

# 光晶格势阱中二元凝聚体的矢量孤子的振荡和分裂

何章明<sup>1)†</sup> 张志强<sup>2)</sup> 朱善华<sup>1)</sup> 柳闻鹃<sup>1)</sup>

1)(湖南工业大学理学院, 株洲 412007)

2)(郑州科技学院基础教学部, 郑州 450064)

(2014年3月20日收到; 2014年5月29日收到修改稿)

考虑外部囚禁势阱为光晶格势阱, 研究了二元玻色-爱因斯坦凝聚体中亮-亮孤子的动力学行为. 结果表明, 亮-亮孤子的运动方向和振荡行为可以分别通过调节光晶格势阱的晶格常数和势阱深度来控制. 进一步地, 亮-亮孤子还可以被局域在光晶格势阱中, 并且随着势阱深度的增加, 局域孤子会产生分裂行为.

**关键词:** 二元玻色-爱因斯坦凝聚, 亮-亮孤子, 光晶格势阱

**PACS:** 05.45.Yv, 03.75.Mn, 03.75.Lm

**DOI:** 10.7498/aps.63.190502

## 1 引言

实验成功观察到二元玻色-爱因斯坦凝聚体(BEC)吸引了人们对二元BEC中的位相分离<sup>[1]</sup>、自旋和冲击波<sup>[2]</sup>、对称破缺转变<sup>[3]</sup>、矢量孤子(如亮-亮、暗-暗和亮-暗孤子)<sup>[4-16]</sup>等展开大量的研究. 随着实验技术的进步, 二元BEC可被载入光晶格势阱中<sup>[17]</sup>. 光晶格势阱是利用两束或者两束以上的激光相干叠加形成具有空间周期性的外部囚禁势阱, 其晶格常数和势阱深度可以分别通过改变激光的传播角度和强度来调节. 与传统的简谐势阱相比, 光晶格势阱提供了更多的可调参数. 因此, 光晶格势阱中的二元凝聚体是目前BEC领域的研究热点之一.

研究表明, 光晶格势阱中二元BEC的亮-暗孤子总是周期性的产生和消失<sup>[18]</sup>. 给它们再加上简谐势阱后, 即亮-暗孤子被囚禁在一个复合势阱里面, 它们可以产生周期性振荡行为. 对于局限于光晶格势阱中暗-暗孤子, 它们展示出有趣的准周期振荡行为, 经历一个横向不稳定之后, 它们还可以转变成涡旋结构<sup>[19]</sup>. 二元BEC中的亮-亮孤子在

实现原子激光等方面有潜在的应用价值<sup>[20]</sup>. 如果二元BEC中的亮-亮孤子能够在传播过程中保持稳定, 那么BEC这一新物质波的具体应用就为期不远了. 而实现BEC中孤子稳定传播的途径之一就是BEC局限于不同的外部势阱中. 所以, 我们在此考虑外部囚禁势阱为光晶格势阱, 研究了二元BEC中亮-亮孤子的传播性质. 结果发现亮-亮孤子的运动方向和振荡行为可以分别通过调节光晶格势阱的晶格常数和势阱深度来控制. 当势阱深度非常低的时候, 亮-亮孤子还可以被局域在光晶格势阱中, 并保持稳定. 随着势阱深度的增加, 每个局域的孤子会产生分裂行为.

