

微结构固体中的孤立波及其存在条件*

那仁满都拉†

(内蒙古民族大学物理与电子信息学院, 通辽 028043)

(2014年4月1日收到; 2014年5月11日收到修改稿)

根据 Mindlin 理论, 考虑宏观尺度非线性效应、二次和三次微尺度非线性效应以及微尺度频散效应, 建立了描述一维微结构固体中纵波传播的一种新模型. 用动力系统定性分析理论, 分析了微结构固体中孤立波的存在条件及其几何特征, 证明了当介质参数和孤立波传播速度满足适当条件时, 在二次微尺度非线性效应的影响下微结构固体中可以形成一种非对称孤立波, 在三次微尺度非线性效应的影响下微结构固体中可以形成一种对称孤立波. 最后, 用数值方法进一步验证了上述结论.

关键词: 微结构固体, 孤立波, 存在条件, 几何特征

PACS: 43.25.Rq, 46.40.cD, 02.90.+p

DOI: 10.7498/aps.63.194301

1 引言

随着科学技术的发展人们越来越关注微晶、合金、岩石、陶瓷以及功能梯度材料等微结构固体材料中波传播问题的研究. 这是因为当今科学技术中所使用的一些高频波的波长与这些材料的微结构尺寸有相同的量级, 所以微结构尺寸效应对波场产生了不可忽视的影响. 这迫使人们研究这些材料的微结构尺寸效应. 由于经典的连续介质理论不能对这些材料的力学行为给出准确的描述, 近年来人们提出了若干描述微结构固体变形与运动的理论和模型^[1-5], 并开始研究了微观结构固体中波传播问题^[6-10]. 微结构固体中孤立波形成与传播问题的研究对固体材料的无损检测与评价具有重要意义. 因为孤立波在微结构固体中传播时, 其形状、幅度以及传播速度中携带着反映固体材料内部结构特征的重要信息, 这可能提供对固体材料进行检测与评价的一种重要手段. 在文献^[11]中已明确提出并严格证明了利用微结构固体中形成的孤立波所携带的信息可以确定固体材料的微结构参数. 文献^[12-14]中分析了 Ablowitz Ladik 系统、非线性

薛定谔方程和耦合 KdV 方程的孤立子解及其存在与稳定性问题. 文献^[15]对分数阶 Lorenz 类系统的复杂动力学行为进行研究并证明了解的存在性与惟一性.

微结构固体材料由于它们普遍存在的孔隙、位错、颗粒、裂纹及裂缝等微结构上的不均匀性, 当我们的观测尺度接近材料的微结构尺寸时, 它们可表现出与经典的均匀材料很大不同的行为特征, 如微尺度非线性效应、频散效应和耗散效应等. 文献^[16]中的实验研究也证实了微尺度效应的存在. 因此, 研究微结构固体材料中波传播问题时, 必须考虑不同尺度上的各种效应. 文献^[6]中基于 Mindlin 理论^[1], 建立了考虑宏观尺度非线性效应、二次微尺度非线性效应和微尺度频散效应的一种模型, 并利用此模型证明了微结构固体中可以存在一种非对称孤立波且给出了孤立波的存在条件.

本文在文献^[6]的基础上, 将建立考虑二次和三次微尺度非线性效应的一种新模型. 用动力系统定性分析方法和数值方法, 分析在二次或三次微尺度非线性效应的影响下微结构固体中可能形成的孤立波及其存在条件.

* 国家自然科学基金(批准号: 10862003)和内蒙古民族大学科研创新团队建设计划资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: nrmdtl@126.com

2 模型的建立

描述微结构固体中纵波传播的一维运动方程为 [6,7]

$$\rho u_{tt} = \sigma_x, \quad I\psi_{tt} = \eta_x - \tau, \quad (1)$$

这里 u 表示宏观位移, σ 表示宏观应力, ψ 表示微形变, η 表示相应的微应力, τ 表示微元体间的相互作用力, ρ 和 I 是宏观密度和微惯性. 对于一些特殊的固体材料, 考虑它的宏观尺度非线性效应之外, 还考虑二次和三次微尺度非线性效应以及微尺度频散效应, 而忽略耗散效应, 则自由能的最简单形式可写为

$$w = \frac{1}{2}au_x^2 + \frac{1}{2}B\psi^2 + \frac{1}{2}C\psi_x^2 + D\psi u_x + \frac{1}{6}Nu_x^3 + \frac{1}{6}M\psi^3 + \frac{1}{12}Q\psi_x^4, \quad (2)$$

