

光与物质相互作用系统中的量子 Fisher 信息和自旋压缩*

常锋¹⁾ 王晓茜¹⁾ 盖永杰²⁾ 严冬²⁾ 宋立军^{2)†}

1)(长春理工大学理学院, 长春 130022)

2)(长春大学理学院, 长春 130022)

(2014年4月8日收到; 2014年5月2日收到修改稿)

Fisher 信息是估计理论中的重要概念, 最近发现与量子信息中的纠缠判据具有密切联系. 非旋波近似条件下, Dicke 模型经典相空间表现为混沌动力学特征. 本文详细考察了 Dicke 模型描述的光与物质相互作用系统中量子 Fisher 信息和自旋压缩动力学特性. 结果表明: 在短时瞬态情况下, 无论初态处于规则区域还是混沌区域系统均表现为纠缠性质; 但在长时稳态情况下, 初态处于规则区域时系统纠缠消失, 而初态处于混沌区域时系统则一直存在纠缠. 通过与系统自旋压缩动力学性质相比较, 发现量子 Fisher 信息可以更有效地刻画量子混沌. 进一步考察初态处于规则和混沌区域时系统密度矩阵和纯度的动力学演化特性, 发现混沌导致系统退相干现象发生, 说明量子 Fisher 信息对混沌更敏感.

关键词: 量子 Fisher 信息, 自旋压缩, 量子混沌, 退相干

PACS: 03.65.Ud, 03.67.Hk, 05.45.Mt, 42.50.Dv

DOI: 10.7498/aps.63.170302

1 引言

自然界中的非线性现象普遍存在, 并在许多科学领域都扮演了重要的角色. 经典物理学中, 混沌主要表现为系统对初始条件的敏感性, 并由李雅普诺夫指数来刻画. 而量子力学中, 由于玻尔的对应原理, 经典力学中的混沌特征必然要在其量子性质上有所表现. 上个世纪中期以来, 人们在许多非线性系统中发现了量子混沌并逐渐认识到其重要性. 由于不确定关系和时间演化的幺正性, 量子系统中并不能像经典力学那样对系统运动做确定性的相空间描述, 很难寻找一个相应的物理量来研究系统的稳定性(或敏感性)问题. 所以, 有关经典混沌的量子刻画和量子经典对应关系这个充满挑战性的课题一直没有得到很好解决.

为了刻画量子混沌, 人们提出许多研究方法,

例如系统哈密顿量的光谱性质^[1]、相空间疤痕^[2]和扰动的敏感性^[3]等. 近年来, 由于量子信息科学的飞速发展, 人们开始尝试利用一些量子信息概念来理解量子系统中的非线性现象并取得了丰富的研究成果, 如量子相变^[4]、保真度^[5,6]、量子纠缠^[7-13]和自旋压缩^[14-16]等. 这些成果揭示了纯量子条件下, 系统动力学过程中混沌行为存在的本质. 最近, Pezzé 和 Smerzi 发现量子 Fisher 信息是一种比自旋压缩系数更强的纠缠判据^[17], 从而使 Fisher 信息作为量子信息概念被应用到相关研究领域. 例如, 文献^[18]和^[19]分别给出了单轴扭曲模型中自旋压缩与量子 Fisher 信息的具体关系, 以及量子受击陀螺模型中量子 Fisher 信息与量子混沌的关系. Fisher 信息作为确定某个参数概率分布的最优估计精度, 可以用来刻画系统量子态的旋转敏感性, 而自旋压缩系数同样可以量化一个态的旋

* 国家自然科学基金(批准号: 11347013, 11305020)、吉林省科技发展计划项目(批准号: 20130521016JH, 20140101187JC)和吉林省教育厅科技发展计划项目(批准号: 2012245, 2013262)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: ccdxslj@126.com

