

水中上浮气泡动态特性研究*

李帅 孙龙泉 张阿漫†

(哈尔滨工程大学船舶工程学院, 哈尔滨 150001)

(2014年3月12日收到; 2014年4月10日收到修改稿)

针对水中的上浮气泡, 计入表面张力的作用, 然后将气泡边界层内黏性效应分为法向和切向两部分, 其中附加法向黏性应力通过 Young-Laplace 关系考虑; 附加切向黏性力是基于黏性耗散能量等效原理, 引入黏性修正压力代替. 首先建立了轴对称和三维上浮气泡边界元模型, 将数值结果与理论值和实验值进行对比分析, 有良好的符合度, 验证了数值模型的有效性; 然后针对毫米量级上浮气泡的平衡速度与形态, 讨论了气泡初始条件、表面张力和黏性对气泡上浮过程中动力学行为的影响; 最后, 提出了一种处理三维上浮气泡融合的数值方法, 计算结果与实验现象符合良好, 并且能够反映气泡融合后的复杂现象细节.

关键词: 上浮气泡, 黏性, 平衡速度, 融合**PACS:** 47.55.dd, 47.15.km, 47.11.Df**DOI:** 10.7498/aps.63.184701

1 引言

上浮气泡在船舶与海洋工程中发挥着重要的作用, 比如可燃冰开采中需要收集甲烷气体(气泡)、船舶减阻中的微气泡、水下抗爆抗冲击的气泡帷幕; 在现代医学上, 采用气泡在血管中携带药物; 另外, 气泡还在化工、生物、核能利用等领域都有相关应用. 所以, 对气泡进行基础性研究对工程应用能够起到参考作用, 具有重要的学术和工程意义. 目前对气泡上浮过程的研究方法有理论分析、实验测量和数值模拟, 研究的内容包括气泡的上浮速度、形态、破裂以及融合特性等.

Moore^[1] 计入边界层内黏性作用, 推导了球状气泡的上浮阻力为 $12\pi RU\mu$ (其中 R 为气泡半径, U 为气泡上浮速度, μ 为流体的动力黏性系数); 后来, Moore^[2] 又在气泡为椭球体的假设下, 推导了气泡形状系数 ε 与韦伯数 We 的函数关系, 并预测 We 大于 3.745 时, 气泡形态和上浮速度将变得不稳定. 不过理论研究的适用范围往往较窄, 不能推

广到一般情况.

实验方法能够直接获得气泡上浮速度与形态特征, 是一种有效的研究手段. Duineveld^[3] 研究了直径为 0.33—1 mm 的气泡在纯净水中的上浮特性, 研究了气泡获得的平衡速度和形状系数以及 We 之间的关系, 发现能够以稳定形态和速度上浮的最大韦伯数不超过 3.2. Raymond 和 Rosant^[4] 以及 Zenit 和 Magnaudet^[5] 都是采用不同液体或者向水中加入不同比例的化学物质来改变流体的密度、黏性以及表面张力系数等参数, 探究了不同 We 和 Re 情况下的气泡阻力系数、形态和上浮速度等物理量的变化规律与内在联系. Wu 和 Gharib^[6] 发现直径在 0.1—0.2 cm 之间的气泡上浮过程中基本呈圆球形或椭球形, 当气泡体积不变时, 具有较大上浮速度的气泡一般为椭球形; 另外, 直径小于 1.5 mm 的气泡上浮路径为直线, 当气泡尺寸更大时, 气泡的上浮路径将呈“Z”形或者螺旋形. Amirnia 等^[7] 采用黄原胶和羟甲基纤维素作为液体介质, 发现气泡上浮的平衡速度随着气泡尺寸变化也是连续变化的. 对于两个气泡的相互作用, Duineveld^[8] 实

* 国家自然科学基金优秀青年科学基金(批准号: 51222904)、中组部青年拔尖人才支持计划和国防基础科研基金(批准号: B2420133001)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: zhangaman@hrbeu.edu.cn

验研究表明, 若以气泡水平的靠近速度为特征速度, 当 $We \leq 0.18$ 时, 两个气泡会发生融合现象, 当气泡半径小于 0.7 mm 时, 两气泡撞击速度总是较小, 所以融合的可能性会很大. 同时给出了一个临界 We 为 3.3 , 当 We 小于临界值时, 两个弹开之后的气泡会再次碰撞并发生融合现象, 反之则不会融合. Sanada 等^[9] 针对两个水平气泡相互作用进行试验研究, 发现当 Re 超过一定范围时, 两气泡相互吸引, 在相撞之后可能出现融合或者弹开两种情况, 若是弹开的情况, 则气泡上浮速度会因为旋涡脱落等原因降低 50% 左右. 不同现象的发生与 Re 和 We 相关, 文中指出临界 We 在 2 左右, 而临界 Re 与 Morton 数有关. 实验研究虽然很直接, 但是经常由于实验条件的影响, 很难对气泡上浮的动态特性进行系统研究, 比如很难控制气泡初生尺寸、液体黏性和表面张力等.

在气泡上浮的数值研究方面, 相关的数值方法较多, 但是每种方法各有优缺点. Grenier 等^[10] 采用光滑粒子流体动力学 (SPH) 方法, 模拟了二维帽状气泡在后期的小气泡脱落现象, 该方法在处理撕裂等问题时十分便利, 但是二维模型与实际的三维问题无法联系起来, 而且 SPH 方法计算量大, 精度低. Hua 等^[11,12] 采用波前追踪法, 得到气泡上浮平衡速度以及形状系数. 对于相同体积但是初始形态不一样的气泡, 若气泡尺寸较小, 则气泡最终形态以及平衡速度一致, 若气泡尺寸较大, 则气泡初始形态可能会影响气泡射流以及涡环演变过程. Chen 等^[13] 采用移动粒子半隐式方法模拟了两个二维气泡的融合过程, 但是他们的二维模型不能将数值结果迁移到真实的三维情况, 也不能模拟出复杂融合过程的某些细节过程. Wang 等^[14,15] 采用流体体积函数方法也对单个上浮气泡进行了数值模拟. 近几十年来, 很多学者采用边界元法对水下爆炸气泡进行了相关研究^[16-20], 并取得了可喜的成果, 但是传统的边界元法无法考虑黏性的作用. Lundgren 和 Mansour^[21] 采用轴对称边界元气泡模型, 计入表面张力的作用, 研究了半径大于 7.8 mm 的气泡形成射流的过程, 发现表面张力越大, 射流相对越宽; 当表面张力足够大时, 射流将不会穿过气泡顶部. Lind 和 Phillips^[22] 考虑边界层内法向黏性力的作用, 通过数值模拟推断气泡上浮时出现的速度不连续的原因为尾涡脱落. 李帅和张阿漫^[23] 研究了上浮气泡在水平壁面处的弹跳特性.

Klaseboer^[24] 考虑边界层内黏性的作用, 建立轴对称边界元气泡模型, 模拟了直径 4 mm 以下的气泡上浮过程. Zhang 和 Ni^[25] 研究了黏性对水下脉动气泡的影响, 发现气泡射流速度会随黏性增大而逐渐衰减.

本文针对水中的上浮气泡, 考虑气泡表面的边界层内黏性作用, 计及表面张力, 分别建立轴对称与三维边界元数值模型, 同时给出了计算黏性和表面张力的数值方法. 通过编写的程序, 研究了影响气泡动力学行为的因素, 包括气泡初始条件、黏性、表面张力等. 最后, 针对两个气泡碰撞融合情况也做了相关探讨, 数值结果与实验现象符合良好.

2 基础理论

对于不可压缩的牛顿流体而言, 其运动微分方程^[26] (Navier-Stokes 方程) 表示为

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\mathbf{g} - \frac{\nabla P}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (1)$$

其中, \mathbf{u} 为流体速度, \mathbf{g} 为重力加速度, P 为流场压力, ν 为流体的运动黏性系数.

