物理学报 Acta Phys. Sin. Vol. 63, No. 18 (2014) 180205

Kaup-Kupershmidt方程的非局域对称及新的精确解*

王振立 刘希强†

(聊城大学数学科学学院, 聊城 252059)

(2014 年 4 月 28 日收到; 2014 年 6 月 16 日收到修改稿)

利用机械化算法得到了 Kaup-Kupershmidt 方程的非局域对称、约化, 通过解约化方程得到了该方程的一些新的精确解.

关键词: 非局域对称, Kaup-Kupershmidt 方程, 对称约化, 精确解

PACS: 02.30.Jr, 11.10.Lm, 02.20.–a, 04.20.Jb **DOI:** 10.7498/aps.63.180205

1 引 言

非线性偏微分方程 (NPDES) 被广泛用于描述物理学领域中的复杂物理现象, 如流体力学、固体物理、等离子体物理、等离子体波、化学物理、凝聚态物理等. 在过去的几十年里, 已经形成了很多研究非线性微分方程精确解的有效方法, 如经典和非经典李群方法[1,2]、反散射变换方法[3]、Bäcklund 变换[4]、Hirota's 方法[5]、齐次平衡方法[6−8]、Clarkson-Kruskal 直接方法[9,10]、有理函数展开方法[11−13] 和非局域对称方法[14−16] 等.

以上方法中经典和非经典李群方法是非常重要的方法之一. 李群方法给出了构造微分方程变换的方法. 后来人们又把李对称做了一系列推广, 当无穷小系数包含了因变量的一阶导数项时, 这样的对称叫作切对称; 当出现高阶导数项时, 被叫作高阶对称, 以上两种对称统称为局域 (local) 对称. 当无穷小变量包含了非局域变量时, 此种对称称为非局域 (nonlocal) 对称. 非局域对称可以看作是局域对称的推广. 非局域对称是由 Vinogradov 和 Krasil'shchik 提出的[17], 后来许多学者在此基础上提出了很多寻找非局域对称的方法. 如 Bluman[18,19] 利用守恒律构造势系统, 通过寻找势系统的李群理论给出了一个构造微分方程点变换的方法; Galas[20] 利用伪势也寻找到了非局域对称, 并利用非局域对称得到了一些新的精确解等; Lou 和 Hu[21] 利用 Darboux 变换构造了多个可积模型的非局域对称. 本文利用机械化算法构造并研究 Kaup-Kupershmidt (KK) 方程的非局域对称, 通过引入新的辅助变量, 把非局域化成普通的李对称, 并得到了新复合精确解.

以下考虑 KK 方程[22]

$$u_t = u_{xxxxx} + \frac{25}{2}u_x u_{xx} + 5uu_{xxx} + 5u^2 u_x. \quad (1)$$

该方程是描述非线性和色散长重力波在浅海水平方向均匀的深度的模型. 其相应的 Lax 对为

$$\psi_{xx} = -\frac{u\psi}{4}, \quad (2)$$

$$\psi_t = \left(\frac{1}{2}u_{xx} + u^2\right)\psi_x - \left(\frac{1}{4}u_{xxx} + uu_x\right)\psi. \quad (3)$$

本文分以下几个部分: 在第二部分给出非局域对称的机械化算法; 在第三部分求出 KK 方程的非局域对称, 并通过约化方程得到该方程的精确解; 在第四部分给出一个简单的结论.

* 国家自然科学基金委员会 -中国工程物理研究院联合基金 (批准号: 11076015) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: liuxiq@sina.com

2 非局域对称的机械化算法

考虑含有p个独立变量, q因变量的n阶微分方程组成的系统$\Im$,

$$\Delta_v(x,u^{(n)})=0, v=1,2,\cdots,l, \tag{4}$$

其中$x=(x^1,x^2,\cdots,x^p)$, $u=(u^1,u^2,\cdots,u^q)$, 函数

$$\Delta_v(x,u^{(n)})=(\Delta_1(x,u^{(n)}),\cdots,\Delta_l(x,u^{(n)}))$$

是光滑的函数, u关于x的导数为n阶, 且$X=R^p$表示独立变量.

