幂函数型单势阱系统响应的稳态方差 σ^2 先减小再增大, 如图 12 (a) 所示, 此时势阱中心陡峭而边缘较平坦, 势阱中心宽度将随参数 a 的增大而不断减小, 但势阱壁却不断增高, 在势阱中心宽度足够大时较高的势阱壁将限制系统响应在平衡点附近振动, 所以稳态方差先有一个减小的趋势, 但随着参数 a 的不断增大, 当势阱中心宽度小到一定程度后, 在周期激励和噪声的共同作用下, 系统响应在势阱两边沿不断发生跳跃, 使得系统稳态响应在其平均值附近的波动越来越剧烈, 系统稳态方差越来越大; 当 b 较

大时, 随着参数 a 的增大, 稳态方差 σ^2 不断减小, 最后趋于稳定, 如图 12 (b) 所示, 此时周期激励较小不能使系统响应跳跃到势阱的边沿, 故系统响应会在平衡点附近做简谐振动, 且参数 a 越大, 势阱壁越高, 较高的势阱壁将限制噪声对系统输出响应的影响, 系统稳态响应在其平均值附近的波动越小.

3) 系统响应的稳态方差随势阱参数 b 的变化

当其他参数一定时, 随着参数 b 的增大, 系统响应的稳态方差 σ^2 有以下两种变化趋势: 当 $a = 1, 2$ 时, 随着参数 b 的增大, 稳态方差 σ^2 不断减小最后趋于稳定, 如图 13 (a) 所示, 当 b 较小时, 势阱中心陡峭而边沿平坦, 系统响应将有较大概率跳跃到势阱边沿, 故系统稳态响应在其平均值附近的波动较剧烈, 但随着参数 b 的增大, 势阱形状将发生改变, 当 $b > 2$ 以后势阱中心越来越平坦而势阱边沿越来越陡峭, 系统响应将在平衡点附近做简谐振动, 陡峭的势阱边沿将限制噪声对系统响应的影响, 系统稳态响应在其平均值附近的波动越小; 当 $a = 3, 5$ 时, 随着参数 b 的增大, 稳态方差 σ^2 出现先减小再不断增大的非单调变化, 如图 13 (b) 所示, 当 $b < 1$