转敏感性. 本文正是基于量子 Fisher 信息与自旋压缩的这一重要性质, 研究二者在量子混沌有效刻画问题中的应用. 这里主要考虑 Dicke 模型描述的 N 个二能级原子和一个单模辐射场的相互作用系统, 该系统在非旋波近似条件下表现为混沌动力学特征. 文献 [8] 和 [15] 分别利用线性熵与自旋压缩系数研究了该模型的量子混沌问题, 给出的都是系统处于短时瞬态情形的动力学演化特性, 而对于长时稳态却不能进行有效区分. 通过与自旋压缩动力学比较, 发现量子 Fisher 信息不仅可以给出系统短时瞬态的动力学演化特性, 而且在长时稳态情况下可以更加有效地刻画量子混沌. 为揭示量子态的旋转敏感性, 进一步考察系统密度矩阵和纯度演化特性后发现, 混沌导致了系统退相干现象的发生, 说明初态处于混沌区域时系统具有更强的旋转敏感性. 通过本文的研究工作, 揭示了利用量子 Fisher 信息可以更好地区分经典相空间的规则和混沌结构, 从而为量子混沌研究提供了一种新的、有意义的标识手段.

2 Dicke 模型

Dicke 模型是描述原子与光场相互作用的典型理论模型 [20], 在原子核物理、量子混沌以及量子耗散等 [21,22] 许多物理领域具有重要应用. 本文主要考虑描述 N 个二能级原子 (量子比特) 和一个单模辐射场相互作用的 Dicke 模型. 忽略原子之间的相互作用, 将原子系统作为一个大的自旋系统 ($N = 2j$) 来处理. 这时 Dicke 模型的哈密顿量可以写成下列形式 [8] ($\hbar = 1$):

$$H = \omega J_z + \omega_0 a^\dagger a + \frac{R}{\sqrt{2j}} (J_+ a + J_- a^\dagger) + \frac{R'}{\sqrt{2j}} (J_+ a^\dagger + J_- a), \quad (1)$$

其中, ω 和 ω_0 分别是 N 个二能级原子的跃迁频率和单模光场的频率; R 和 R' 是原子与场相互作用过程中与偶极近似有关的耦合系数, 一般可以通过设置 $R' = 0$ 来获得旋波近似; a, a^\dagger 是光场的产生和湮没算符; J_z, J_\pm 是与原子可观测量有关的赝自旋算符.

Dicke 模型量子与经典动力学之间的关系可以通过选择相干态作为初态来实现, 即最小不确定波包集中在与图 1 对应的经典相空间. 初始量子态

选择如下:

$$|\psi(0)\rangle = |\mu\rangle \otimes |\nu\rangle = |\mu\nu\rangle, \quad (2)$$

这里 $|\mu\rangle$ 和 $|\nu\rangle$ 是原子和场相干态, 分别由下式给出:

$$|\mu\rangle = (1 + \mu\mu^*)^{-j} e^{\mu J_+} |j, -j\rangle, \quad (3)$$

$$|\nu\rangle = e^{-\nu\nu^*/2} e^{\nu a_+} |0\rangle, \quad (4)$$

其中,

$$\mu = \frac{p_1 + iq_1}{\sqrt{4j - (p_1^2 + q_1^2)}}, \quad (5)$$

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_2^2 + q_2^2). \quad (6)$$

这里 $|0\rangle$ 是玻色场的基态, 1 和 2 分别作为原子子系统和辐射场子系统的标记, 则 q_1, p_1, q_2, p_2 描述的是系统整体相空间.

利用 Holstein-Primakoff 变换, 采用半经典近似的方法将 Dicke 模型量子哈密顿量转换为相应的经典哈密顿量 [23],

$$H(q_1, p_1, q_2, p_2) = \frac{\omega}{2}(p_1^2 + q_1^2 - 2j) + \frac{\omega_0}{2}(p_2^2 + q_2^2) + \frac{\sqrt{4j - (p_1^2 + q_1^2)}}{4j}(R_+ p_1 p_2 + R_- q_1 q_2), \quad (7)$$

其中, $R_\pm = R \pm R'$.

由上述经典动力学方程可得到经典相空间的庞加莱截面图, 如图 1 所示. 图中显示上下两部分各有一个规则区域, 这些区域具有周期性轨道的稳定运动, 区域的中心一般为不动点; 规则区域外为混沌区域, 运动是不稳定的.