这里 a, B, C, D, M, N 和 Q 都是常量. 当 $Q = 0$ 时, (2) 式就是文献 [6, 7, 11] 中使用的自由能函数; 当 $M = 0$ 时, (2) 式表示一种各向同性且中心对称 (因为根据 Mindlin 理论, 各向同性且中心对称的固体材料自由能的表达式中不能出现奇阶张量项) 的特殊固体材料的自由能的最简单形式. 利用应力计算公式

$$\sigma = \frac{\partial w}{\partial u_x}, \quad \eta = \frac{\partial w}{\partial \psi_x}, \quad \tau = \frac{\partial w}{\partial \psi}, \quad (3)$$

计算出应力, 并代入方程 (1) 可得

$$\begin{aligned} \rho u_{tt} &= au_{xx} + Nu_x u_{xx} + D\psi_x, \\ I\psi_{tt} &= C\psi_{xx} + M\psi_x \psi_{xx} + Q\psi_x^2 \psi_{xx} \\ &\quad - B\psi - Du_x. \end{aligned} \quad (4)$$

引入无量纲变量 $X = x/L, T = tc_0/L$ ($c_0^2 = a/\rho$), $U = u/U_0$ 及几何参数 $\delta = l^2/L^2$ 和 $\varepsilon = U_0/L$ (这里 U_0 和 L 是初始激励波的波幅和波长, 而 l 是材料微结构尺寸参数), 则把方程 (4) 化成如下无量纲方程:

$$\begin{aligned} U_{TT} &= U_{XX} + \frac{D}{\rho\varepsilon c_0^2}\psi_X + \frac{N\varepsilon}{\rho c_0^2}U_X U_{XX}, \\ \psi &= -\frac{D\varepsilon}{B}U_X + \frac{\delta}{B}\left(\frac{C}{l^2}\psi_{XX} - \frac{aI}{\rho l^2}\psi_{TT}\right) \\ &\quad + \delta^{3/2}\frac{M}{Bl^3}\psi_X \psi_{XX} + \delta^2\frac{Q}{Bl^4}\psi_X^2 \psi_{XX}. \end{aligned} \quad (5)$$

把 ψ 展开为 $\delta^{1/2}$ 的幂级数得

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_0 + \delta^{1/2}\psi_1 + \delta\psi_2 \\ &\quad + \delta^{3/2}\psi_3 + \delta^2\psi_4 + \dots \end{aligned} \quad (7)$$

比较 (6) 和 (7) 式得

$$\begin{aligned} \psi_0 &= -\frac{D\varepsilon}{B}U_X, \quad \psi_1 = 0, \\ \psi_2 &= \frac{1}{B}\left(\frac{C}{l^2}\psi_{XX} - \frac{aI}{\rho l^2}\psi_{TT}\right), \\ \psi_3 &= \frac{M}{Bl^3}\psi_X \psi_{XX}, \quad \psi_4 = \frac{Q}{Bl^4}\psi_X^2 \psi_{XX}. \end{aligned}$$

根据从属原理 (slaving principle) [6,8], 把近似关系 $\psi = -\frac{D\varepsilon}{B}U_X$ 代入 ψ_2, ψ_3, ψ_4 的表达式中可得

$$\begin{aligned} \psi_2 &= \frac{D\varepsilon}{B^2}\left(\frac{aI}{\rho l^2}U_{XTT} - \frac{C}{l^2}U_{XXX}\right), \\ \psi_3 &= \frac{MD^2\varepsilon^2}{B^3l^3}U_{XX}U_{XXX}, \\ \psi_4 &= -\frac{D^3Q\varepsilon^3}{B^4l^4}U_{XX}^2 U_{XXX}. \end{aligned}$$

此时, 由 (7) 式得

$$\begin{aligned} \psi &= -\frac{D\varepsilon}{B}U_X + \delta\frac{D\varepsilon}{B^2}\left(\frac{aI}{\rho l^2}U_{XTT} - \frac{C}{l^2}U_{XXX}\right) \\ &\quad + \delta^{3/2}\frac{MD^2\varepsilon^2}{B^3l^3}U_{XX}U_{XXX} \\ &\quad - \delta^2\frac{QD^3\varepsilon^3}{B^4l^4}U_{XX}^2 U_{XXX}. \end{aligned} \quad (8)$$

把 (8) 式, 代入方程 (5) 得

$$\begin{aligned} U_{TT} - bU_{XX} - \frac{\mu}{2}(U_X^2)_X - \delta(\beta U_{TT} - \gamma U_{XX})_{XX} \\ + \delta^{3/2}\frac{\lambda}{2}(U_{XX}^2)_{XX} - \delta^2\frac{\chi}{3}(U_{XX}^3)_{XX} = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