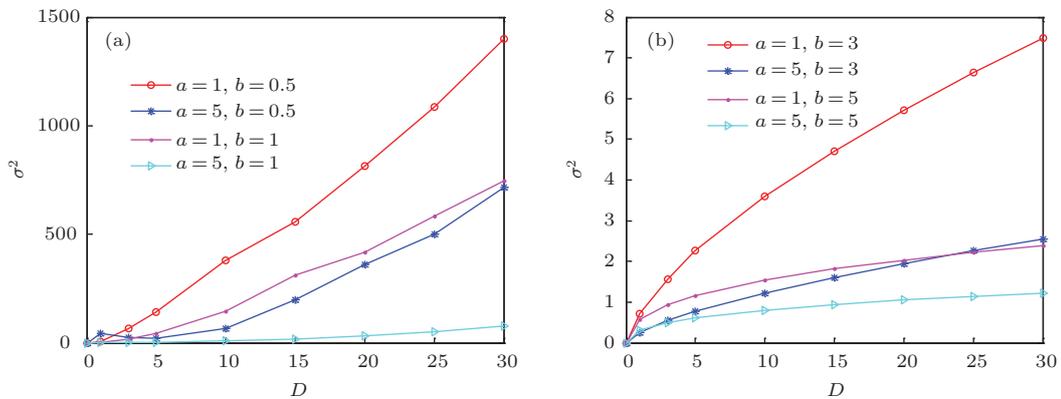


图 11 系统响应的稳态方差 σ^2 随噪声强度 D 的变化 ($A = 1, \omega = 1$) (a) $b < 2$; (b) $b > 2$

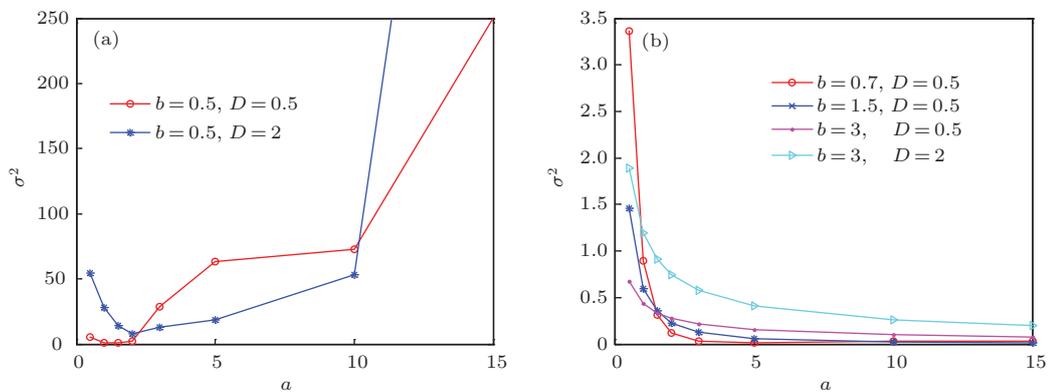


图 12 系统响应稳态方差 σ^2 随势阱参数 a 的变化 ($A = 1, \omega = 1$)

时,随着参数 b 的增大,势阱中心的陡峭程度将会不断降低,同时势阱中心宽度将越来越大,在这个变化过程中会出现一个临界状态使得系统响应跳跃到势阱边沿的概率出现极小值,从而使得系统稳态方差出现一个极小值,但是我们在仿真中发现不同参数条件下这个临界状态所对应的参数 b 值并不同,其内部机理和临界状态的参数求解方法还需要在后续工作中进一步深入研究.

4) 系统响应的稳态方差随周期激励振幅 A 的变化

对于简谐势阱系统 ($b = 2$),由 (19) 式可知,周期激励振幅 A 的变化不影响系统响应的稳态方差 σ^2 的大小(图 14(b) 中 $a = 1, b = 2$ 时的仿真结果),但周期激励振幅 A 却会影响势阱参数 $b \neq 2$ 的幂函数型单势阱系统响应的稳态方差:当 $b < 2$ 时,稳态方差 σ^2 随周期激励振幅 A 的增加而增大,如图 14(a) 所示,此时周期激励振幅 A 的增大,将使得系统响应有很大概率跳跃到势阱边沿,所以系统稳态响应在其平均值附近的波动越剧烈;当 $b > 2$ 时,稳态方差 σ^2 随周期激励振幅 A 的增大而减小,如图 14(b) 所示,此时势阱呈 U 型,势阱中心较平

坦而势阱边沿很陡峭,在周期激励和噪声的共同作用下,系统响应将在平衡点附近做简谐振动而不会跳跃到势阱边沿,周期激励振幅越大,噪声的影响越小,故系统稳态响应在其平均值附近的波动越小.

5) 系统响应的稳态方差随周期激励角频率 ω 的变化

由 (19) 式可知,对于简谐势阱系统 ($b = 2$),周期激励角频率 ω 的变化也不影响系统响应的稳态方差 σ^2 的大小(图 15(a) 中 $a = 1, b = 2$ 和图 15(b) 中 $a = 3, b = 2$ 时的仿真结果),但当 $b < 2$ 时,稳态方差 σ^2 随周期激励角频率 ω 的增大而减小,如图 15(a) 所示,这说明此时周期角频率 ω 越大系统响应在势阱边沿发生跳跃的概率越小,系统稳态响应在其平均值附近的波动越小;当 $b > 2$ 时,稳态方差 σ^2 随周期激励角频率 ω 的增加而增大,如图 15(b) 所示,此时势阱呈 U 型,在周期激励和噪声的共同作用下系统响应将在平衡点附近做简谐振动而不会在势阱边沿发生跳跃,周期角频率 ω 越大,系统响应受噪声的影响越大,系统稳态响应在其平均值附近的波动越剧烈.