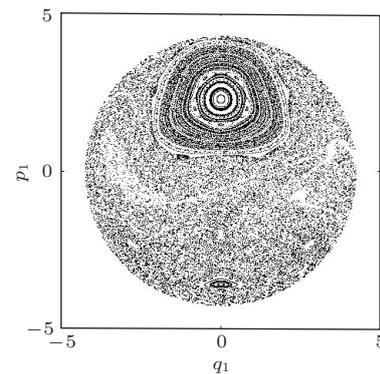


图 1 经典相空间的庞加莱截面图 (参数分别为 $\omega = \omega_0 = 1, E = 8.5, j = \frac{9}{2}, q_2 = 0, p_2 > 0, R = 0.5, R' = 0.2$)

3 量子 Fisher 信息和自旋压缩理论

考虑一个量子态 $\rho(\theta)$, 其中 θ 为参数, 如果通过一个测量来估计参数 θ , 则参数 θ 的偏差 $\Delta\theta$ 由一

个基本下界来限制, 即 $\Delta\theta$ 可用量子 Cramér-Rao 不等式表示为^[24,25]

$$\Delta\theta \geq \Delta\theta_{\text{QCR}} \equiv \frac{1}{\sqrt{F_Q(\theta)}}. \quad (8)$$

如果 (8) 式中的 $F_Q(\theta)$ 比较大, 则估计偏差就比较小. $F_Q(\theta)$ 即为量子 Fisher 信息, 定义如下:

$$F_Q(\theta) = \text{tr}[\rho(\theta)L_\theta^2], \quad (9)$$

这里 $L(\theta)$ 为对称对数求导算符, 可用下式表示:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\rho(\theta) = \frac{1}{2}[L_\theta\rho(\theta) + \rho(\theta)L_\theta], \quad (10)$$

利用 (10) 式将 (9) 式改写成如下形式:

$$F_Q(\theta) = \sum_i \frac{\left(\frac{\partial}{\partial\theta}p_i\right)^2}{p_i} + 2 \sum_{i \neq j} \frac{(p_i - p_j)^2}{p_i + p_j} \left| \left\langle \phi_j \left| \frac{\partial}{\partial\theta} \phi_i \right\rangle \right|^2, \quad (11)$$

其中, $|\phi_i\rangle$ 和 p_i 是 ρ 的本征矢和本征值.

如果在 N 个自旋 1/2 粒子构成的系统中, 绕任意方向 \mathbf{n} 转动一个角度 θ , 这个过程可以表示为 $\rho(\theta) = \exp(-i\theta J_n)\rho_{\text{in}}\exp(i\theta J_n)$, 其中 $J_n = \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}$. 此时, 量子 Fisher 信息表示为 $F_Q[\rho_{\text{in}}, J_n]$. 当取 $\rho(\theta)$ 和 ρ_{in} 为相同值时, 量子 Fisher 信息可写为

$$F_Q[\rho_{\text{in}}, J_n] = \sum_{i,j} \frac{(p_i - p_j)^2}{p_i + p_j} |\langle \psi_j | J_n | \psi_i \rangle|^2. \quad (12)$$

对于一个纯态 $\rho_{\text{in}} = |\psi\rangle\langle\psi|$, 量子 Fisher 信息简化为

$$F_Q[\rho_{\text{in}}, J_n] = 4(\Delta J_n)^2. \quad (13)$$

其中, $(\Delta J_n)^2 = \langle J_n^2 \rangle - \langle J_n \rangle^2$. 在文献[17]中给出一个利用量子 Fisher 信息判断系统纠缠的充分条件, 即

$$\chi^2 \equiv \frac{N}{F_Q[\rho_{\text{in}}, J_n]} < 1. \quad (14)$$

如果考虑 Wineland 等给出的自旋压缩系数定义^[26]

$$\xi^2 = \frac{N(\Delta J_{n\perp})^2}{|\langle \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \rangle|^2}, \quad (15)$$

则当量子态满足 $\xi^2 < 1$ 时系统是纠缠和压缩的. 由不确定关系式

$$(\Delta J_{n_1})^2(\Delta J_{n_2})^2 \geq \frac{1}{4}\langle J_{n_3} \rangle^2, \quad (16)$$

很容易得到下面的关系式

$$\chi^2 = \frac{N}{4(\Delta J_{n_1})^2} \leq \frac{N(\Delta J_{n_2})^2}{\langle J_{n_3} \rangle^2} = \xi^2. \quad (17)$$

因此, 可得到一个比自旋压缩系数更强的新的纠缠判据 $\chi^2 < 1$.