令

$$V=\xi^p(x,u)\frac{\partial}{\partial x^p}+\eta^q(x,u)\frac{\partial}{\partial u^q}, \tag{5}$$

为李变换$\tilde{x}=F(x,u,\varepsilon)$, $\tilde{u}=G(x,u,\varepsilon)$下的无穷小生成元.

下面介绍如何构造非局域对称, 为简单起见, 选取两个自变量$p=1$, $q=1$, 即$(x^1,x^2)=(t,x)$.

第一步: 选取适当的辅助系统, 如Lax对, Bäcklund, 势系统, 伪势等, 假设该辅助系统有下面形式

$$\begin{aligned}&F_\alpha(x,t,u_x,u_t,\cdots,\psi_x,\psi_t,\psi_{xx},\psi_{xt},\\&\psi_{tt},\cdots\psi_{\lambda x},\psi_{\mu t})=0,\alpha\in\mathbb{Z}^+,\end{aligned} \tag{6}$$

其中$\psi=(\psi^1,\psi^2,\cdots,\psi^\beta)$表示$\beta$个辅助变量, $\psi_{\lambda x}$为对x求λ次导数, $\psi_{\mu t}$为对t求μ次导数. 令$U\simeq\Re$,表示用单个变量u的同构空间. $U\simeq\Re$表示与$\Re^2$同构, 坐标系为(u_x,u_t). 同理, $U_2\simeq\Re^3$表示与u的二阶导数项同构的空间. $U_k\simeq\Re^{k+1}$是与u的k阶导数项同构的空间. 因此有$U^{(k)}=U\times U_1\times\cdots\times U_k$,坐标为

$$U^{(k)}=(u;u_x,u_t;u_{xx},u_{xt},u_{tt};\cdots).$$

第二步: 把空间从$X\times U$延拓到空间$X\times U^{(n)}$上, 其坐标为$(x,t,u,u_x,u_t,\cdots)$, 用$\tilde{\boldsymbol{V}}^{(n)}$表示空间$V$的$n$阶延拓, 其对应的向量场形式为

$$\tilde{\boldsymbol{V}}^{(n)}=\sum_{i=1}^{2}\xi^i\frac{\partial}{\partial x^i}+\sum_L\eta^L\frac{\partial}{\partial u_L}. \tag{7}$$

在这里, 我们给出无穷小系数不同的的定义, 即ξ^i,η^L定义为变量$(x,t,u,\cdots,\psi,\psi_x,\psi_t,\cdots,\psi_{\lambda x},\psi_{\mu t})$的函数. $\eta^0=\eta$与η^L具有下形式

$$\eta^L=D_Lu-\sum_{i=1}^{2}u_LD_L\xi^i. \tag{8}$$

注1 在延拓向量场表示可以看出, 这种变换既不是普通的李对称, 也不是Lie-Bäcklund对称, 因为辅助变量不仅依赖于原函数及其导数项, 还依赖于辅助方程的变量及其导数项, 这样的假设可以帮助我们寻找非局域对称.

第三步: 为了求得非局域对称, 我们需要求解下面方程

$$\tilde{V}^{(n)}\Delta_v(x,u^{(n)})\Big|_{\substack{\Delta_v(x,u^{(n)})=0\\ Eqs.(2.3)}}=0. \tag{9}$$

利用上面方程, 可以得到一些关于变量ξ^i,η^L的方程, 利用软件Maple求解即可.

3 KK方程的非局域对称及精确解

下面我们利用上述方法求解KK方程的非局域对称. 方程(1)的Lax对为

$$\psi_{xx}=-\frac{u\psi}{4}, \tag{10}$$

$$\begin{aligned}\psi_t=&\left(\frac{1}{2}u_{xx}+u^2\right)\psi_x\\&-\left(\frac{1}{4}u_{xxx}+uu_x\right)\psi.\end{aligned} \tag{11}$$

由可积条件(10), (11)满足$\psi_{xxt}=\psi_{txx}$即KK方程(1). KK方程的对称σ^u可以表示为下面线性方程的解

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\sigma^u-\frac{\partial^5}{\partial x^5}\sigma^u-\frac{25}{2}\frac{\partial}{\partial x}u\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sigma^u\\&-\frac{25}{2}\frac{\partial}{\partial x}\sigma^u\frac{\partial^2}{\partial x^2}u-5u\frac{\partial^3}{\partial x^3}\sigma^u\\&-5u^2\frac{\partial}{\partial x}\sigma^u-10u\sigma^u\frac{\partial}{\partial x}u=0,\end{aligned} \tag{12}$$

由李对称理论得, 在变换

$$u\rightarrow u+\varepsilon\sigma^u \tag{13}$$

下方程(1)的解是不变的, ε为参数.