Yang 和 Yeh^[27] 证明, 牛顿流体中的黏性对于球状气泡脉动的贡献为零, 黏性项的贡献仅来源于气泡表面边界. 为了考虑气泡边界黏性项的贡献, 本文在气液交界面处选取一层有限厚度的流体薄层, 称为气泡表面边界层. 考虑表面张力和附加法向力的作用, 边界层两侧法向应力连续应有

$$P_b - P_l + 2\mu \frac{\partial u_n}{\partial n} = \sigma \vartheta, \quad (2)$$

式中, P_l 为气泡外表面流体压力, μ 为流体的动力黏性系数, u_n 为气泡表面法向速度, σ 为表面张力系数, ϑ 为气泡表面局部曲率; P_b 为气泡内部气体压力, 本文采用绝热气体状态方程^[28] 进行描述, 即

$$P_b = P_c + P_b(0) \left(\frac{V(0)}{V} \right)^\lambda, \quad (3)$$

式中, P_c 为可冷凝气体的饱和蒸汽压; $P_b(0)$ 和 $V(0)$ 分别为气泡初始时刻的压力和体积; λ 为气体的比热, 对于上浮气泡, 本文取 1.4 .

根据亥姆霍兹速度分解定理, 流场中任意一点速度 \mathbf{u} 均可分解为无旋与有旋两部分^[29]:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_p + \mathbf{v} = \nabla \Phi + \mathbf{v}. \quad (4)$$

在气泡边界层内引入黏性修正压力 P_{vc} ^[24], 使其满足

$$\nabla P_{vc} = -\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \rho \nabla \Phi \times (\nabla \times \mathbf{v}) + \mu \nabla^2 \mathbf{v}. \quad (5)$$

将(4), (5)式代入(1)式中, 经整理得到

$$\nabla \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 + \mathbf{v} \cdot \nabla \Phi + \frac{P - P_{vc}}{\rho} + gz \right] = 0. \quad (6)$$

对上式进行积分, 可获得考虑黏性修正压力的伯努利方程为

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 + \mathbf{v} \cdot \nabla \Phi + \frac{P - P_{vc}}{\rho} + gz = \frac{P_\infty}{\rho}. \quad (7)$$

将随体导数公式

$$\begin{aligned} \frac{D\Phi}{Dt} &= \frac{\partial \Phi}{\partial t} + ((\mathbf{u}_p + \mathbf{v}) \cdot \nabla)\Phi \\ &= \frac{\partial \Phi}{\partial t} + (\nabla \Phi)^2 + \mathbf{v} \cdot \nabla \Phi \end{aligned}$$

以及(4)式代入(6)式中, 得到气泡动力学边界条件:

$$\begin{aligned} \frac{D\Phi}{Dt} &= \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 - gz + \frac{\sigma \vartheta}{\rho} - 2\nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial n^2} \\ &\quad - \frac{P_b - P_{vc} - P_\infty(t)}{\rho}; \end{aligned} \quad (8)$$

同时, 气泡满足的运动学边界条件^[16]为

$$\frac{dX}{dt} = \nabla \Phi; \quad (9)$$

流体满足的质量守恒方程^[26]为

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (10)$$

通过连续性方程以及不可压条件可得流场的控制方程为Laplace方程:

$$\nabla^2 \Phi = 0. \quad (11)$$

根据格林第三公式^[26], 速度势 Φ 满足的边界积分方程为

$$\begin{aligned} \alpha \Phi(\mathbf{j}) &= \iint_s \left(\frac{1}{r_{ij}} \cdot \frac{\partial \Phi(\mathbf{i})}{\partial \mathbf{n}} \right. \\ &\quad \left. - \Phi(\mathbf{i}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{r_{ij}} \right) \right) ds, \end{aligned} \quad (12)$$

式中, \mathbf{i} 和 \mathbf{j} 分别是边界上的积分点和控制点, r_{ij} 为 \mathbf{i} 和 \mathbf{j} 两点之间的距离, 法线 \mathbf{n} 指向流场外, s 为包

括流场内所有的边界, α 为在 \mathbf{j} 点观察流场的立体角.

对于初始时刻气泡内压, 本文取

$$P_b(0) = P_\infty + \sigma \cdot \frac{2}{R_e}, \quad (13)$$

式中, P_∞ 为气泡初始时刻形心位置所在水深的无穷远处压力, R_e 为等效气泡半径, 即 $\left(\frac{3V(0)}{4\pi} \right)^{1/3}$.

本文下面重点介绍关于的轴对称模型以及三维模型的 P_{vc} 求解方法. Joseph 和 Wang^[30] 通过黏性耗散能量等效法, 推导得到黏性修正压力在气泡边界上所做的功应等于无旋切向应力在气泡边界所做的功:

$$\int_S \mathbf{u}_p \cdot \mathbf{n} (-P_{vc}) dS = \int_S \mathbf{u}_p \cdot \mathbf{t} \tau_s dS. \quad (14)$$

此外, Joseph 和 Wang 假设黏性修正压力 P_{vc} 与附加法向应力 τ_n 满足线性比例关系:

$$P_{vc} = -C \tau_n = -2\mu C \frac{\partial^2 \Phi}{\partial n^2}. \quad (15)$$

联立以上两式即可求得 P_{vc} , 但是在不同模型求解过程中, 还涉及一些数值计算方法, 详见下文.

3 数值计算方法

3.1 表面张力和黏性

轴对称模型中, 将气泡离散为等间距单元和节点, 三维模型中气泡被离散成三角形单元, 方程(12)可写成线性方程组的形式, 具体可参考文献^[16, 18, 31]. 对于上浮气泡, 表面曲率和黏性的求解尤为重要. 气泡节点处的局部曲率 ϑ 、黏性修正压力求解中涉及 $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial n^2}$ 和 τ_s 可参考文献^[24]:

$$\vartheta = -n_r \frac{\partial n_z}{\partial s} + \frac{n_z \partial n_r}{\partial s} + \frac{n_r}{r}, \quad (16)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial n^2} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} + \vartheta \frac{\partial \Phi}{\partial n} + \frac{n_z}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial s}, \quad (17)$$

$$\tau_s = 2\mu \left[\frac{\partial \Phi_n}{\partial s} - \frac{\partial \Phi}{\partial s} \left(n_r \frac{\partial n_z}{\partial s} - n_z \frac{\partial n_r}{\partial s} \right) \right]. \quad (18)$$

在三维模型求解过程中, 假设节点 \mathbf{k} 附近有 m 个节点, m' 个单元毗邻, 则点 \mathbf{k} 处的局部曲率为

$$\begin{aligned} \vartheta &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \vartheta_n(\theta) d\theta \\ &\approx \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^m \left(\frac{\vartheta_i + \vartheta_{i+1}}{2} \right) \theta_i, \end{aligned} \quad (19)$$

其中, θ_i 为 \mathbf{k} 点附近三角形单元的夹角,

$$\vartheta_i = 2\mathbf{n}_k \cdot (\mathbf{k}_i - \mathbf{k}) / |\mathbf{k}_i - \mathbf{k}|^2,$$

$$\mathbf{n}_k = \left(\sum_{j=1}^{m'} \mathbf{n}_j / S_j \right) / \sum_{j=1}^{m'} (1/S_j).$$

为了求解三维气泡模型中的 $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial n^2}$ 项, 我们做如下分解:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial n^2} &= \frac{\partial \Phi_n}{\partial n} \\ &= \frac{\partial}{\partial n} (\Phi_x n_x + \Phi_y n_y + \Phi_z n_z) \\ &= \frac{\partial \Phi_x}{\partial n} n_x + \frac{\partial \Phi_y}{\partial n} n_y + \frac{\partial \Phi_z}{\partial n} n_z. \end{aligned} \quad (20)$$

利用文献 [32] 中的推导, 有变形的格林公式:

$$\begin{aligned} \alpha \Phi_x(j) &= \iint_s \left(\frac{1}{r_{ij}} \cdot \frac{\partial^2 \Phi(i)}{\partial n \partial x} \right. \\ &\quad \left. - \Phi_x(i) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_{ij}} \right) \right) ds. \end{aligned} \quad (21)$$

通过该方程即可求得 $\frac{\partial \Phi_x}{\partial n}$, 同理还可以求得 $\frac{\partial \Phi_y}{\partial n}$ 与 $\frac{\partial \Phi_z}{\partial n}$, 代入方程 (20) 中即可求得 $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial n^2}$. 对于黏性修正压力 P_{vc} 的三维模型求解, 可参考文献 [25, 29] 的求解方法, 这里直接给出表达式:

$$\begin{aligned} P_{vc} &= -2\mu \left(\frac{\int_S (\Phi_x \Phi_{xn} + \Phi_y \Phi_{yn} + \Phi_z \Phi_{zn}) dS}{\int_S \Phi_n \Phi_{nn} dS} - 1 \right) \\ &\quad \times \frac{\partial^2 \Phi}{\partial n^2}. \end{aligned} \quad (22)$$

为了数值计算中的稳定性, 采用龙格-库塔法对气泡位置以及表面速度势进行更新. 另外, 时间步长采用下式计算:

$$\Delta t = \frac{\Delta \Phi}{1 + \max(\nabla \Phi)^2 + \frac{P_b(0)}{P_\infty} \left(\frac{V_0}{V} \right)^\lambda + gz}, \quad (23)$$

对于上式中 $\Delta \Phi$ 的取值将在下文模型收敛性分析中进行讨论.