4 量子 Fisher 信息和自旋压缩动力学演化特性

下面, 首先利用量子 Fisher 信息研究系统的动力学演化特性. 为方便与自旋压缩系数 ξ^2 描述的系统动力学演化特性相比较, 这里主要数值计算 χ^2 随时间的变化规律. 在系统经典相空间的庞加莱截面图 1 中取自旋相干态 ($q_1 = 0, p_1 = 2.2$) 和 ($q_1 = 0, p_1 = 0$) 为初态, 分别对应规则区域与混沌区域中心两种典型情形. 图 2 给出了两个不同初态 χ^2 随时间的演化曲线.

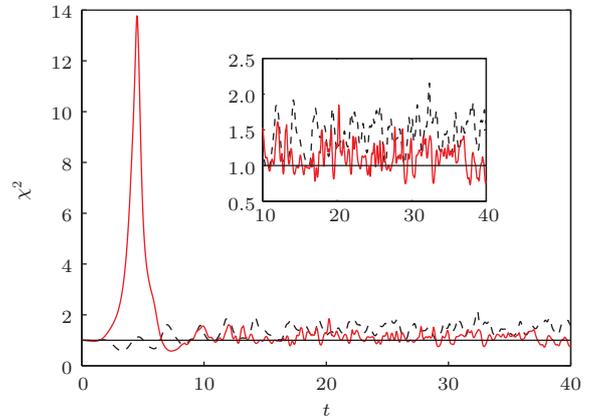


图 2 (网刊彩色) 量子 Fisher 信息 χ^2 动力学演化曲线 (虚线代表系统初态处于规则区域中心, 对应图 1 中 $q_1 = 0, p_1 = 2.2$; 实线代表初态处于混沌区域中心, 对应图 1 中 $q_1 = 0, p_1 = 0$)

为方便考察系统的动力学演化特性, 根据纠缠判据 (14) 式定义一个纠缠存在时间 t_{χ^2} , 即系统在演化过程中 $\chi^2 < 1$ 的时间总和. 由图 2 可知, 在短时瞬态情况下 ($t < 10$), 无论初态处于规则区域还是混沌区域, χ^2 均存在小于 1 的情形, 说明系统在演化过程中都有纠缠发生, 而且可以清楚地发现, 当初态处于规则区域中心时, 纠缠存在时间 t_{χ^2} 比初态处于混沌区域中心时要大; 但在长时稳态时 ($t > 10$), 如果初态处于混沌区域中心, χ^2 一直是小于 1 的, 纠缠存在时间 t_{χ^2} 较大, 而当初态选择处于规则区域中心时, χ^2 则总是大于 1 的, 说明系统没有纠缠发生. 取长时间演化 $t = 300$, 数值计算结果验证了上述结论. 以上分析说明, 在光与物质相互作用系统中, 系统演化初期混沌是抑制纠缠发生的, 而当系统处于长时稳定状态后, 混沌则促进纠

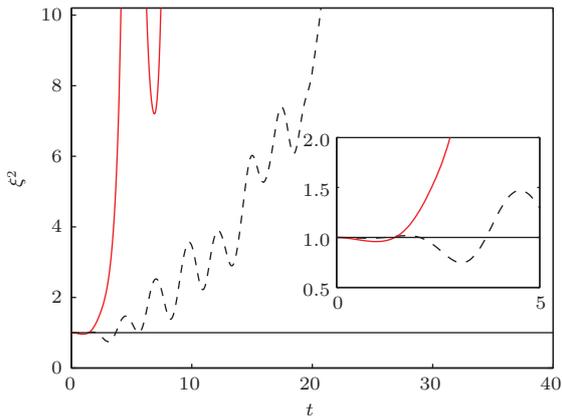


图3 自旋压缩系数 ξ^2 动力学演化曲线 (虚线代表系统初态处于规则区域中心, 对应图1中 $q_1 = 0, p_1 = 2.2$; 实线代表初态处于混沌区域中心, 对应图1中 $q_1 = 0, p_1 = 0$)

缠的发生. 图3给出了不同初态的自旋压缩系数 ξ^2 随时间的演化曲线. 对比图2与图3可以发现, 自旋压缩系数 ξ^2 只能给出系统短时瞬态 ($t < 5$) 的动力学演化特性. 当初态位于规则区域中心时比初态位于混沌区域中心时自旋压缩发生的时间较长, 即

对应的纠缠发生较大, 这与量子Fisher信息 χ^2 在系统演化初期给出的结论是一致的, 但 ξ^2 却不能给出系统处于长时稳定状态的动力学演化特性, 显然量子Fisher信息 χ^2 比自旋压缩系数 ξ^2 更适合刻画光与物质相互作用系统中的量子混沌现象, 从而验证了(17)式结论的正确性.