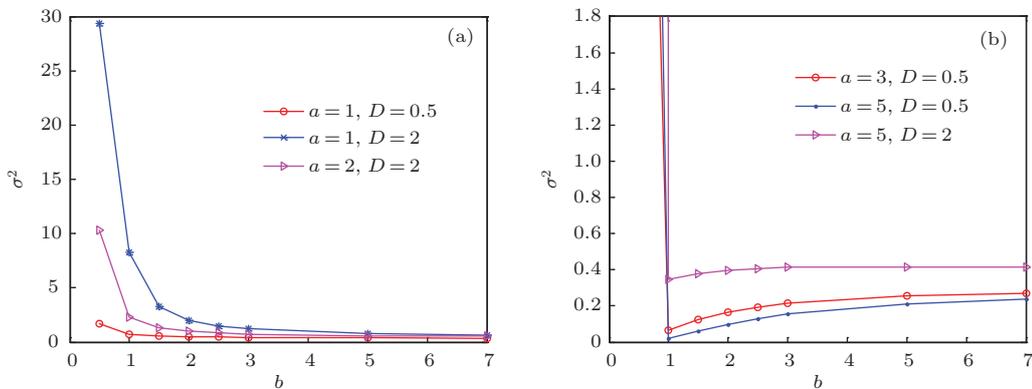


图 13 系统响应稳态方差 σ^2 随势阱参数 b 的变化 ($A = 1, \omega = 1$)

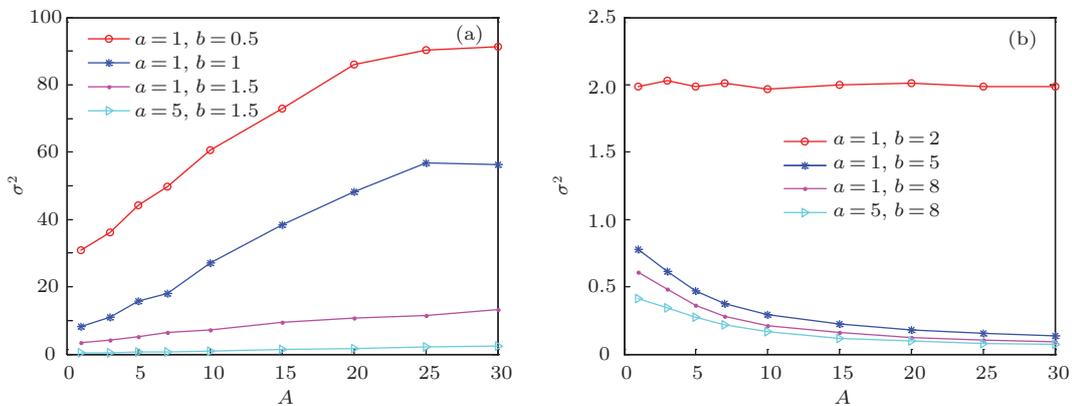


图 14 系统响应稳态方差 σ^2 随周期激励振幅 A 的变化 ($\omega = 1, D = 2$) (a) $b < 2$; (b) $b \geq 2$