## 2 光晶格势阱中二元BEC的理论模型

我们首先考虑凝聚体形成在复合势阱中

$$V_{\text{ext}}^{(i)}(X, Y, Z) = E_0 \cos\left(\frac{2\pi X}{d}\right)$$

† 通讯作者. E-mail: [hez1982@163.com](mailto:hez1982@163.com)

$$+ \frac{M_i}{2} [\omega_{\perp(i)}^2 (Y^2 + Z^2) + \omega_{ii}^2 X^2], \quad (1)$$

其中  $E_0$  和  $d$  分别是势阱深度和晶格常数, 并有  $d = \lambda_L/2$  ( $\lambda_L$  是激光的波长);  $\omega_{\perp(i)}$  和  $\omega_{ii}$  分别表示简谐势阱的轴向和横向囚禁频率,  $M_i$  代表第  $i$  组分中原子的质量 ( $i = 1, 2$ ). 当满足  $\omega_{\perp(i)} \gg \omega_{ii}$  ( $i = 1, 2$ ) 时, 二元 BEC 的性质可由一组 Gross-Pitaevskii 方程来描述 [21–35]

$$\begin{aligned} & i\hbar \frac{\partial \Psi_1(X, T)}{\partial T} \\ &= \left[ -\frac{\hbar^2}{2M_1} \frac{\partial^2}{\partial X^2} + 2\hbar\omega_{\perp(1)} a_1 N_1 |\Psi_1|^2 \right. \\ & \quad + \frac{\hbar\omega_{\perp(1)} M_1 a_{12} N_1}{M} |\Psi_2|^2 \\ & \quad \left. + E_0 \cos\left(\frac{2\pi X}{d}\right) + \frac{M_1 \omega_{11}^2}{2} X^2 \right] \Psi_1, \quad (2a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & i\hbar \frac{\partial \Psi_2(X, T)}{\partial T} \\ &= \left[ -\frac{\hbar^2}{2M_2} \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{2\hbar\omega_{\perp(1)} M_1 a_2 N_2}{M_2} |\Psi_2|^2 \right. \\ & \quad + \frac{\hbar\omega_{\perp(1)} M_1 a_{12} N_2}{M} |\Psi_1|^2 \\ & \quad \left. + E_0 \cos\left(\frac{2\pi X}{d}\right) + \frac{M_2 \omega_{22}^2}{2} X^2 \right] \Psi_2, \quad (2b) \end{aligned}$$

其中  $\Psi_i$  表示  $i$  组分的宏观波函数, 并满足  $\int dr |\Psi_i(r)|^2 = N_i$  ( $i = 1, 2$ ,  $N_i$  是  $i$  组分中的原子数目). (2) 式中,  $a_i$  和  $a_{12}$  分别代表双组分凝聚体的种内和种间  $S$ -波散射长度 ( $i = 1, 2$ ). 随后, 引入无量纲参量  $X = a_{\perp} x$ ,  $T = 2t/\omega_{\perp(1)}$ ,  $\psi_i = a_{\perp} \phi_i$ , 此处  $a_{\perp} = \sqrt{\hbar/M_i \omega_{\perp(1)}}$ , 表示凝聚体的横向振动长度. 将无量纲参量代入 (2) 式中, 有

$$\begin{aligned} & i \frac{\partial \psi_1}{\partial t} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + g_{11} |\psi_1|^2 \psi_1 - g_{12} |\psi_2|^2 \psi_1 \\ & - \left[ V_0 \cos(2\omega x) + \frac{\omega_{11}^2}{\omega_{\perp(1)}^2} x^2 \right] \psi_1 = 0, \quad (3a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & i \frac{\partial \psi_2}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + \varepsilon g_{22} |\psi_2|^2 \psi_2 - \varepsilon g_{21} |\psi_1|^2 \psi_2 \\ & - \left[ V_0 \cos(2\omega x) + \frac{\omega_{22}^2}{\varepsilon \omega_{\perp(1)}^2} \right] x^2 \psi_2 = 0, \quad (3b) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \varepsilon &= M_1/M_2, \\ g_{ii} &= -4a_i N_i/a_{\perp} (i = 1, 2), \\ g_{12} &= 2a_{12} M_1 N_1/(M a_{\perp}), \\ g_{21} &= 2a_{12} M_2 N_2/(M a_{\perp}). \end{aligned}$$

势阱深度和晶格常数分别是  $V_0 = 2E_0/[\hbar\omega_{\perp(1)}]$  和  $\omega = \pi a_{\perp}/d$ . 我们在此考虑简谐势阱的横向囚禁频率  $\omega_{11} = \omega_{22} = 0$ , 即双组分凝聚体被囚禁在一维纯光晶格势阱里.