5 密度矩阵和纯度动力学演化特性

为进一步说明量子Fisher信息与混沌之间的关系以及Fisher信息对量子态的旋转敏感性, 下面考察自旋态的动力学演化性质. 选择基矢 $|j, m\rangle$, 则自旋系统的约化密度矩阵可以表示为如下形式:

$$|\rho(t)\rangle = \sum_{mn}^N \rho_{mn}(t) |j, m\rangle \langle j, n|. \quad (18)$$

图4和图5分别给出短时瞬态情形下, 初态处于规则区域和混沌区域中心时取 $t = 1, 4.5, 7.5, 10$ 四个代表性演化时间的 $|\rho_{mn}(t)|$ 动力学演化曲线.

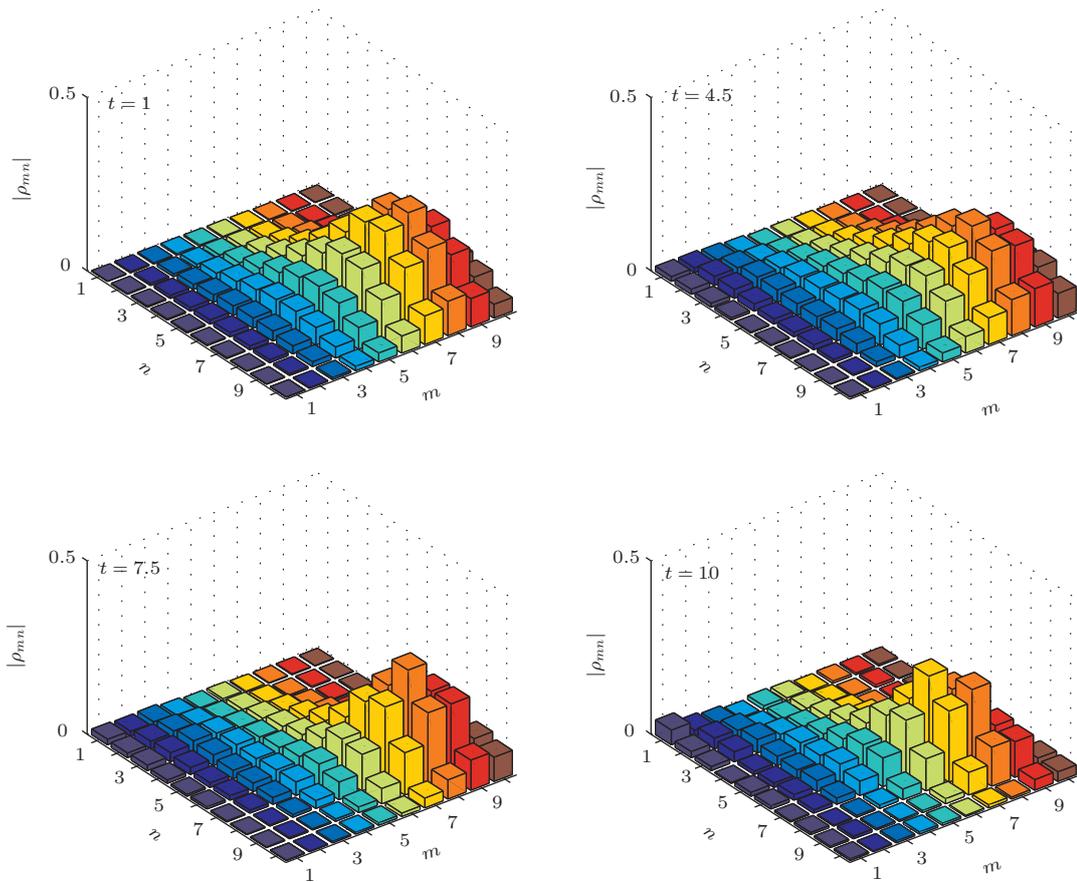


图4 (网刊彩色) 自旋系统密度矩阵 $|\rho_{mn}(t)|$ 动力学演化曲线 (对应图1中初态处于规则区域中心 $q_1 = 0, p_1 = 2.2$)