对称的形式等价于方程

$$\sigma^u=Xu_x+Tu_t-U. \tag{14}$$

假设变量X,T,U是x,t,u,ψ,ψ_x的任意函数, 把方程(14)代入到方程(12), 并且利用KK方程及其Lax对消掉u_t,ψ_{xx},ψ_t, 得到关于变量X,T,U的方程, 求解得到

$$\begin{aligned}X&=\frac{c_1}{5}x+c_4,\\T&=c_1t+c_2,\\U&=c_3\psi^3\psi_x-\frac{2}{5}c_1u.\end{aligned} \tag{15}$$

因此方程(1)的对称为

$$\sigma=\left(\frac{c_1}{5}x+c_4\right)u_x+(c_1t+c_2)u_t+\frac{2}{5}c_1u-c_3\psi^3\psi_x,\tag{16}$$

其中, $c_i(i=1,2,3,4)$ 为任意常数.

注2 在(16)中所得对称包含了两部分,

$$\sigma_1=\left(\frac{c_1}{5}x+c_4\right)u_x+(c_1t+c_2)u_t+\frac{2}{5}c_1u$$

为经典的李对称, $\sigma_2=-c_3\psi^3\psi_x$ 为非局域对称.

KK方程的非局域对称(16)包含了变量 ψ 的导数项, 需要引入新的辅助变量, 使之局域化为普通李对称, 为简单起见, 在对称(16)中令 $c_1=c_2=c_4=0$, $c_3=-1$, 有

$$\sigma=\psi^3\psi_x,\tag{17}$$

引入辅助变量 $\psi_1=\psi_x$ 与 p, 并且 p 满足 $p_x=-\dfrac{\psi^4}{24}$ 组成封闭系统 (x,t,u,ψ,ψ_1,p), 其对称满足方程为

$$\begin{aligned}
&\sigma_{u,t}-\sigma_{u,5x}-\frac{25}{2}u_x\sigma_{u,xx}-\frac{25}{2}\sigma_{u,x}u_{xx}-5u\sigma_{u,xxx}\\
&-5\sigma_uu_{xxx}-5u^2\sigma_{u,x}-10u\sigma_uu_x=0,\\
&\sigma_{\psi,t}-\frac{1}{2}u_{xx}\sigma_{\psi,x}-\frac{1}{2}\sigma_{u,xx}\psi_x\\
&-u^2\sigma_{\psi,x}-2u\sigma_u\psi_x+\frac{1}{4}u_{xxx}\sigma_\psi\\
&+\frac{1}{4}\sigma_{u,xxx}\psi+uu_x\sigma_u+u\sigma_{u,x}\psi+\sigma_uu_x\psi=0,\\
&\sigma_{\psi,xx}+\frac{u}{4}\sigma_\psi+\frac{\sigma_u}{4}\psi=0,\\
&\sigma_{p,x}+\frac{\psi^3\psi_1}{6}=0,\\
&\sigma_{\psi,x}-\sigma_{\psi_1}=0.
\end{aligned}\tag{18}$$

假设方程组的对称具有下面形式

$$\begin{aligned}
\sigma_u&=Xu_x+Tu_t-U,\\
\sigma_\psi&=X\psi_x+T\psi_t-\varPsi,\\
\sigma_{\psi_1}&=X\psi_{1,x}+T\psi_{1,t}-\varPsi_1,\\
\sigma_p&=Xp_x+Tp_t-P.
\end{aligned}\tag{19}$$