这里 $b = 1 - D^2/aB, \mu = N\varepsilon/a, \beta = D^2I/l^2\rho B^2, \gamma = D^2C/l^2aB^2, \lambda = -D^3M\varepsilon/l^3aB^3, \chi = -D^4Q\varepsilon^2/l^4aB^4$, 且 $0 < b < 1, \delta > 0, \beta > 0, \gamma > 0$. 方程 (9) 是本文得到的考虑二次和三次微尺度非线性效应的一种新模型. 当 $\lambda = \chi = 0$ 时, 方程 (9) 变成不考虑微尺度非线性效应的波方程; 当 $\chi = 0$ 时, 方程 (9) 就变成文献 [6] 中得到的非线性波方程. 借助应变 $v = U_X$, 把方程 (9) 改写为 (这里已把大写的 X 和 T 直接改写为小写的 x 和 t)

$$\begin{aligned} v_{tt} - bv_{xx} - \frac{\mu}{2}(v^2)_{xx} - \delta(\beta v_{tt} - \gamma v_{xx})_{xx} \\ + \delta^{3/2}\frac{\lambda}{2}(v_x^2)_{xxx} - \delta^2\frac{\chi}{3}(v_x^3)_{xxx} = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

方程 (10) 中, $\frac{\mu}{2}(v^2)_{xx}$ 是宏观尺度非线性项, $\delta(\beta v_{tt} - \gamma v_{xx})_{xx}$ 是微尺度频散项, $\delta^{3/2}\frac{\lambda}{2}(v_x^2)_{xxx}$ 是二次微尺度非线性项, $\delta^2\frac{\chi}{3}(v_x^3)_{xxx}$ 是三次微尺度非线性项.

3 微结构固体中的孤立波及其存在条件

为了便于分析, 首先对方程 (10) 作如下变换:

$$v = \frac{2b}{\mu}u', \quad x' = \frac{1}{\sqrt{\delta\beta}}x, \quad t' = \sqrt{\frac{b}{\delta\beta}}t, \quad (11)$$

代入方程 (10) 计算可得 (下式中已把 u', x', t' 改写为 u, x, t)

$$u_{tt} - u_{xx} - (u^2)_{xx} - u_{ttxx} + \alpha_1 u_{xxxx} + \alpha_2 (u_x^2)_{xxx} - \alpha_3 (u_x^3)_{xxx} = 0, \quad (12)$$

这里 $\alpha_1 = \frac{\gamma}{b\beta} > 0$, $\alpha_2 = \frac{\lambda}{\mu}\beta^{-\frac{3}{2}}$, $\alpha_3 = \frac{4\chi b}{3\mu^2}\beta^{-2}$. 由于方程 (12) 是一种不可积的非线性波方程, 所以很难得到该方程的显示精确解. 为此, 本文用定性分析方法和数值方法来分析微结构固体中的孤立波及其存在条件. 为了以后的分析比较, 这里先给出 $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ 时, 波方程 (12) 的孤立波解. 此解为 [17]

$$u = \frac{3}{2}(V^2 - 1)\text{sech}^2[K(x - Vt)], \quad (13)$$

这里 $K = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{V^2 - 1}{V^2 - \alpha_1}}$, V 是任意波速. 这是不考虑微尺度非线性效应时, 由于宏观尺度非线性效应和微尺度频散效应的平衡而形成的一种对称钟型孤立波.

3.1 二次微尺度非线性效应影响下形成的孤立波及其存在条件

当 $\alpha_3 = 0$ (即 (2) 式中 $Q = 0$) 时, 方程 (12) 变成

$$u_{tt} - u_{xx} - (u^2)_{xx} - u_{ttxx} + \alpha_1 u_{xxxx} + \alpha_2 (u_x^2)_{xxx} = 0. \quad (14)$$

方程 (14) 就是文献 [6] 得到的非线性波方程, 此方程体现了二次微尺度非线性效应. 对方程 (14) 进行行波约化 $\xi = x - Vt$, $u = u(\xi)$ 可得

$$V^2 u_{\xi\xi} - u_{\xi\xi} - (u^2)_{\xi\xi} - V^2 u_{\xi\xi\xi\xi} + \alpha_1 u_{\xi\xi\xi\xi} + \alpha_2 (u_\xi^2)_{\xi\xi\xi} = 0, \quad (15)$$

积分两次, 并利用钟型孤立波满足的边条件 $|\xi| \rightarrow \infty$ 时, $u, u_\xi, u_{\xi\xi} \rightarrow 0$ 可得

$$(V^2 - 1)u - u^2 - (V^2 - \alpha_1)u_{\xi\xi}$$

$$+ 2\alpha_2 u_\xi u_{\xi\xi} = 0. \quad (16)$$

按照惯例, 令 $u = x$, $x_\xi = y$, 则把方程 (16) 改写为如下平面系统:

$$\begin{aligned} x_\xi &= y, \\ y_\xi &= \frac{(V^2 - 1)x - x^2}{(V^2 - \alpha_1) - 2\alpha_2 y}, \end{aligned} \quad (17)$$