3.2 涡环模型

在一定条件下, 气泡上浮过程中的射流将穿透气泡另一端, 形成环状气泡, Wang 等 [17] 在模拟环状气泡时, 在气泡内部放置一个涡环, 其环量 Γ 为

$$\Gamma = \int_C \mathbf{u} d\mathbf{l} = \Phi_N - \Phi_1, \quad (24)$$

其中, Φ_1 和 Φ_N 是两个冲击点的速度势, 环量刚好等于冲击点处速度势突变. 之后将速度势 Φ 分为两

部分, 即 $\Phi = \Phi_v + \Phi_r$, 其中 Φ_v 为涡环诱导速度势, Φ_r 为残余速度势, 气泡节点上的 Φ_v 可采用速度积分方法求得.

$$\begin{aligned} \Phi_v(r_i, z_i, a, c) &= \Phi_v(r_1, z_1, a, c) + \int_{(r_1, z_1)}^{(r_i, z_i)} \mathbf{u}_r d\mathbf{l}, \end{aligned} \quad (25)$$

其中 $\Phi_v(r_1, z_1, a, c)$ 为第一个节点的涡环诱导速度势, 可采用下式进行计算:

$$\begin{aligned} \Phi_v(r_1, z_1, a, c) &= \int_{-\infty}^{z_1} w_r(0, z) dz + \int_0^{r_1} v_r(r, z_1) dr. \end{aligned} \quad (26)$$

涡环在流场中的诱导速度用 Biot-Savart 定律求得:

$$\mathbf{u}_v(r, z) = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_C \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}. \quad (27)$$

将总速度势分为两部分之后, 气泡表面的速度也被分为两部分, 一部分是涡环诱导速度 \mathbf{u}_v , 另外一部分是残余速度势诱导速度 \mathbf{u}_r . 采用 $\mathbf{u}_{total} = \mathbf{u}_v + \mathbf{u}_r$ 对气泡位置进行更新, 采用下式对残余速度势进行更新:

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_r}{dt} &= -\frac{|\mathbf{u}_{total}|^2}{2} + \mathbf{u}_{total} \cdot \nabla \Phi_r + \frac{\sigma \vartheta}{\rho} \\ &\quad - 2\nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial n^2} - \frac{P_b - P_{vc} - P_\infty}{\rho} - gz. \end{aligned} \quad (28)$$

3.3 拓扑结构的处理

本文在数值计算过程中, 气泡可能会出现射流、破裂、融合等物理现象, 此时需要对气泡节点或单元进行处理. 对于射流穿透气泡另一端时, 气泡从单连通域变化为双连通域, 需要将冲击点处进行开口并进行网格缝合, 详细处理方法可参考文献 [17]. 当环状气泡中间的水柱变得十分细长时, 气泡又会从双连通域变为单连通域, 需要将细水柱对应的网格和节点删除, 详细参考文献 [33, 34].

本文在 Rungsiyaphornrat 等 [19] 关于轴对称爆炸气泡融合模型基础上, 提出三维上浮气泡融合模型. 忽略融合过程中的能量损失等物理现象, 气泡融合过程如图 1 所示.

在数值计算过程中, 假定两个气泡之间的最小距离 (节点与节点之间) 为 Δs , 如图 1 (a) 所示, 气泡的融合准则设定为 [19]

$$\Delta s \leq 0.02. \quad (29)$$

如果计算中满足融合准则(29)式, 则对两个气泡进行融合处理; 假设两个气泡上对应最小距离的节点编号分别为 θ 和 θ' , 然后将节点 θ 和 θ' 周围的第1圈和第2圈节点全部删除; 将两个气泡第三圈节点按照就近原则进行配对, 并在配对节点的中点处增加一圈节点, 如图1(b)所示; 若有必要, 可以在两气泡缝合部分进行节点加密, 如图1(c)所示. 缝合部分的新节点的速度势可通过周围其他节点进行插值得到, 至此两个子气泡就融合为一个气泡了.

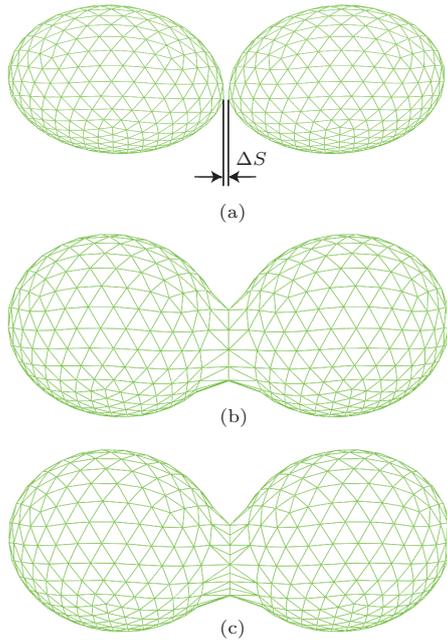


图1 气泡融合过程示意图 (a) 三维气泡融合前; (b) 三维气泡融合后; (c) 融合线加密后

4 结果与讨论

上浮气泡运动过程中的形态、速度和阻力系数等运动特性已被广泛研究, 从理论、实验和数值等方面都有涉及. 影响气泡动态特性的因素很多, 比如气泡初始条件、流体性质以及不同边界条件. 在4.1节中将首先对数值模型的收敛性和有效性进行验证; 4.2节中将对气泡初始条件对气泡上浮形态以及上浮速度的影响进行讨论; 4.3节中将对流体表面张力和黏性的影响进行讨论. 最后在4.4节中将针对两个气泡的融合现象进行初探. 与此同时, 将数值结果与相关的实验、理论和经验公式等进行对比, 为数值研究提供参考. 下文数值计算中, 如没有特殊说明, 相关参数选取如下: $P_\infty(0) = 1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$, $\rho = 1000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$,

$$\sigma = 0.073 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}, \mu = 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}.$$

4.1 模型收敛性分析和有效性验证

在详细讨论上浮气泡动态特性前, 首先对节点数和时间步长对计算结果影响进行研究. 轴对称模型中将气泡表面划分为等间距的节点, 三维模型中将气泡表面划分为等边三角形的非结构化网格[31]; 时间步长根据(23)式进行确定, 其中可以调节 $\Delta\Phi$ 的值控制时间步长的大小, 在此仅对轴对称模型的收敛性分析进行介绍, 三维模型的收敛性同理可以得到验证.

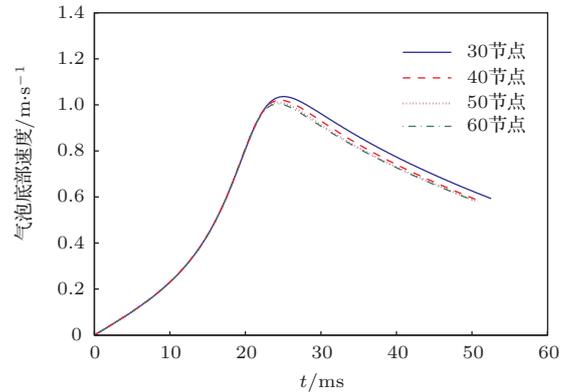


图2 (网刊彩色) 节点数对计算结果的影响

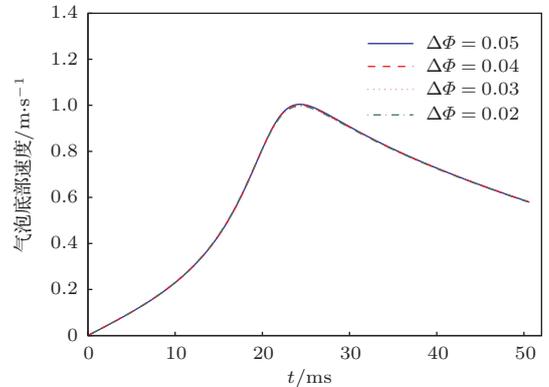


图3 (网刊彩色) 时间步对计算结果的影响

为了讨论节点数对计算结果的影响, 针对同一工况(气泡初始半径为10 mm, 气泡上浮过程中将产生向上射流), 分别将气泡表面离散为30, 40, 50和60个节点进行计算, 其中时间步长的控制参数为 $\Delta\Phi = 0.02$. 图2所示为气泡底部速度时历变化曲线, 可见随着气泡节点数的增加, 计算曲线逐渐收敛至稳定值, 其中50节点和60节点的计算结果几乎重合. 同理, 针对相同工况, 时间步长控制参数分别取为 $\Delta\Phi = 0.05, 0.04, 0.03, 0.02$, 气泡表面

被离散为60节点. 图3给出了计算结果, 4条曲线几乎完全重合. 综上, 本文的数值模型收敛性能够得到保证, 在文章后续的轴对称计算中, 气泡节点取60, 时间步长控制参数取 $\Delta\phi = 0.02$. 对于三维模型, 气泡表面被离散为362个节点和720个单元.