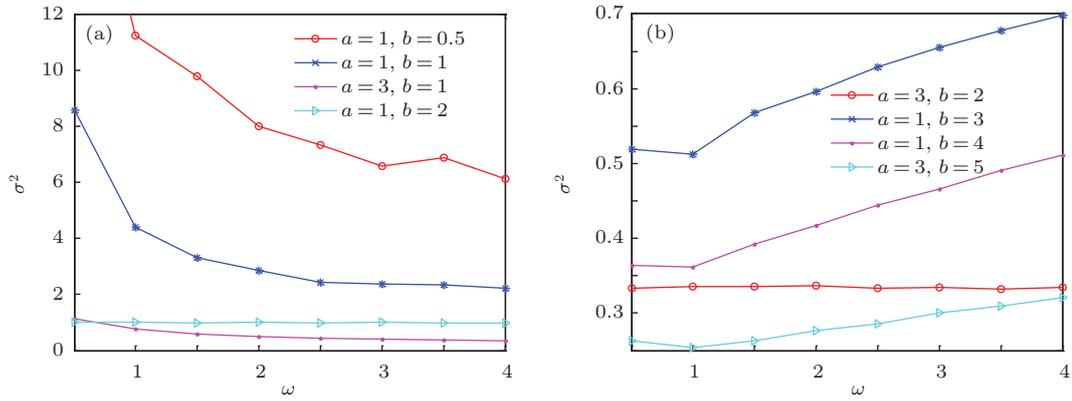


图 15 系统响应稳态方差 σ^2 随周期激励振幅 ω 的变化 ($A = 3, D = 1$) (a) $b \leq 2$; (b) $b \geq 2$

6 结 论

本文利用随机情形下的二阶 Runge-Kutta 算法, 研究了噪声强度 D , 势阱参数 a, b 以及周期激励振幅 A 和角频率 ω 对幂函数型单势阱随机振动系统稳态响应的一阶矩振幅和系统响应的稳态方差的影响. 结果表明: 随噪声强度 D 的变化, 系统稳态响应的一阶矩振幅可以在势阱参数 $b < 2$ 时出现广义随机共振现象, 而对通常的 $b = 2$ 简谐势阱以及势阱参数 $b > 2$ 的情况, 则无该现象发生; 随周期激励振幅 A 和角频率 ω 的变化, 系统响应的稳态方差在势阱参数 $b \neq 2$ 时出现了单调递增或单调递减变化, 而对通常的简谐势阱 ($b = 2$) 情况, 系统响应的稳态方差与周期激励振幅 A 和角频率 ω 无关. 随势阱参数 a, b 的变化, 幂函数型单势阱系统的势阱形状将发生改变, 系统的随机振动情况也会随之不同, 系统稳态响应的一阶矩振幅和系统响应的稳态方差均会随势阱参数 a, b 的变化产生不同的变化趋势, 故可以通过调节势阱参数来控制系统的随机振动. 同时势阱参数 (特别是参数 b) 的不同取值将引起系统稳态响应一阶矩振幅和系统响应的稳态方差随其他系统参数变化的规律发生改变, 但是其内在物理机理尚不明确, 对临界状态以及相应临界参数的精确取值等还需要在后续工作中进一步深入研究. 幂函数型单势阱系统是对简谐势阱系统的一种推广, 本文的研究结果为更复杂的势阱系统随机振动研究提供了基础, 进一步可以研究势阱参数引起幂函数型单势阱系统随机振动特性发生变化的内在物理机理, 在其他形式的噪声激励下幂函数型单势阱系统的随机振动特性以及展开和加强

单势阱系统在弱信号检测中的应用研究.