### 3 光晶格势阱中的亮亮孤子

基于目前的实验条件, 考虑双组分凝聚体由  $^7\text{Li}$  和  $^{39}\text{K}$  组成, 其中组分一是  $^7\text{Li}$  原子, 组分二是  $^{39}\text{K}$  原子. 选取每个组分中的原子数为  $N_1 = N_2 = 2000$ , 考虑  $^7\text{Li}$  原子之间的相互作用是相互吸引,  $^{39}\text{K}$  原子之间的相互作用也是相互吸引, 而  $^7\text{Li}$  原子与  $^{39}\text{K}$  原子之间的耦合作用是相互排斥. 相应的  $S$ -波散射长度分别选取为  $a_1 = -25a_B$ ,  $a_2 = -139a_B$ ,  $a_{12} = 42.4a_B$  ( $a_B$  是玻尔半径). 简谐势阱的轴向囚禁频率分别为  $\omega_{\perp(1)} = 2\pi \times 100$  Hz 和  $\omega_{\perp(2)} = 35.9\pi$  Hz. 无量纲化后的单位时间和单位长度对应于实际物理量分别是 3.2 ms 和 1.6  $\mu\text{m}$ . 由于这种情况下方程 (3) 是一个不可积系统, 目前难以解析求解, 因此我们使用数值模拟其中亮-亮孤子的传播特性 [24]. 选取的初始条件为

$$\psi_i(x, 0) = \text{sech}(x - x_i) \exp(2ic_i x), \quad (4)$$

其中  $x_i$  和  $c_i$  都是常数,  $i = 1, 2$ .

为了研究光晶格势阱对孤子运动方向的影响, 选取每个孤子的初始速度都为零 ( $c_1 = c_2 = 0$ ), 势阱的深度为  $V_0 = 0.5$ . 不同晶格常数下, 孤子的传播性质如图 1 所示. 当晶格常数  $\omega = 0.5$  时, 从图 1 (a) 和 (b) 看到, 在初始时刻组分一孤子位于  $x_1 = 6.0$ , 而组分二孤子位于  $x_2 = -6.0$ . 随着时间的推移, 组分一孤子沿着  $x$  轴的负方向运动, 组分二孤子沿着  $x$  轴的正方向运动. 期间, 每个孤子的幅度先减小后增加, 每个孤子宽度是先增加后减小. 当晶格常数  $\omega = 0.6$  时, 从图 1 (c) 和 (d) 看到, 在初始时刻组分一孤子仍然位于  $x_1 = 6.0$ , 组分二孤子位于  $x_2 = -6.0$ . 而随着时间的推移, 两个孤子各自的运动方向与晶格常数  $\omega = 0.5$  时相反, 组分一孤子沿着  $x$  轴的正方向运动, 组分二孤子沿着  $x$  轴的负方向运动. 而期间每个孤子的幅度和宽度的变化跟  $\omega = 0.5$  时一样. 从图 1 中我们可得出亮-亮孤子的运动方向可通过调节晶格常数来控制.