下面通过与实验来验证对数值模型的有效性, 针对文献[35]中的实验工况, 等效气泡半径为0.738 mm, 气泡从静止开始上浮, 同时采用轴对称与三维气泡模型进行数值模拟, 得到的气泡上浮速度与上浮高度之间的变化关系如图4所示.

如图4所示, 小黑点代表实验值, 气泡在较短距离内加速到较大的上浮速度, 这是由于气泡上浮初期速度较小, 浮力较阻力占优, 产生较大的上浮加速度. 随着气泡速度的增大, 阻力增加, 上浮加速度减小, 气泡上浮速度增加趋于平缓, 气泡逐渐达到平衡速度, 气泡受到的阻力逐渐趋近浮力大小. 本文的轴对称模型和三维模型的计算结果与实验值以及文献[24]的计算结果符合良好, 说明本文的数值模型能够预报上浮气泡达到的终极速度.

4.2 气泡初始条件的影响

4.2.1 气泡尺寸对上浮形态的影响

气泡尺寸不同, 上浮过程中所表现出来的动力学行为有很大的不同, 针对不同尺寸气泡进行计算, 得到几种典型气泡形态图, 如图5所示. 气泡上浮过程中的形态与气泡受力密切相关, 当气泡尺寸较小时, 气泡表面曲率大, 对应的表面张力越大, 气泡越容易保持球状或者椭球状(如图5(a)–(c)所示); 随着气泡尺寸增大, 表面张力逐渐变小, 气泡较难保持球状甚至椭球状, 在上下表面压力差的作用下被压扁, 呈饼状(如图5(d), (e)所示), 气泡底部甚至产生向上凹陷, 呈帽状(如图5(f), (g)所

示); 当气泡尺寸足够大时, 气泡向上的射流将穿透气泡顶部, 进而演化成环状气泡. 这些气泡形态在Amirnia等[7]与Bhaga和Weber[36]的实验结果都有所阐述.

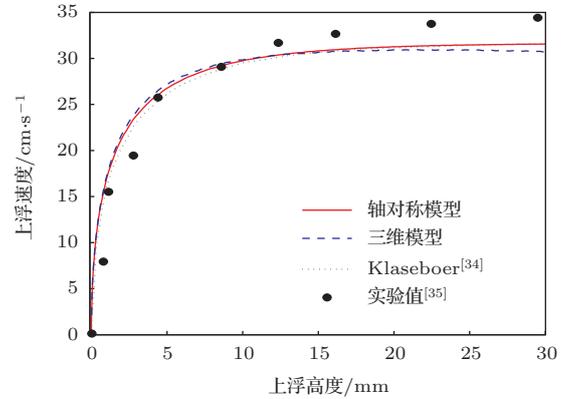


图4 上浮速度与上浮距离之间的关系曲线(实验值来自文献[35], 数值结果来自文献[24])

在上浮气泡的研究中, 常常引入一个形状系数来描述球形或椭球形气泡的形态特征, 用 ϵ 表示, 如图6所示. 图7为形状系数随气泡尺寸的变化曲线, 可见当气泡半径小于0.3 mm时, 气泡的形状系数约等于1, 即表示气泡基本保持球状; 随着气泡尺寸的增大, 形状系数也逐渐增大, 本文的计算结果与实验值以及文献中的数值解符合良好. 当气泡尺寸较大时, 气泡上浮过程中将不会存在一个稳定的形态.

气泡的形态与表面张力的大小有重要的关系, 常常采用 We ($We = \rho U_\infty^2 d / \sigma$) 来衡量表面张力的大小. Moore[2]基于势流理论, 并考虑边界层内法向黏性的作用, 推导了气泡形状系数 ϵ 与 We 数之间的解析表达式:

$$We(\epsilon) = 4\epsilon^{-4/3}(\epsilon^3 + \epsilon - 2)[\epsilon^2 \sec^{-1} \epsilon - (\epsilon^2 - 1)^{1/2}]^2(\epsilon^2 - 1)^{-3}. \quad (30)$$

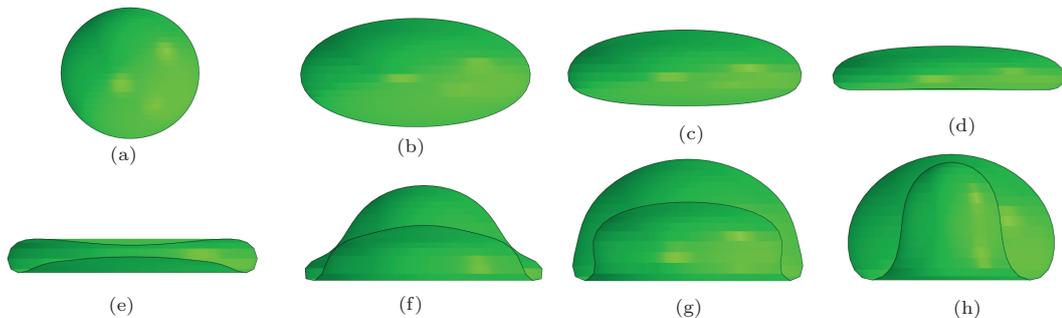


图5 几种典型上浮气泡形态 (a) $R_e = 0.2$ mm; (b) $R_e = 1.0$ mm; (c) $R_e = 1.5$ mm; (d) $R_e = 2.0$ mm; (e) $R_e = 3.0$ mm; (f) $R_e = 5.0$ mm; (g) $R_e = 6.0$ mm; (h) $R_e = 8.0$ mm

将本文的计算结果与 Moore^[2] 的解析解进行对比, 如图 8 所示. 本文的数值结果与 Moore 的解析结果在 $We < 2$ 范围内符合良好, 但是当 We 逐渐增大, 本文与解析解相差越来越大, 这是由于 Moore 模型中只是考虑了边界层内法向黏性力的作用, 并没有考虑到切向黏性力的作用, 另外 Moore 假设气泡为标准的椭球体, 其实通过数值计算来看, 这一假设是不准确的, 尤其是气泡尺寸较大时, 气泡形态偏离椭球状越远.