其中变量 $X,T,U,\varPsi,\varPsi_1,P$ 是 x,t,u,ψ,ψ_1,p 的函数, 把(19)式代入到(18)式, 并利用封闭系统, 得到关于变量 $X,T,U,\varPsi,\varPsi_1,P$ 的决定方程组, 利用计算软件Maple求解得到

$$\begin{aligned}
X&=\frac{c_1}{5}x+c_4,\\
T&=c_1t+c_2,\\
U&=-\frac{2c_1}{5}u+c_3\psi^3\psi_1,\\
\varPsi&=\psi(c_3p+c_5),\\
\varPsi_1&=-\frac{c_1\psi_1}{5}-\frac{\psi^5c_3}{24}+\psi_1c_3p+\psi_1c_5,\\
P&=2c_3p^2+\frac{(20c_5+c_1)p}{5}+c_6,
\end{aligned}\tag{20}$$

其中, c_1,c_2,c_3,c_4,c_5,c_6 为任意常数. 因此对称可以记为

$$\begin{aligned}
\sigma_u&=\left(\frac{c_1}{5}x+c_4\right)u_x+(c_1t+c_2)u_t\\
&\quad+\frac{2c_1}{5}u-c_3\psi^3\psi_1,\\
\sigma_\psi&=\left(\frac{c_1}{5}x+c_4\right)u_x\\
&\quad+(c_1t+c_2)u_t-\psi(c_3p+c_5),\\
\sigma_{\psi_1}&=\left(\frac{c_1}{5}x+c_4\right)u_x+(c_1t+c_2)u_t\\
&\quad+\frac{c_1\psi_1}{5}+\frac{\psi^5c_3}{24}-\psi_1c_3p-\psi_1c_5.
\end{aligned}\tag{21}$$

为了得到群不变解, 需要求解以下特征方程组

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{\frac{c_1}{5}x+c_4}&=\frac{\mathrm{d}t}{c_1t+c_2}=\frac{\mathrm{d}u}{c_3\psi^3\psi_1-\frac{2c_1}{5}u}\\
&=\frac{\mathrm{d}\psi}{\psi(c_3p+c_5)}\\
&=\frac{\mathrm{d}\psi_1}{-\frac{c_1\psi_1}{5}-\frac{\psi^5c_3}{24}+\psi_1c_3p+\psi_1c_5}\\
&=\frac{\mathrm{d}p}{2c_3p^2+\frac{(20c_5+c_1)p}{5}+c_6}.
\end{aligned}\tag{22}$$

下面讨论两种非平凡形式的解, 首先令(22)中的 $c_3\neq0$.

情况1 $c_1\neq0$, $c_2=c_4=c_5,c_6\neq0$

为了便于计算, 引入常数 $c^2=200c_6c_3-c_1^2$, 求解方程(22)可以得到

$$\begin{aligned}
p&=-\frac{1}{20}\frac{c_1(1+2c\tanh\varOmega_1)}{c_3},\\
\psi&=\frac{Q(z)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}P(z)}}{x^{1/4}\sqrt{\cosh\varOmega_1}},\\
\psi_1&=\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}P(z)}Q_1(z)}{x^{5/4}\sqrt{\cosh\varOmega_1}}-\frac{5}{24}\\
&\quad\times\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}P(z)}Q^5(z)c_3\sinh\varOmega_1}{cc_1x^{5/4}\cosh^{3/2}\varOmega_1},\\
u&=[25c_3^2Q^8(z)\,\mathrm{e}^{-2P(z)}\\
&\quad+120c_3Q^3(z)\,\mathrm{e}^{-2P(z)}Q_1(z)cc_1\sinh(2\varOmega_1)
\end{aligned}$$

$$+24U(z)c^2c_1^2\cosh(2\Omega_1)+24U(z)c^2c_1^2]$$
$$/24x^2c^2c_1^2(1+\cosh(2\Omega_1)), \tag{23}$$