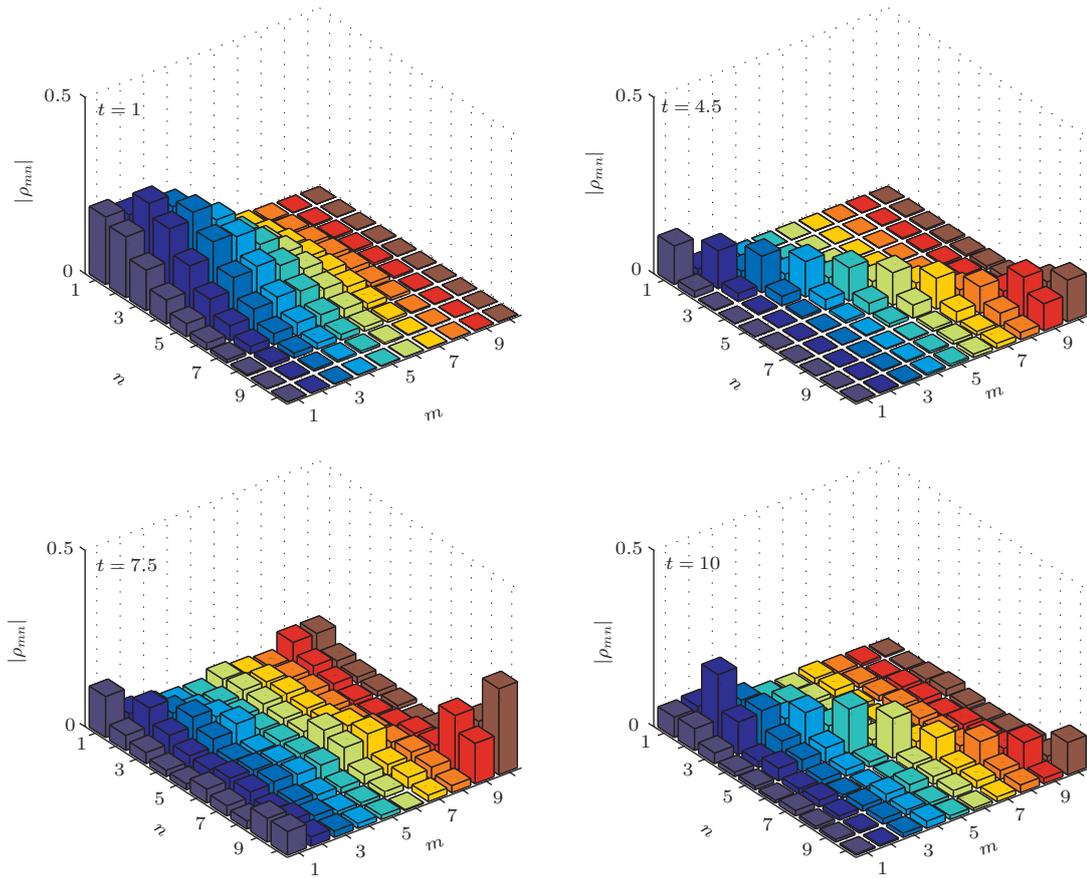


图5 (网刊彩色) 自旋系统密度矩阵 $|\rho_{mn}(t)|$ 动力学演化曲线 (对应图1中初态处于混沌区域中心 $q_1 = 0, p_1 = 0$)