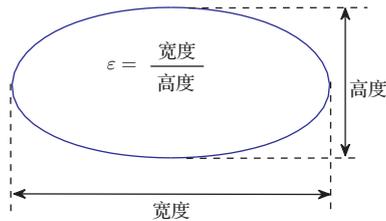


图 6 气泡形状系数定义

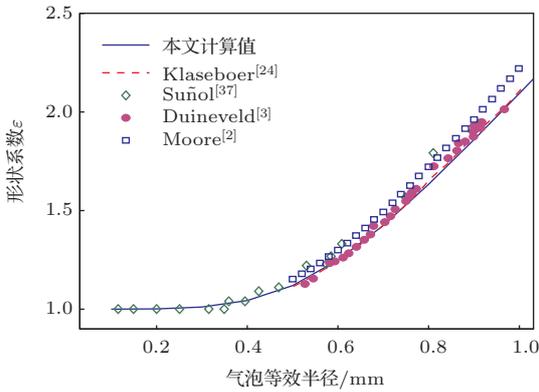


图 7 (网刊彩色) 形状系数与气泡等效半径关系曲线

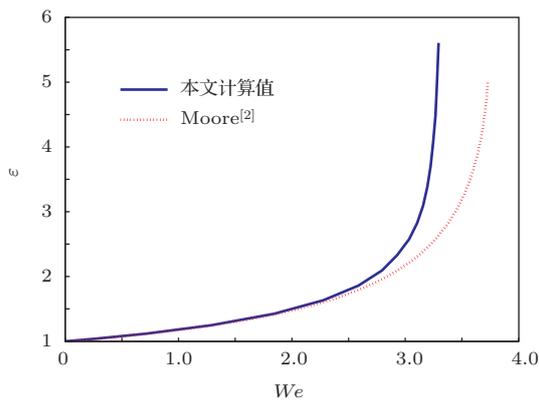


图 8 形状系数 ε 和 We 的关系曲线

4.2.2 气泡尺寸对上浮速度的影响

为了研究不同尺寸气泡上浮平衡速度的变化规律, 本文对等效半径在 $[0.1, 2]$ mm 范围内的气泡进行计算, 得到气泡的平衡速度与气泡尺

寸之间的关系曲线如图 9 所示, 并附上 Moore^[2] 与 Klaseboer 等^[24] 的计算值, Duineveld^[3], Haberman 和 Morton^[38] 的实验值以及 Clift 等^[39] 总结的经验公式 ($U_R = [(2.14\sigma/\rho d) + 0.505gd]^{1/2}$, 只针对 $d > 1.3$ mm, $Re > 600$ 的球形气泡在纯净水中上浮成立).

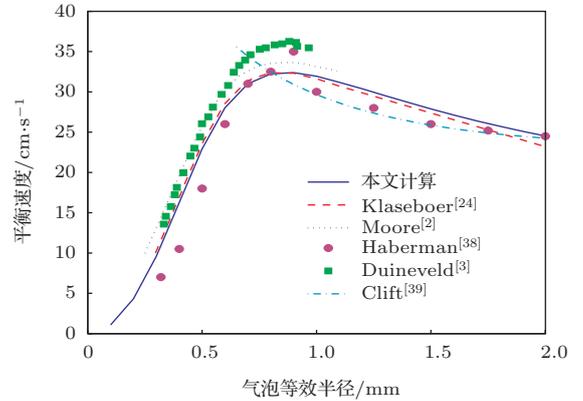


图 9 (网刊彩色) 气泡上浮平衡速度与气泡尺寸关系

如图 9 所示, 气泡的平衡速度随着气泡半径的增大并不是单调变化的过程, 而是一个先增后减的变化规律. 气泡半径为 0.9 mm 时, 气泡的平衡速度达到最大. 当气泡半径 $Re \in [0.1, 0.9]$ mm 时, 气泡表面张力较大, 其形态基本保持球状或椭球状, 随着 Re 增大, 气泡浮力较阻力增大明显, 平衡速度逐渐增大; 当 $Re \in [0.9, 2.0]$ mm 时, 随着 Re 增大, 虽然气泡浮力在增加, 但是此时气泡形态变得更加扁平, 气泡的横截面积显著增大, 阻力较浮力增大明显, 导致气泡平衡速度下降. 图 10 给出了几种不同尺寸气泡上浮速度时历变化曲线. 当气泡尺寸较小时 (如 $Re = 0.1, 0.5, 1.0$ mm 等) 气泡上浮速度逐渐增大, 最后逐渐趋近平衡速度, 时历曲线十分平滑; 当气泡半径较大时, 上浮速度在增大过程中会出现抖动的现象, 而且气泡尺寸越大, 抖动越厉害, 但是抖动振幅逐渐衰减, 上浮速度逐渐趋近最终的平衡速度 (如 $Re = 1.5$ mm, 2.0 mm 等); 当气泡半径增大到一定范围时, 气泡的上浮速度不会逐渐趋近平衡速度, 而是不停地抖动, 而且没有特殊的变化规律 (如 $Re = 3.0$ mm).

为了研究气泡上浮过程中阻力系数

$$C_d = \rho \frac{4}{3} \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 g / \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

的变化规律, 先引入雷诺数 $Re = U_\infty d / \nu$. Batchelor^[40] 通过势流计算得到球体上浮运动中的阻力系

数与雷诺数关系为

$$C_d = \frac{48}{Re}. \quad (31)$$

Moore^[1] 基于势流理论推导了球状或椭球状气泡的阻力系数公式为

$$C_d = \frac{48}{Re} G(\varepsilon) \left(1 - \frac{2.21H(\varepsilon)}{Re^{0.5}} \right), \quad (32)$$

G 和 H 是较复杂的数学函数, 其中

$$G(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^{4/3}}{3} (\varepsilon^2 - 1)^{3/2} \times \frac{[\sqrt{\varepsilon^2 - 1} - (2 - \varepsilon^2)\text{sec}^{-1}\varepsilon]}{(\varepsilon^2 \text{sec}^{-1}\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - 1})^2}; \quad (33)$$

而 H 则需通过数值计算, 不过 $\varepsilon < 2$ 时, 可近似表达为^[41]

$$G(\varepsilon) \approx 0.1287 + 0.4256\varepsilon + 0.4466\varepsilon^2, \quad (34)$$

$$H(\varepsilon) \approx 0.8886 + 0.5693\varepsilon - 0.4563\varepsilon^2. \quad (35)$$

对于球状气泡, $\varepsilon \rightarrow 1, G(\varepsilon) \rightarrow 1, H(\varepsilon) \rightarrow 1,$

$$C_d = \frac{48}{Re} \left(1 - \frac{2.21}{Re^{0.5}} \right). \quad (36)$$

Khan 和 Richardson^[42] 总结了一个 $10^{-2} < Re < 3 \times 10^5$ 范围内的阻力系数通用公式:

$$C_d = [2.25Re^{-0.31} + 0.36Re^{0.06}]^{3.45}. \quad (37)$$

将本文计算得到的气泡上浮过程中的阻力系数与雷诺数关系绘于图 11 中, 本文的计算结果与 Moore 的解析解在 $Re < 900$ 时符合良好, 当 $Re > 900$ 后, 偏差越来越大, 这同样是由于 Moore 模型中没有考虑到切向黏性力的作用, 而且 Moore 模型假设气泡是椭球体, 这与本文数值计算的气泡形态是有差别的. 可见当 $Re > 900$ 时, 切向黏性力是不可忽略的. 同样本文的计算值与 Khan 和 Richardson^[42] 经验值的趋势大致一致, 不过由于他们的模型都是基于球状物体, 而本文研究的气泡是一个自由变形体, 当气泡尺寸较大时, 气泡会被压扁, 迎流面积迅速增大, 致使阻力系数有增大的趋势.

4.2.3 气泡初始形态的影响

在前两节的讨论中, 气泡的初始形态都为规则的球形, 这是一种理想状态, 所以本节将探讨初始形态非球状的上浮气泡运动特性. 首先进行一个非球状气泡上浮实验, 同时进行对应的数值模拟, 再次验证模型的有效性和通用性.

实验设备包括高速运动分析系统、气泡发生器、光源和水箱. 高速摄像机为 Phantom V12.1, 最高拍摄速率为 $650000 \text{ f}\cdot\text{s}^{-1}$. 气泡发生器放置在水箱底部中央, 出气口直径为 3 mm. 水箱为 $500 \text{ mm} \times 500 \text{ mm} \times 500 \text{ mm}$ 的方形透明水箱, 水深 400 mm. 图 12 所示为实验与数值结果的气泡形态对比.