其中

$$\Omega_1 = c(\ln(x)+P(z)),$$
$$z = \frac{t}{x^5},$$

$U(z)$, $Q(z)$, $Q_1(z)$ 和 $P(z)$ 为群不变量. 把 (22) 式代入到延拓系统里得到以下结果:

$$Q(z) = \frac{675^{\frac{1}{4}}\sqrt{2}(-c^2c_1\,\mathrm{e}^{P(z)}(5zP_z(z)-1)c_3^3)^{\frac{1}{4}}}{5c_3},$$
$$Q_1(z) = \frac{3}{5}\frac{c^2c_1\,\mathrm{e}^{P(z)}(30zP_z(z)+25z^2P_z(z)-1)}{c_3Q(z)^3},$$
$$U(z) = \frac{1}{4}\frac{1}{1+25z^2P_z^2(z)-10zP_z(z)}$$
$$\times[-600c^2z^2P_z^2(z)+700zP_z(z)$$
$$+1875z^4P_{zz}^2(z)+500z^3P_{zzz}(z)$$
$$+1650z^2P_{zz}(z)-2500z^4P_z(z)P_{zzz}(z)$$
$$-4500z^3P_z(z)P_{zz}(z)-4c^2$$
$$-1500z^2P_z^2(z)-2500c^2z^4P_z^4(z)$$
$$+80c^2zP_z(z)+2000c^2z^3P_z^3(z)], \tag{24}$$

其中 $P(z)$ 满足下面常微分方程

$$100P_z^3P_{zz}^2-100P_z^4P_{zzz}+25P_{zz}^2P_{zzz}$$
$$+zP_z^3-25P_zP_{zz}P_{zzzz}$$
$$-5P_z^2+80P_z^7+5P_z^2P_{zzzzz}=0. \tag{25}$$

情况 2 $c_1=0, c_2=c_4=0, c_5\neq 0, c_6\neq 0$

类似地, 引入常数 $g^2=2c_6c_3-4c_5^2$ 求解方程 (22) 可以得到

$$p = \frac{1}{2}\frac{-2c_5+g\tanh\Omega_2}{c_3},$$
$$\psi = Q(z)(1+\tan^2\Omega_2)^{1/4},$$
$$\psi_1 = -\frac{1}{24g}((1+\tan^2\Omega_2)^{1/4}Q^5(z)c_3\tan\Omega_2)$$
$$+((1+\tan^2\Omega_2)^{1/4}Q_1(z)),$$
$$u = \frac{1}{24g}\left(c_3Q^3(z)\left(-\frac{1}{2}Q^5(z)c_3\tan^2\Omega_2\right)\right.$$
$$\left.+24\tan\Omega_2Q_1(z)g\right)+U(z), \tag{26}$$

其中,

$$\Omega_2 = \frac{g(t+P(z))}{k}, \quad z = x-kt.$$

且 $U(z), Q(z), Q_1(z)$ 和 $P(z)$ 为群不变量. 把 (26) 式代入到延拓系统里, 得到

$$Q(z) = \frac{3^{\frac{1}{4}}\sqrt{2}(g^2(1+P_z(z))k^3c_3^3)^{1/4}}{c_3k},$$
$$Q_1(z) = \frac{3g^2P_{zz}(z)}{Q^3(z)c_3k},$$
$$U(z) = \frac{1}{4}\frac{1}{1+k^2P_z^2(z)+2P_z(z)}$$
$$\times[8g^2+48g^2P_z^2(z)+32g^2P_z(z)$$
$$+32g^2P_z^3(z)+8g^2P_z^4(z)$$
$$-4P_z^3(z)k^2P_z(z)$$
$$-4k^2P_z^3(z)+3k^2P_{zz}^2(z)], \tag{27}$$

其中, $P(z)$ 满足下面常微分方程

$$80g^2P_z^3P_{zz}-2P_{zz}P_{zzz}-2P_zP_{zz}$$
$$+kP_{zz}+P_z^2P_{zz}=0. \tag{28}$$

用 $\Xi(z)$ 表示 P_z, 则方程 (28) 变为

$$\Xi_z^2 = 1-3k\Xi+b_2\Xi^2+b_3\Xi^3-20g^2\Xi^4, \tag{29}$$

b_2, b_3 为任意的常数, 显然方程 (29) 具有 Jacobi 椭圆函数解 [23], 解不再一一列出. 由 (27) 可得方程具有孤子解与周期波解的相互作用新解.