参考文献

- [1] Zhu W Q 1998 *Random Vibration* (Beijing: Science Press) p1 (in Chinese) [朱位秋 1998 随机振动 (北京: 科学出版社) 第 1 页]
- [2] Einstein A 1905 *Annalen der Physik* **17** 549
- [3] Paez T L, Consulting T P, Colorado D 2012 *Sound Vib.* **46** 52
- [4] Benzi R, Sutera A, Vulpiani A 1981 *J. Phys. A: Math. Gen.* **14** L453
- [5] Chen H, Varshney P K, Kay S M, Michels J H 2007 *IEEE Trans. Sig. Process.* **55** 3172
- [6] Gammaitoni L, Hänggi P, Jung P, Marchesoni F 1998 *Rev. Mod. Phys.* **70** 223
- [7] Gitterman M 2005 *Physica A* **352** 309
- [8] Zhang L, Zhong S C, Peng H, Luo M K 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 130503 (in Chinese) [张路, 钟苏川, 彭浩, 罗懋康 2012 物理学报 **61** 130503]
- [9] Zhao W L, Wang J, Wang L 2013 *Chaos* **23** 033117
- [10] Heinsalu E, Patriarca M, Marchesoni F 2009 *Eur. Phys. J. B* **69** 19
- [11] Li J L, Zeng L Z 2011 *Chin. Phys. B* **20** 010503
- [12] Agudov N V, Krichigin A V, Valenti D, Spagnolo B 2010 *Phys. Rev. E* **81** 051123
- [13] Grigorenko A N, Nikitin S I, Roschepkin G V 1997 *Phys. Rev. E* **56** 4907
- [14] Tian X Y, Leng Y G, Fan S B 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 020505 (in Chinese) [田祥友, 冷永刚, 范胜波 2013 物理学报 **62** 020505]
- [15] Zhang W, Xiang B R 2006 *Talanta* **70** 267
- [16] Gilbarg D, Trudinger N 2001 *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order* (Berlin: Springer) pp149,152
- [17] Lu Z H, Lin J H, Hu G 1993 *Acta Phys. Sin.* **42** 1556 (in Chinese) [卢志恒, 林建恒, 胡岗 1993 物理学报 **42** 1556]
- [18] Honeycutt 1992 *Phys. Rev. A* **45** 62
- [19] Bao J D 2009 *Random Simulation Method of Classical and Quantum Dissipation System* (Beijing: Science Press) p113 (in Chinese) [包景东 2009 经典和量子耗散系统的随机模拟方法 (北京: 科学出版社) 第 113 页]

- [20] Li R H, Liu B 2009 *The Numerical Solution of Differential Equations* (4th ed.) (Beijing: Higher Education Press) pp33–37 (in Chinese) [李荣华, 刘播 2009 微分方程数值解法 (第四版) (北京: 高等教育出版社) 第33—37页]
- [21] Rumelin W 1982 *SIAM J. Numer. Anal.* **19** 604
- [22] Cortes J C, Jodar L, Villafuerte L 2007 *Math. Comput. Model.* **45** 757
- [23] Pettersson R 1992 *Stoch. Anal. Appl.* **10** 603
- [24] Zhang W N, Du Z D, Xu B 2006 *Ordinary Differential Equations* (Beijing: Higher Education Press) pp89–108 (in Chinese) [张伟年, 杜正东, 徐冰 2006 常微分方程] (北京: 高等教育出版社) 第89—108页]
- [25] Mitaim S, Kosko B 1998 *Proc. IEEE* **86** 2152

Generalized stochastic resonance of power function type single-well system*

Ji Yuan-Dong Zhang Lu Luo Mao-Kang[†]

(College of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610065, China)

(Received 13 March 2014; revised manuscript received 29 April 2014)

Abstract

To generalize the harmonic potential of the linear random vibration system, a more general power type potential is presented, and the corresponding power function type nonlinear single-well random vibration system is obtained. The first moment of the system steady-state response and the stationary variance of the system response, which are influenced by noise strength, parameters of the potential and the periodic excitation, are studied by using the second order stochastic Runge-Kutta algorithm. The parameter b , which determines the shape of the potential, goes through $b < 2$, $b > 2$ and $b = 2$ (harmonic potential), and it is shown that varying the noise strength, if $b < 2$, the first moment of the system steady-state response can be non-monotonic (generalized stochastic resonance), if $b = 2$ (harmonic potential) or $b > 2$, this phenomenon does not occur; varying the parameters of the potential, the first moment of the system steady-state response and the stationary variance of the system response can also be non-monotonic.

Keywords: single-well system, random vibrations, stochastic resonance, stochastic Runge-Kutta algorithm

PACS: 43.40.Hb, 05.40.-a, 05.10.-a

DOI: 10.7498/aps.63.164302

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11171238).

† Corresponding author. E-mail: makaluo@scu.edu.cn