由图4可以看出, 初态处于规则区域中心时, 约化密度矩阵的矩阵元随时间演化一直局限在有限局域内, 系统的相干性保持较好, 说明一直有纠缠发生; 而由图5可以看出, 当初态处于混沌区域中心时, 演化过程中态的相干性明显被破坏. 特别是在 $t = 4.5$ 和 $t = 10$ 时, 约化密度矩阵演化为对角矩阵, 发生退相干现象, 系统纠缠性质消失. 说明此时对量子态进行一个转动, 旋转角非常敏感, χ^2 值相应变的较大, 这与图2中 $t = 4.5$ 和 $t = 10$ 时演化曲线是完全符合的. 而在 $t = 1$ 和 $t = 7.5$ 时, χ^2 值是小于1的, 量子态表现为相干性, 图5中约化密度矩阵的对角矩阵元消失, 系统是纠缠的, 这也与图2中相应时刻的演化曲线相符合. 数值计算系统长时稳态情形的约化密度矩阵 $|\rho_{mn}(t)|$ 动力学演化曲线, 得到一致的结果. 图6给出了纯度 $P = \text{tr}(\rho^2)$ 的动力学演化曲线, 结果表明, 初态处于规则区域中心时, 纯度演化曲线周期性地衰减到一个极小值; 而初态处于混沌区域中心时, 纯度演化曲线则快速衰减为一极小值后经小幅震荡达到稳定值. 显然, 任意时刻初态处于规则区域中心时的纯度都比初态处于混沌区域中心时要小, 这也很好

地验证了上述结论.

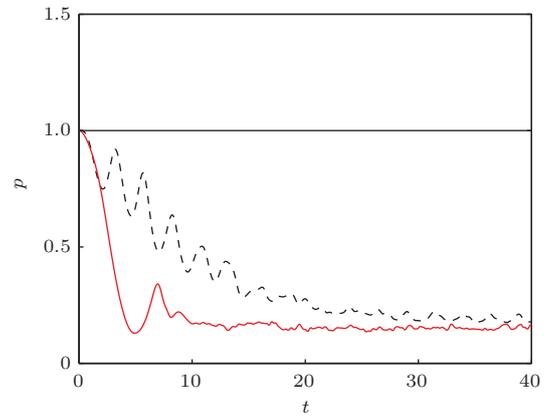


图6 纯度 P 动力学演化曲线 (虚线代表系统初态处于规则区域中心, 对应图1中 $q_1 = 0, p_1 = 2.2$; 实线代表初态处于混沌区域中心, 对应图1中 $q_1 = 0, p_1 = 0$)

6 结 论

本文研究了 Dicke 模型描述的 N 个二能级原子与单模光场相互作用系统中量子 Fisher 信息的动力学特性, 结果发现量子 Fisher 信息比自旋压缩系数更有利于刻画量子混沌. 在短时瞬态情况, 无

论初态选择在规则区域还是混沌区域, 系统量子态都是纠缠的; 但在长时稳态情况, 当初态处于混沌区域时促进纠缠发生, 而初态处于规则区域时纠缠消失. 进一步研究自旋系统密度矩阵的动力学演化特性, 发现当系统由规则过渡为混沌时, 密度矩阵的矩阵元由非对角变为对角, 出现退相干现象. 上述结果进一步阐述了我们前期工作^[27]的物理本质, 说明混沌动力学对量子态 $SU(2)$ 旋转的敏感性, 量子 Fisher 信息描述的是量子态演化过程中本征矢性质, 因而更有利于标识混沌. 最近, 有关量子受击陀螺模型中利用相空间线性熵的动力学性质刻画量子混沌的实验已被报道^[28], 希望本文工作对利用量子 Fisher 信息的动力学特性实现系统混沌控制的实验研究有所裨益.

感谢浙江大学物理系王晓光教授的讨论.