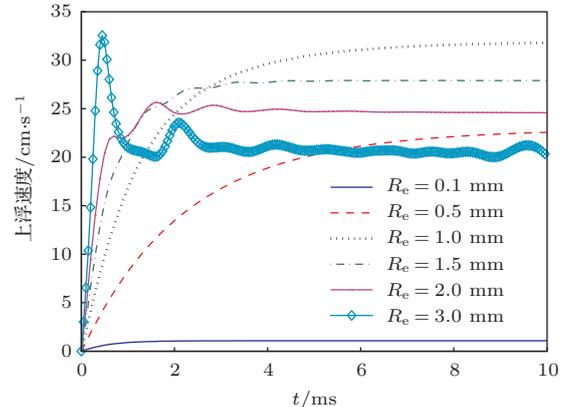


图 10 气泡上浮速度时历曲线

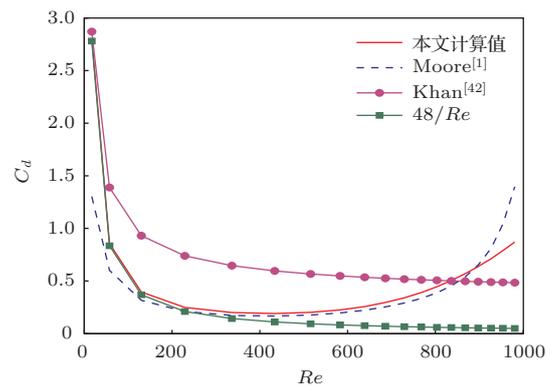


图 11 气泡阻力系数和 Re 之间关系曲线

图 12 (a) 代表初始时刻气泡从出气口脱落前瞬间, 气泡在浮力与表面张力的共同作用下呈非球状, 下端较尖细, 气泡上下方向长度为 5.8 mm, 左右方向宽 4.6 mm; (b) 表示 $t = 2 \text{ ms}$ 时刻气泡底部迅速向上弹起, 下端的尖细部分消失, 这是由于气泡底部较尖, 局部曲率大, 表面张力较大的缘故; (c) 表示 $t = 4 \text{ ms}$ 时刻, 气泡底部继续向上弹起, 底部变得比较平坦, 气泡上半部分形态基本没有发生太大变化; (d), (e) 中气泡进一步变成铃铛状; (f), (g) 表示气泡进一步变扁, 最后基本以 (h) 中所示的形状稳定上浮. 实验中气泡的横向宽度为 6.92 mm, 数值解为 7.58 mm.

图 13 所示为气泡底部上升高度时历曲线, 可

见计算值与实验值符合良好. 气泡在脱离出气口时, 气泡底部具有一定的向上弹起的速度, 而计算模型把气泡当作静止状态, 造成气泡初始条件与真实情况不能完全吻合. 在 70 ms 时刻, 实验值与数值解的相对误差为 5.1%. 产生的误差是由于表面张力系数以及黏性系数的选取与真实值有偏差, 以及气泡初始条件的设定不准确, 气泡在脱离出气口

时, 气泡底部具有一定的向上弹起的速度, 加上受到外界环境的影响以及气泡表面各处曲率不一样, 造成气泡表面有一定的振荡, 气泡迎流面积不断变化, 气泡受到的阻力都在时刻变化, 导致实验值的曲线有一些“跳动”, 而计算模型把气泡当作静止状态, 与真实情况有一定的偏差, 可见气泡初始条件会影响气泡上浮过程.

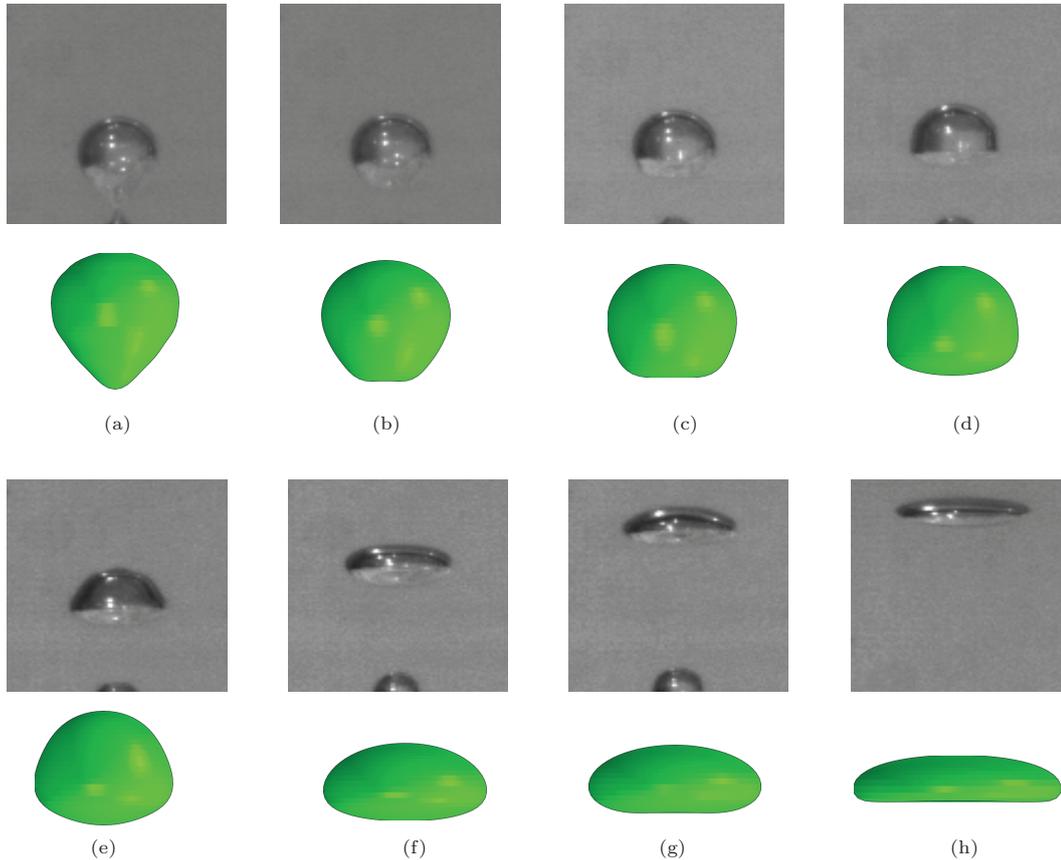


图 12 实验与数值模拟的气泡形态对比示意图 (a) $t = 0$ ms; (b) $t = 2$ ms; (c) $t = 4$ ms; (d) $t = 7$ ms; (e) $t = 10$ ms; (f) $t = 22$ ms; (g) $t = 32$ ms; (h) $t = 73$ ms

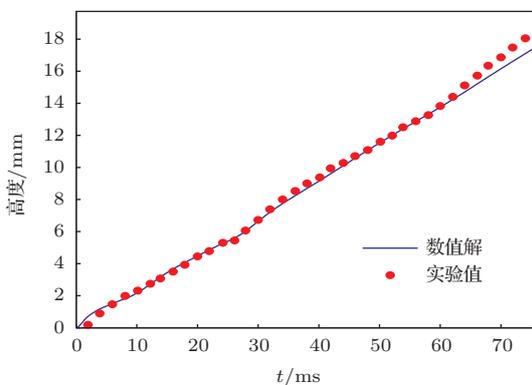


图 13 气泡底部上升高度时历曲线

下面针对 $R_e = 1$ mm, $\varepsilon = 0.6, 1, 2$ 三种不同初始形态的气泡进行计算, 得到气泡的形状系数时

历变化曲线如图 14 所示. $\varepsilon = 1$ 情况, 气泡形状系数逐渐增大到一个稳定的值; 其他两种情况下, 气泡形状系数在前期不停地震荡, 这是由于气泡表面的表面张力分布不均匀, 受力不平衡, 在惯性力等作用下反复震荡, 但是振幅逐渐衰减, 最终趋于稳定值. 三种不同工况下, 气泡最后形态一致, 说明气泡的初始形态只是影响气泡前期的运动特性, 对后期的稳定形态的影响不大.

下面针对另外三种不同工况进行计算, $R_e = 4$ mm, $\varepsilon = 0.3, 0.6, 1$. 图 15 所示为三种工况下气泡上浮过程的形态变化. 对于 $\varepsilon = 0.3$ 工况, 气泡初始形态相对细长, 上下表面压力差较大, 而且底部

曲率大, 在表面张力的作用下迅速回弹, 并形成向上的射流, 而且射流穿透气泡顶部, 气泡演化成一个环状气泡, 环状气泡在上浮过程中, 中间的水柱逐渐变细, 有断裂的趋势. 对于另外两种工况, 气泡底部都会出现向上凹陷, 但是不足以完成射流, 气泡呈帽状. 对于 $\varepsilon = 0.3$ 不处理水柱断裂的情况下, 三种工况中的气泡最终形态基本相似.

综上, 气泡初始形态对气泡前期的运动特性影响很大, 气泡形态越偏离球形, 则气泡上浮过程中表面震荡越厉害. 对于尺寸较大的气泡, 初始的形状系数 ε 越小, 则气泡在上浮过程中越容易形成向上的射流; 若射流穿透气泡, 则单联通域的气泡将演变成环状.