假设方程 (29) 有下面形式的解:

$$\Xi(z) = a_0+a_1sn(sz,r), \tag{30}$$

利用 (29), (30) 式可以得到方程 (1) 的解:

$$u = \frac{h_4sn^4(sz,r)+h_3sn^3(sz,r)+h_2sn^2(sz,r)+h_1sn(sz,r)+h_0}{20(a_0+a_1sn(sz,r))^2}$$
$$-10ghcn(sz,r)dn(sz,r)\tanh\varpi-10g^2((a_0+a_1sn^2(sz,r))\mathrm{sech}^2\varpi), \tag{31}$$

其中,

$$\varpi = tg+g\int_{z_0}^{z}(a_0+a_1sn(sz',r))\,\mathrm{d}z',$$

$$z = x-\frac{2a_0(2r^2a_0^2-r^2a_1^2)}{3(a_1^4-a_0^2a_1^2-r^2a_0^2a_1^2+r^2a_0^4)}t,$$

$$h_0 = 1-k^2a_0^2+2c_5a_0^2-2c_6a_0^2$$

$$
\begin{aligned}
&+20g^2a_0^4-s^2a_1^2,\\
h_1 &= 4c_6a_0a_1-4c_5a_0a_1+20g^2a_0^3a_1\\
&\quad -2a_0a_1r^2-2a_0a_1r^2s^2,\\
h_2 &= 2c_6a_1^2-k^2a_1^2+60g^2a_0^2a_1^2\\
&\quad -2c_5a_1^2-a_1r^2s^2,\\
h_3 &= 400g^2a_0a_1^3+20a_0a_1r^2s^2,\\
h_4 &= 20g^2a_1^3+\frac{3}{2}a_1r^2s^2,\\
k &= \frac{2a_0(2r^2a_0^2-r^2a_1^2)}{3(a_1^4-a_0^2a_1^2-r^2a_0^2a_1^2+r^2a_0^4)},\\
g &= \frac{4r}{9\sqrt{(a_1^4-a_0^2a_1^2-r^2a_0^2a_1^2+r^2a_0^4)}},\\
s &= \frac{a_1}{\sqrt{(a_1^4-a_0^2a_1^2-r^2a_0^2a_1^2+r^2a_0^4)}},
\end{aligned}
$$

sn, cn, dn 是模为 r 的Jacobi椭圆函数, a_0, a_1 和 z_0 为任意常数. 类似地, 可以得到更多这种形式的解, 此处不再一一列出.

在解(31)中,

$$
\frac{h_4sn^4(sz,r)+h_3sn^3(sz,r)+h_2sn^2(sz,r)+h_1sn(sz,r)+h_0}{20(a_0+a_1sn(sz,r))^2}
$$

部分表示具有周期性,

$$
\begin{aligned}
&-10ghcn(sz,r)\mathrm{d}n(sz,r)\tanh\varpi\\
&-10g^2((a_0+a_1sn^2(sz,r))\mathrm{sech}^2\varpi)
\end{aligned}
$$

部分表示单孤子解, 两个解复合在一起就构成了孤子和周期波相互作用的新解.

为了更形象地显示这种解的力学特性, 下面绘制出波形图见图1.

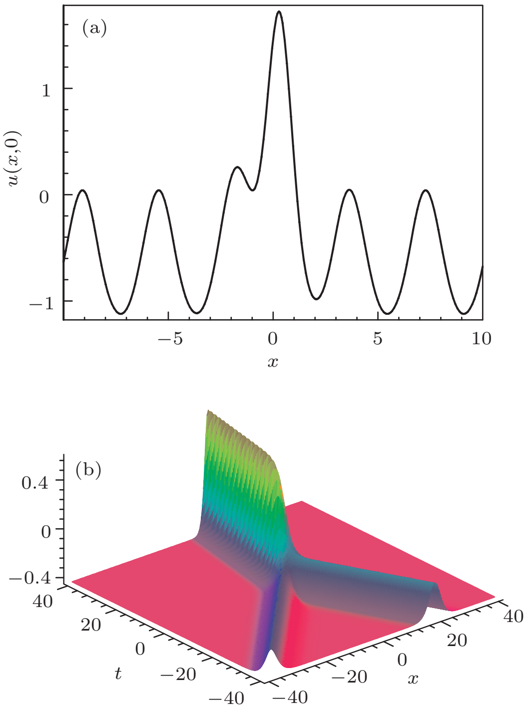

图1 (网刊彩色) KK方程的孤子和周期波相互作用波解 (a) $t=0$ 时刻波的形状; (b) 波的三维图像

图1(参数: $a_0 = 1$, $a_1 = 0.06$, $r = 0.2$, $c_5 = 0.4$, $c_6 = 0.4$)描述的是KK方程的孤子和周期波相互作用的解. 从图像上可以看到该解表示孤子在周期波上面行走, 在研究潜水波的运动中有重要意义.