参考文献

- [1] Haake F 1991 *Quantum Signature of Chaos* (Berlin: Springer-Verlag press)
- [2] Heller E J 1984 *Phys. Rev. Lett.* **53** 1515
- [3] Schack R, D'Ariano G M, Caves C M 1994 *Phys. Rev. E* **50** 972
- [4] Emary C, Brandes T 2003 *Phys. Rev. E* **67** 066203
- [5] Peres A 1984 *Phys. Rev. A* **30** 1610
- [6] Emerson J, Weinstein Y S, Lloyd S, Cory D G 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 284102
- [7] Weinstein Y S, Hellberg C S 2005 *Phys. Rev. E* **71** 016209
Weinstein Y S, Hellberg C S 2005 *Phys. Rev. E* **71** 035203
Weinstein Y S, Viola L 2006 *Europhys. Lett.* **76** 746
- [8] Furuya K, Nemes M C, Pellegrino G Q 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 5524
- [9] Miller P A, Sarkar S 1999 *Phys. Rev. E* **60** 1542
- [10] Fujisaki H, Miyadera T, Tanaka A 2003 *Phys. Rev. E* **67** 066201
- [11] Bettelli S, Shepelyansky D L 2003 *Phys. Rev. E* **67** 054303
- [12] Wang X G, Ghose S, Sanders B C, Hu B 2004 *Phys. Rev. E* **70** 016217
- [13] Novaes M, de Aguiar M A M 2004 *Phys. Rev.* **70** 045201
Novaes M 2005 *Ann. Phys.* **318** 308
- [14] Song L J, Wang X G, Yan D, Zong Z G 2006 *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **39** 559
- [15] Song L J, Yan D, Ma J, Wang X G 2009 *Phys. Rev. E* **79** 046220
- [16] Wang X Q, Ma J, Song L J, Zhang X H, Wang X G 2010 *Phys. Rev. E* **82** 056205
- [17] Pezzé L, Smerzi A 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 100401
- [18] Zhong W, Liu J, Ma J, Wang X G 2014 *Chin. Phys. B* **23** 060302
- [19] Wang X Q, Ma J, Zhang X H, Wang X G 2009 *Chin. Phys. B* **20** 050510
- [20] Dicke R H 1954 *Phys. Rev.* **93** 99
- [21] Hou X W, Chen J H, Hu B 2005 *Phys. Rev. A* **71** 034302
- [22] Fang Y C, Yang Z A, Yang L Y 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 0661 (in Chinese) [房永翠, 杨志安, 杨丽云 2008 物理学报 **57** 0661]
- [23] Zhang W M, Feng D H, Gilmore R 1990 *Rev. Mod. Phys.* **62** 867
- [24] Helstrom C W 1976 *Quantum Detection and Estimation Theory* (New York: Academic Press)
- [25] Holevo A S 1982 *Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory* (Amsterdam: North-Holland Press)
- [26] Wineland D J, Bollinger J J, Itano W M, Heinzen D J 1994 *Phys. Rev. A* **50** 67
- [27] Song L J, Ma J, Yan D, Wang X G 2012 *Eur. Phys. J. D* **66** 201
- [28] Chaudhury S, Smith A, Anderson B E, Ghose S, Jessen P S 2009 *Nature* **461** 768

Quantum Fisher information and spin squeezing in the interaction system of light and matter^{*}

Chang Feng¹⁾ Wang Xiao-Qian¹⁾ Gai Yong-Jie²⁾ Yan Dong²⁾ Song Li-Jun²⁾†

1) (Department of Physics, Changchun University of Science and Technology, Changchun 130022, China)

2) (Department of Physics, Changchun University, Changchun 130022, China)

(Received 8 April 2014; revised manuscript received 2 May 2014)

Abstract

Fisher information is an important concept in estimation theory, which has recently been found closely related with the criteria of the entanglement in quantum information. Under the condition of non-rotating wave approximation, the classical phase space of the Dicke model displays chaotic dynamic properties. This paper studies the quantum Fisher information and the dynamic properties of spin squeezing in the interaction system of light and matter described in the Dicke model. Results reveal that, in the short-time instant state, wherever the initial state is, in a regular region or a chaotic region, the system displays entanglement; but in the long-time stable state, when the initial state is in the regular region, the system entanglement disappears, however, when the initial state is in the chaotic region, the system is always entangled. Compared with the spin-squeezing dynamic properties of the system, Fisher information is found to be able to effectively characterize quantum chaos. On further examination on the dynamic evolution properties of the density matrix and purity of the system when in the regular and chaotic regions, we find that chaos gives rise to decoherence of the system, showing that quantum information become more sensitive to chaos.

Keywords: quantum Fisher information, spin squeezing, quantum chaos, decoherence

PACS: 03.65.Ud, 03.67.Hk, 05.45.Mt, 42.50.Dv

DOI: 10.7498/aps.63.170302

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11347013, 11305020), and the Science Foundation of Jilin Province, China (Grant Nos. 20130521016JH, 20140101187JC), the Scientific Foundation of the Education Department of Jilin Province, China (Grant Nos. 2012245, 2013262).

† Corresponding author. E-mail: ccdxxslj@126.com