4.3 表面张力与黏性的影响

为了进一步探讨表面张力与黏性对气泡上浮的影响, 针对 $R_e = 1 \text{ mm}$ 的气泡在不同表面张力系数和不同黏性系数下的运动特性, 给出了如

图 16 所示的气泡上浮过程中形状系数的时历变化曲线. 可见表面张力系数越大, 则形状系数越小, 即越趋于球状, 这一点是容易理解的; 而当黏性系数越大, 形状系数越小, 气泡越趋于球状, 这是由于黏性变大之后气泡的上浮速度会变小 (如图 17 所示), 气泡上下表面受到的流体压力差随之减小, 使得气泡被压缩的程度降低, 形状系数减小.

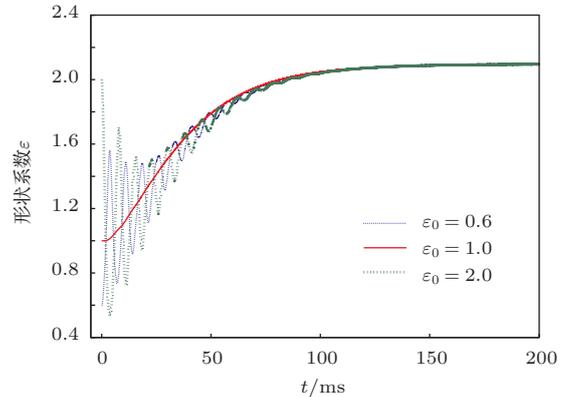


图 14 (网刊彩色) 不同初始条件的气泡形状系数时历变化曲线 ($R_e = 1 \text{ mm}$)

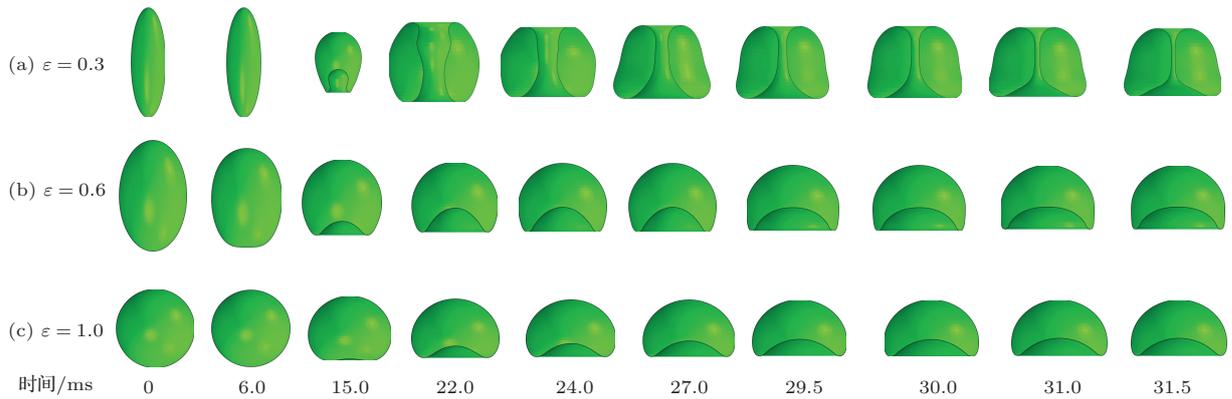


图 15 不同初始形态气泡上浮过程形态演化示意图 ($R_e = 4 \text{ mm}$)

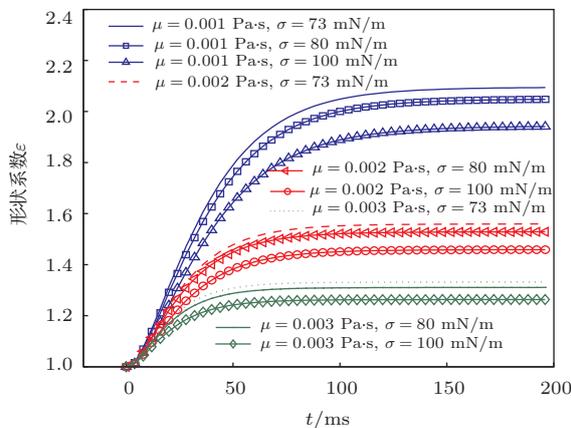


图 16 (网刊彩色) 不同黏性与表面张力系数下的气泡形状系数

图 17 所示为气泡上浮速度时历变化曲线, 可见黏性越大, 上浮速度越小, 这一点也是容易理解的; 表面张力系数越大, 上浮速度也会变大, 这是由于表面张力变大之后气泡的形状系数变小, 迎流面积变小, 阻力变小, 以至于气泡的上浮速度也会变大.

4.4 上浮气泡的融合现象

前面主要探讨的是单个上浮气泡的上浮特性, 而两个气泡的相互作用十分复杂, 影响因素也很多, 相关研究相对较少. 本文针对两个气泡的融合现象

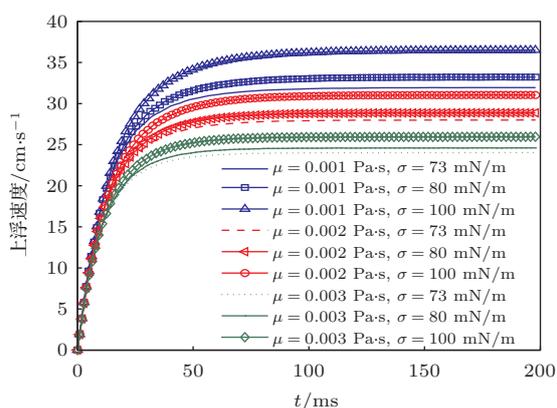


图 17 (网刊彩色) 不同黏性与表面张力系数下的气泡上浮速度

进行初步探究, 采用数值融合技术对文献 [8] 中的实验进行再现, 结果符合良好. 实验中观察到了两个气泡的融合现象, 气泡半径为 $R_e = 0.9$ mm, 两个气泡同时从两个管口释放后开始上浮, 上浮过程中相互靠近, 气泡之间的水膜厚度逐渐变薄, 直至临界厚度, 气泡融合. 试验中发现融合过程所需时

间小于 10^{-3} s, 融合之后气泡发生复杂的动力学行为, 但是由于摄影技术的限制, 并不能拍摄到气泡融合之后的细节. 由于文献中没有给出气泡初始间距, 本文数值计算中气泡初始间距设置为 2.16 mm, 两气泡从静止开始上浮, 上浮过程中逐渐靠拢、碰撞, 然后在数值计算中对两个气泡的网格进行处理. 若将气泡碰撞时刻设为零时刻, 则气泡融合之后的数值结果与实验对比如图 18 所示.

气泡融合之后, 气泡中间连接部位逐渐膨胀至比两端的截面积更大, 随之发生的是气泡两端形成朝向中间的对射流, 但是由于表面张力的原因, 射流并不能撞击到一起, 而是被弹回; $t = 6$ ms 时刻气泡水平宽度变小, 底部形成向上的凹陷; $t = 11$ ms 时刻气泡竖直方向上被压扁. 可见气泡在融合之后的很短时间内将会发生很复杂的现象, 本文的数值方法能够对气泡融合研究提供参考.

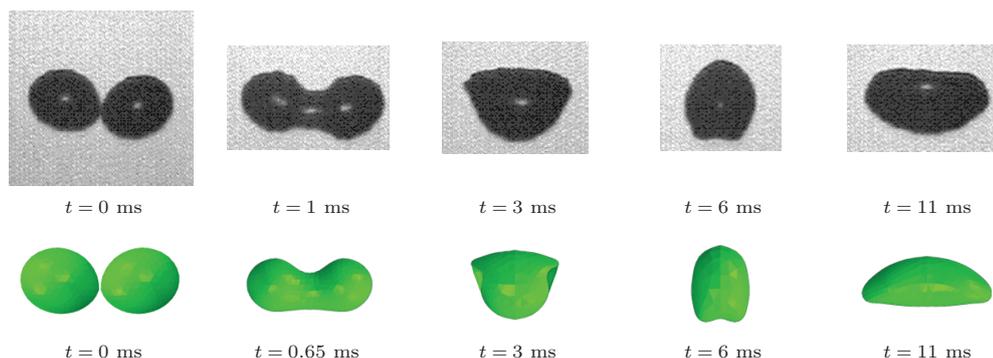


图 18 气泡融合过程 (实验结果来自文献 [8])

5 结 论

本文通过 Young-Laplace 方程和黏性耗散能量等效原理分别考虑了边界层内黏性在法向与切向的作用, 建立了轴对称和三维气泡边界元模型, 给出了黏性与表面张力的数值求解方法, 采用涡环模型以及数值手段模拟环状气泡, 同时提出了一种三维上浮气泡融合数值方法. 通过本文建立的数值模型模拟了气泡上浮过程中气泡的动力学行为, 研究了气泡上浮的影响因素, 包括气泡初始条件, 黏性和表面张力等, 同时将两个气泡的融合数值结果与实验对比, 符合良好. 通过对计算结果的分析, 得到以下结论.