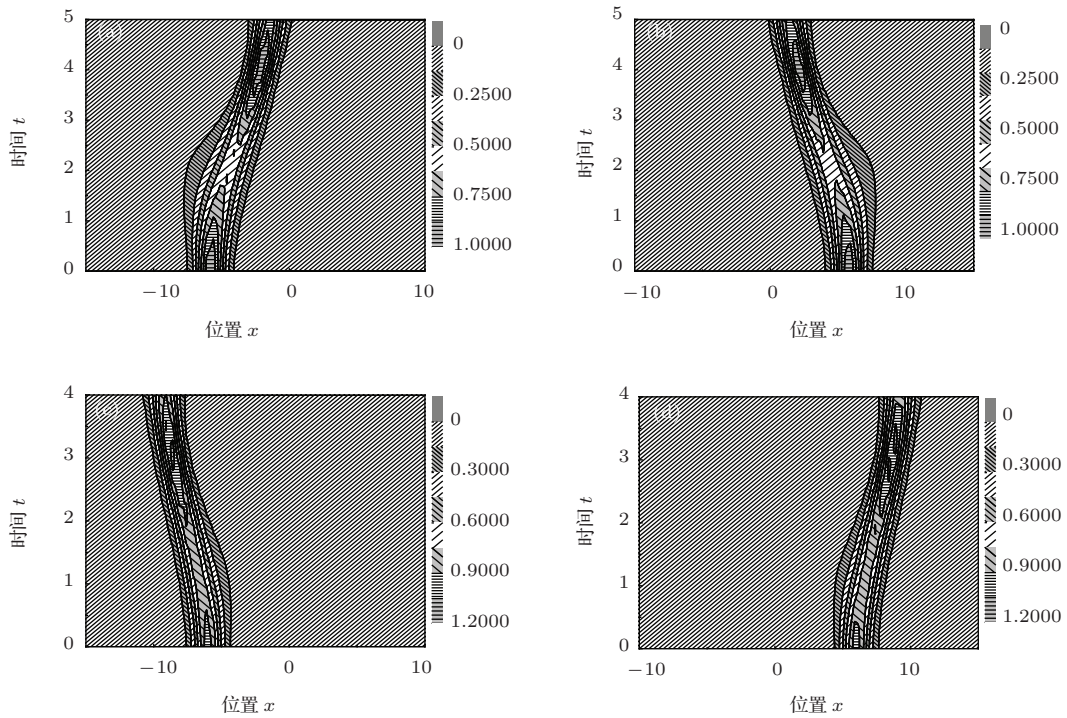


图1 不同晶格常数下孤子的传播性质, 其中晶格常数 (a) 和 (b)  $\omega = 0.5$ , (c) 和 (d)  $\omega = 0.6$  (其他参数  $x_1 = 6.0$ ,  $x_2 = -6.0$ ,  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = 0$ ,  $V_0 = 0.5$ ); (a) 和 (b) 表示组分二, (c) 和 (d) 表示组分一

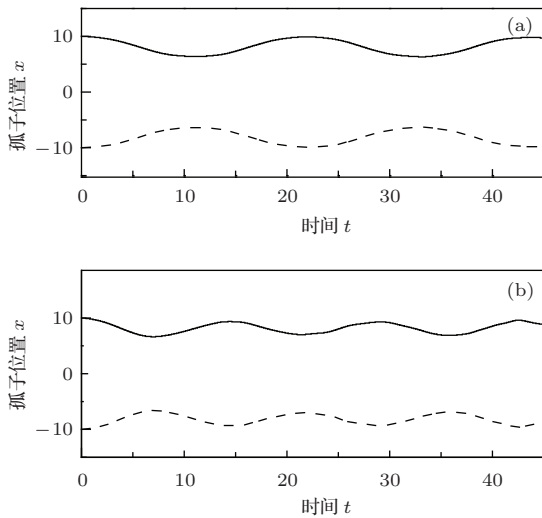


图2 孤子的中心位置随时间演化. 其中势阱深度 (a)  $V_0 = 0.1$ , (b)  $V_0 = 0.2$ , 参数  $x_1 = 10.0$ ,  $x_2 = -10.0$ ,  $\omega = 0.58$  (其他参数与图1一致, 实线和虚线分别代表组分一和二)