注3 据我们所知, KK方程的这种新解(31)到目前还没有被发现, 且该解已经数学软件Maple16检验.

4 结 论

利用机械化算法得到了Kaup-Kupershmidt方程的非局域对称、约化, 通过解约化方程得到了该方程的新精确解. 得到的新解由孤子和周期波相互作用的复合解, 该解对解释复杂的潜水波运动中有重要意义.

参考文献

[1] Xin X P, Liu X Q, Zhang L L 2010 *Appl. Math. Comput.* **215** 3669
[2] Liu N 2010 *Appl. Math. Comput.* **217** 4178
[3] Gardner C S, Greene J M, Kruskal M D, Miura M R 1967 *Phys. Rev. Lett.* **19** 1095
[4] Bassom A P, Clarkson P A 1995 *Stud. Appl. Math.* **95** 1
[5] Hirota R 1971 *Phys. Rev. Lett.* **27** 1192
[6] Wang M L, Zhou Y B, Li Z B 1996 *Phys. Lett. A* **216** 67
[7] Fan E G 2000 *Phys. Lett. A* **265** 353
[8] Wang M L, Li X Z, Zhang J L 2008 *Phys. Lett. A* **372** 417
[9] Lou S Y, Ma H C 2005 *J. Phys. A: Math. Gen.* **38** L129

[10] Li N, Liu X Q 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 160203 (in Chinese) [李宁, 刘希强 2013 物理学报 **62** 160203]
[11] Fan E G 2000 *Phys. Lett. A* **277** 212
[12] Elwakil S A, El-Labany S K, Zahran M A 2002 *Phys. Lett. A* **299** 179
[13] Liang L W, Li X D, Li Y X 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2159 (in Chinese) [梁立为, 李兴东, 李玉霞 2009 物理学报 **58** 2159]
[14] Xin X P, Miao Q, Chen Y 2014 *Chin. Phys. B* **23** 010203
[15] Lou S Y 1994 *Chin. Phys. Lett.* **11** 593
[16] Lou S Y, Hu X B 1997 *J. Phys. A: Math. Gen.* **30** L95
[17] Vinogradov A M, Krasil'shchik I S 1980 *Dokl. Akad. NaukSSSR.* **253** 1289
[18] Bluman G W, Cheviakov A F 2005 *J. Math. Phys.* **46** 123506
[19] Bluman G W 2005 *J. Math. Phys.* **46** 023505
[20] Galas F 1992 *J. Phys. A: Math. Gen.* **25** L981
[21] Lou S Y, Hu X B 1997 *J. Phys. A: Math. Gen.* **30** L95
[22] Fordy A P, Gibbous J 1980 *Phys. Lett. A* **75** 325
[23] Zhao X Q, Zhi H Y, Zhang H Q 2006 *Chaos Solition. Fract.* **28** 112

Nonlocal symmetry and explicit solutions of the Kaup-Kupershmidt equation*

Wang Zhen-Li Liu Xi-Qiang†

(*School of Mathematical Sciences, Liaocheng University, Liaocheng 252059, China*)

(Received 28 April 2014; revised manuscript received 16 June 2014)

Abstract

In this paper, using the mechanization-method obtained nonlocal symmetry and reduction of the Kaup-Kupershmidt equation and solving the reduction equation, new solutions to the equation are obtained.

Keywords: nonlocal symmetry, Kaup-Kupershmidt equation, symmetry reduction, exact solutions

PACS: 02.30.Jr, 11.10.Lm, 02.20.–a, 04.20.Jb **DOI:** 10.7498/aps.63.180205

* Project supported Joint Fund of the National Natural Science Foundation of China and China Academy of Engineering Physics (Grant No. 11076015).

† Corresponding author. E-mail: liuxiq@sina.com