1) 单个上浮气泡在短时间内从静止加速到

较大的上浮速度, 然后缓慢达到平衡速度, 等效半径在 0.9 mm 左右的气泡平衡速度最大; 当 $R_e < 0.9$ mm 时, 气泡上浮速度变化相对平滑, 当 $R_e \in [0.9, 2.0]$ mm, 上浮速度波动一段时间后会趋近平衡速度, 当 $R_e > 2$ mm 时, 气泡较难达到平衡速度.

2) 黏性与表面张力系数会影响气泡的上浮速度和形态特征, 对于同一气泡, 黏性越大, 平衡速度和形状系数 ϵ 越小, 气泡的阻力系数随 Re 增大呈先减后增的变化趋势; 表面张力越大, 平衡速度越大, 形状系数 ϵ 越小.

3) 初始形态对于气泡上浮前期的动力学行为影响很大, 但是对于尺寸较小的气泡而言, 初始形态对气泡后期运动没有影响; 但是对于尺寸较大的

气泡, 初始的形状系数 ε 越小, 则气泡在上浮过程中越容易形成向上的射流.

4) 两个上浮气泡融合之后, 气泡连接部位将迅速膨胀至比气泡两端更大, 随后气泡两端会发生对射流等复杂现象, 该数值模型可为研究气泡融合后的细节问题提供参考.

参考文献

- [1] Moore D W 1963 *J. Fluid Mech.* **16** 161
- [2] Moore D W 1965 *J. Fluid Mech.* **23** 749
- [3] Duineveld P C 1995 *J. Fluid Mech.* **292** 325
- [4] Raymond F, Rosant J M 2000 *Chem. Eng. Sci.* **55** 943
- [5] Zenit R, Magnaudet J 2008 *Phys. Fluids* **20** 061702
- [6] Wu M, Gharib M 2002 *Phys. Fluids* **14** 49
- [7] Amirnia S, de Bruyn J R, Bergougnou M A, Margaritis A 2013 *Chem. Eng. Sci.* **94** 60
- [8] Duineveld P C 1998 *In Fascination of Fluid Dynamics* (Berlin: Springer Netherlands) pp409–439
- [9] Sanada T, Sato A, Shiota M, Watanabe M 2009 *Chem. Eng. Sci.* **64** 2659
- [10] Grenier N, Antuono M, Colagrossi A, Touze L 2009 *J. Comput. Phys.* **228** 8380
- [11] Hua J, Lou J 2007 *J. Comput. Phys.* **222** 769
- [12] Hua J, Stene J F, Lin P 2008 *J. Comput. Phys.* **227** 3358
- [13] Chen R H, Tian W X, Su G H, Qiu S Z, Ishiwatari T, Oki Y 2011 *Chem. Eng. Sci.* **66** 5055
- [14] Wang H, Zhang Z Y, Yang Y M, Hu Y, Zhang H S 2008 *Chin. Phys. B* **17** 3847
- [15] Wang H, Zhang Z Y, Yang Y M, Zhang H S 2010 *Chin. Phys. B* **19** 026801
- [16] Wang Q X, Yeo K S, Khoo B C, Lam K Y 1996 *Theoret. Comput. Fluid Dyn.* **8** 73
- [17] Wang Q X, Yeo K S, Khoo B C, Lam K Y 1996 *Comput. Fluids* **25** 607
- [18] Klaseboer E, Hung K C, Wang C, Wang C W, Khoo B C, Boyce P, Debono S, Charlier H 2005 *J. Fluid Mech.* **537** 387
- [19] Rungsiyaphornrat S, Klaseboer E, Khoo B C, Yeo K S 2003 *Comput. Fluids* **32** 1049
- [20] Li Z R, Sun L, Zong Z, Jing D 2012 *Acta Mech.* **223** 2331
- [21] Lundgren T S, Mansour N N 1991 *J. Fluid Mech.* **224** 177
- [22] Lind S J, Phillips T N 2010 *J. Non-Newton. Fluid* **165** 852
- [23] Li S, Zhang A M 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 054705 (in Chinese) [李帅, 张阿漫 2014 物理学报 **63** 054705]
- [24] Klaseboer E, Manica R, Khoo B C, Derek Y C C 2011 *Eng. Anal. Bound. Elem.* **35** 489
- [25] Zhang A M, Ni B Y 2014 *Comput. Fluids* **92** 22
- [26] Newman J N 1977 *Marine Hydrodynamics* (1st Ed.) (London: MIT Press) p131
- [27] Yang W J, Yeh H C 1966 *AIChE J.* **12** 927
- [28] Best J P 1993 *J. Fluid Mech.* **251** 79
- [29] Lamb H 1932 *Hydrodynamics* (Cambridge: Cambridge University Press) p473
- [30] Joseph D D, Wang J 2004 *J. Fluid Mech.* **505** 365
- [31] Zhang A M, Yao X L 2008 *Chin. Phys. B* **17** 927
- [32] Wu G X 1991 *App. Ocean Res.* **13** 317
- [33] Best J P 1994 *Bubble Dynamics and Interface Phenomena* (Berlin: Springer) p405
- [34] Lee M, Klaseboer E, Khoo B C 2007 *J. Fluid Mech.* **570** 407
- [35] Malysa K, Krasowska M, Krzan M 2005 *Adv. Colloid Interfac.* **114** 205
- [36] Bhaga D, Weber M E 1981 *J. Fluid Mech.* **105** 61
- [37] Suñol F, González-Cinca R 2010 *Colloid. Surface. A* **365** 36
- [38] Haberman W L, Morton R K 1953 *An Experimental Investigation of the Drag and Shape of Air Bubbles Rising in Various Liquids* (Washington: David Taylor Model Basin Washington DC) p18
- [39] Clift R, Grace J R, Weber M E 1978 *Bubbles, Drops and Particles* (New York: Academic Press) p346
- [40] Batchelor G K 1967 *An introduction to fluid dynamics* (Cambridge: Cambridge University Press) p368
- [41] Loth E 2008 *Int. J. Multiphas. Flow* **34** 523
- [42] Khan A R, Richardson J F 1987 *Chem. Eng. Commun.* **62** 135

Dynamic behavior of rising bubble*

Li Shuai Sun Long-Quan Zhang A-Man[†]

(School of Shipbuilding Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China)

(Received 12 March 2014; revised manuscript received 10 April 2014)

Abstract

This study focuses on the dynamic behavior of rising bubble in water with taking surface tension and viscous effect into consideration. The Young-Laplace equation is adopted to obtain the viscous component of the normal stress, and the tangential component is evaluated by viscous correction pressure, which is based on viscous dissipation energy equivalence principle. Firstly, both axi-symmetric and three-dimensional model is established by employing boundary integral method. The validation of our model is confirmed by comparing the analytical results with the experimental results, and they are in good agreement with each other. Secondly, the shape and balanced velocity of millimetre-sized bubble are studied, and the influences of initial condition, surface tension and viscosity on the dynamic behaviour of the bubble are also discussed. Finally a numerical technic is put forward to handle the coalescence of two rising bubbles, which can show some detailed information about the coalescence process.

Keywords: rising bubble, viscous effect, balanced velocity, coalescence

PACS: 47.55.dd, 47.15.km, 47.11.Df

DOI: [10.7498/aps.63.184701](https://doi.org/10.7498/aps.63.184701)

* Project supported by the Excellent Scientists Fund of National Natural Science Foundation of China (Grant No. 51222904), Central Organization Department of Top Young Talent Support Program, and the National Defense Basic Scientific Research Project, China (Grant No. B2420133001).

[†] Corresponding author. E-mail: zhangaman@hrbeu.edu.cn