为了研究光晶格势阱深度的改变对孤子传播性质的影响, 考虑晶格常数  $\omega = 0.58$ , 选取每个孤子的初始速度都为零, 即  $c_1 = c_2 = 0$ . 在不同势阱深度下, 孤子的中心位置随时间的演化如图2所示. 当势阱深度  $V_0 = 0.1$  时, 从图2(a)中看到, 在初始时刻组分一孤子位于  $x_1 = 10.0$  处, 而组分二孤子位于  $x_2 = -10.0$  处. 随着时间从0 推移到11, 组分

一孤子沿着  $x$  轴的负方向运动, 组分二孤子沿着  $x$  轴的正方向运动. 而当时间从11变化到22时, 组分一孤子沿着  $x$  轴的正方向运动, 组分二孤子沿着  $x$  轴的正负方向运动. 在时间  $t \approx 22$  时刻, 组分一和二的孤子又分别回到了  $x_1 = 10.0$  和  $x_2 = -10.0$  处. 同样的现象在其他相同时间段内也能被观察到, 这表明孤子在光晶格势阱中产生了周期性的振荡. 孤子的振荡周期是  $t \approx 22$ . 当势阱深度  $V_0 = 0.2$  时, 孤子同样产生了一个周期振荡行为, 与  $V_0 = 0.1$  不同是, 振荡周期发生了变化  $t \approx 15$ , 如图2(b)所示. 图2中结果表明, 孤子可以在光晶格势阱中产生周期性的振荡行为, 且孤子的振荡周期可通过势阱深度来控制.

为了进一步研究势阱深度变化对孤子性质的影响, 我们这里选取晶格常数  $\omega = 0.53$ , 同样选取每个孤子的初始速度都为零, 即  $c_1 = c_2 = 0$ . 在不同势阱高度下, 孤子的传播性质如图3所示. 当势阱深度  $V_0 = 0.01$  时, 即孤子局限在一个非常弱的光晶格势阱中, 从图3(a)和(b)看到, 每个孤子的幅度、宽度、位置都没有随时间的推移而发生改变. 因此, 孤子可以在弱光晶格势阱里保持局域稳定. 这种局域稳定的亮-亮孤子在原子激光方面有潜在的应用价值. 而当势阱深度增加到  $V_0 = 0.5$  时, 从图3(c)和(d)看到, 随时间从0变化到3, 每个孤子

仍然分别被局域在  $x_1 = 6.0$  和  $x_2 = -6.0$  处. 但是每个孤子的幅度随着时间的增加而减小, 孤子的宽度随着时间的增加而变大. 随着时间的进一步增加, 我们有趣的发现, 每个孤子都分裂成了两个, 且每个孤子分裂后产生的两个孤子之间的距离随时

间的增加而变大. 与 BEC 中可通过调节  $S$ -波散射长度随时间作周期性变化来控制孤子的分裂和融合不同的是 [36], 这是由于外部囚禁势阱的作用而导致孤子的分裂行为, 从而我们可以通过调节光晶格势阱深度来控制亮-亮孤子的分裂.

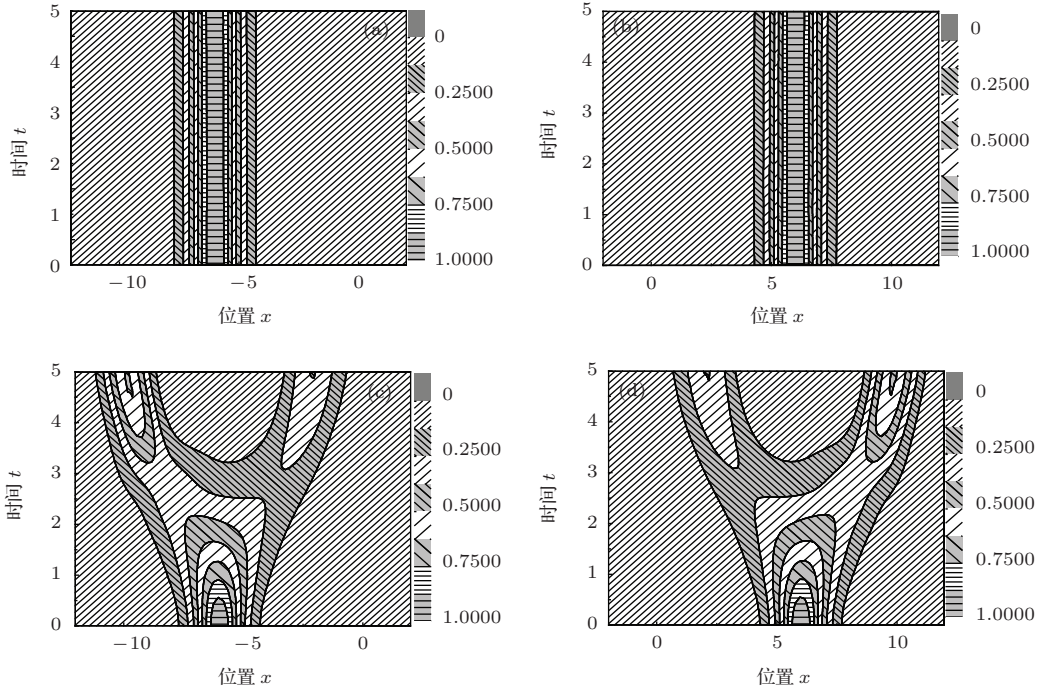


图3 不同势阱深度下孤子的传播性质. 其中势阱高度 (a) 和 (b)  $V_0 = 0.01$ , (c) 和 (d)  $V_0 = 0.5$ , 其他参数与图1一致, (a) 和 (c) 代表组分二, (b) 和 (d) 表示组分一

## 4 结 论

总之, 考虑二元 BEC 囚禁于光晶格势阱中, 我们数值研究了其中亮-亮孤子的动力学行为. 结果表明, 亮-亮孤子的运动方向可通过调节光晶格势阱的晶格常数来控制. 亮-亮孤子在光晶格势阱中还可以产生周期性的振荡, 其振荡的周期可通过调节势阱深度来控制. 进一步地, 当势阱深度非常低的时候, 亮-亮孤子可以被局域在光晶格势阱中, 这种局域稳定的亮-亮孤子在原子激光方面有潜在的应用价值. 此外, 随着势阱深度的增加, 每个局域的孤子会产生分裂行为. 我们相信这些有趣的结果还会为实验操控二元 BEC 中的孤子提供有益的参考价值.

## 参考文献

[1] Sabbatini J, Zurek W H, Davis M J 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 230402

[2] Lewandowski H J, Harber D M, Whitaker D L, Cornell E A 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 070403  
 [3] Lee C H 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 070401  
 [4] Zhang X F, Hu X H, Liu X X, Liu W M 2009 *Phys. Rev. A* **79** 033630  
 [5] Liu X X, Pu H, Xiong B, Liu W M, Gong J B 2009 *Phys. Rev. A* **79** 013423  
 [6] Pu H, Bigelow N P 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 1134  
 [7] Huang G X, Li X Q, Szeftel J 2004 *Phys. Rev. A* **69** 065601  
 [8] Wang D S, Hu X H, Liu W M 2010 *Phys. Rev. A* **82** 023612  
 [9] Yu H Y, Pan L X, Yan J R, Tang J Q 2009 *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **42** 025301  
 [10] Luo M, Bao C G, Li Z B 2008 *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **41** 245301  
 [11] Liu X X, Zhang X F, Zhang P 2010 *Chin. Phys. Lett.* **27** 070306  
 [12] Yan J R, Pan L X, Yu H Y, Ao S M 2009 *Chin. Phys. Lett.* **26** 090301  
 [13] Li L, Malomed B A, Mihalache D, Liu W M 2006 *Phys. Rev. E* **73** 066610  
 [14] Cheng Y S 2009 *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **42** 205005  
 [15] Xiong B, Gong J B 2010 *Phys. Rev. A* **81** 033618

- [16] Xuan H N, Zuo M 2011 *Commun. Theor. Phys.* **56** 1035  
 [17] Morsch O, Oberthaler M 2006 *Rev. Mod. Phys.* **78** 179  
 [18] Shrestha U, Javanainen J, Ruostekoski J 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 190401  
 [19] Hammer C, Chang J J, Engels P, Hofer M A 2011 *Phys. Rev. Lett.* **106** 065302  
 [20] He Z M, Wang D L, Ding J W, Yan X H 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 230508 (in Chinese) [何章明, 王登龙, 丁建文, 颜晓红 2012 物理学报 **61** 230508]  
 [21] Li L, Li Z D, Malomed B A, Mihalache D, Liu W M 2005 *Phys. Rev. A* **72** 033611  
 [22] Zhao L C, He S L 2011 *Phys. Lett. A* **375** 3017  
 [23] Wen L, Liu W M, Cai Y, Zhang J M, Hu J 2012 *Phys. Rev. A* **85** 043602  
 [24] He Z M, Wang D L, Ding J W, Yan X H 2012 *Eur. Phys. J. D* **66** 139  
 [25] Chen Z, Wu B 2010 *Phys. Rev. A* **81** 043611  
 [26] Wu L, Li L, Zhang J F 2009 *Phys. Rev. A* **80** 013617  
 [27] Xue J K, Peng P 2006 *Chin. Phys.* **15** 1149  
 [28] Zhang C W, Liu J, Raizen M G, Niu Q 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 054101  
 [29] Huang G X, Velarde M G, Makarov V A 2001 *Phys. Rev. A* **64** 013617  
 [30] Huang G X 2004 *Chin. Phys.* **13** 1866  
 [31] Wang S J, Jia C L, Zhao D, Luo H G, An J H 2003 *Phys. Rev. A* **68** 015601  
 [32] Zhang X F, Yang Q, Zhang J F, Chen X Z, Liu W M 2008 *Phys. Rev. A* **77** 023613  
 [33] Wu B, Liu J, Niu Q 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 034101  
 [34] Li Z D, Li QY, Li L, Liu W M 2007 *Phys. Rev. E* **76** 026605  
 [35] Li Z D, Li Q Y, He P B, Bai Z G, Sun Y B 2007 *Ann. Phys.* **322** 2945  
 [36] He Z M, Wang D L, Zhang W X, Wang F J, Ding J W 2008 *Chin. Phys. Lett.* **25** 3158

## Oscillation and fission behavior of bright-bright solitons in two-species Bose-Einstein condensates trapped in an optical potential

He Zhang-Ming<sup>1)†</sup> Zhang Zhi-Qiang<sup>2)</sup> Zhu Shan-Hua<sup>1)</sup> Liu Wen-Juan<sup>1)</sup>

1) (College of Science, Hunan University of Technology, Zhuzhou 412007, China)

2) (Department of Basic Course, Zhengzhou College of Science & Technology, Zhengzhou 450064, China)

( Received 20 March 2014; revised manuscript received 29 May 2014 )

### Abstract

We have studied the dynamic behavior of bright-bright solitons in two-species Bose-Einstein condensates trapped in an optical lattice. It is shown that the directions of motion and oscillations of the bright-bright solitons can be effectively controlled by adjusting the lattice spacing and height, respectively. Especially, two separated solitons can be localized in the optical lattice, and the fission of each localized soliton is newly observed due to the increase of the lattice height.

**Keywords:** two-species Bose-Einstein condensates, bright-bright solitons, optical potential

**PACS:** 05.45.Yv, 03.75.Mn, 03.75.Lm

**DOI:** 10.7498/aps.63.190502

† Corresponding author. E-mail: [hez1982@163.com](mailto:hez1982@163.com)