在系统 (17) 中存在一条奇直线

$$y = \frac{V^2 - \alpha_1}{2\alpha_2}, \quad (18)$$

这条奇直线对系统的相图分析带来困难. 为了消去这条奇直线, 作如下变换:

$$d\xi = [(V^2 - \alpha_1) - 2\alpha_2 y]d\tau, \quad (19)$$

在此变换下, 系统 (17) 变成平面 Hamilton 系统

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= (V^2 - \alpha_1)y - 2\alpha_2 y^2, \\ \frac{dy}{d\tau} &= (V^2 - 1)x - x^2. \end{aligned} \quad (20)$$

系统 (20) 有如下首次积分:

$$\begin{aligned} H(x, y) &= \frac{1}{2}(V^2 - \alpha_1)y^2 - \frac{2}{3}\alpha_2 y^3 - \frac{1}{2}(V^2 - 1)x^2 \\ &+ \frac{1}{3}x^3 = h. \end{aligned} \quad (21)$$

在拓扑意义下, 除了奇直线 (18) 外, 系统 (17) 和 (20) 有相同的相图. 因此, 通过分析系统 (20) 的相图, 可得知系统 (17) 的相图分布. 易知系统 (20) 有如下四个平衡点: $(0, 0)$, $(V^2 - 1, \frac{V^2 - \alpha_1}{2\alpha_2})$, $(0, \frac{V^2 - \alpha_1}{2\alpha_2})$, $(V^2 - 1, 0)$. 下面分正常频散和反常频散两种情况进行分析.

情况 1 在正常频散 ($\alpha_1 < 1$) [6] 情况下, 当 $V^2 < \alpha_1$ 时, $(0, 0)$ 和 $(V^2 - 1, \frac{V^2 - \alpha_1}{2\alpha_2})$ 是鞍点, $(0, \frac{V^2 - \alpha_1}{2\alpha_2})$ 和 $(V^2 - 1, 0)$ 是中心; 当 $V^2 > 1$ 时, $(0, 0)$ 和 $(V^2 - 1, \frac{V^2 - \alpha_1}{2\alpha_2})$ 是鞍点, $(0, \frac{V^2 - \alpha_1}{2\alpha_2})$ 和 $(V^2 - 1, 0)$ 是中心; 当 $\alpha_1 < V^2 < 1$ 时, $(0, 0)$ 和 $(V^2 - 1, \frac{V^2 - \alpha_1}{2\alpha_2})$ 是中心, $(0, \frac{V^2 - \alpha_1}{2\alpha_2})$ 和 $(V^2 - 1, 0)$ 是鞍点. 用四阶龙格-库塔方法绘制的相图, 如图 1 至图 3 所示. 分别分析可得如下三种结论:

1) 由相图 1 可看出, 当 $\alpha_1 < 1$, $V^2 < \alpha_1$ 时, 在相平面上只存在一个不被奇直线分割的同宿轨道. 这就是从鞍点 $(0, 0)$ 出发围绕中心点 $(V^2 - 1, 0)$ 又回到该鞍点的同宿轨道, 它位于 y 轴左侧, 且对于 x

轴是非对称的. 这同宿轨道可无限接近于另一个在奇直线上的鞍点 $(V^2 - 1, \frac{V^2 - \alpha_1}{2\alpha_2})$, 但不能通过此鞍点. 假设在极限情况下通过此鞍点, 并把鞍点坐标代入同宿轨道方程 (21) (当 $h = 0$ 时) 可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(V^2 - \alpha_1) \left(\frac{V^2 - \alpha_1}{2\alpha_2} \right)^2 \\ & - \frac{2}{3}\alpha_2 \left(\frac{V^2 - \alpha_1}{2\alpha_2} \right)^3 - \frac{1}{2}(V^2 - 1)(V^2 - 1)^2 \\ & + \frac{1}{3}(V^2 - 1)^3 = 0, \end{aligned} \quad (22)$$

计算得

$$\alpha_2 = \pm \frac{1}{2} \left(\frac{V^2 - \alpha_1}{V^2 - 1} \right)^{3/2}. \quad (23)$$

这表明, 这一同宿轨道存在时需要满足条件

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{V^2 - \alpha_1}{V^2 - 1} \right)^{3/2} < \alpha_2 < \frac{1}{2} \left(\frac{V^2 - \alpha_1}{V^2 - 1} \right)^{3/2}.$$

由动力系统的同宿轨道与偏微分方程的孤立波解之间的关系可知, 此同宿轨道对应于非线性波方程 (14), 满足边条件 $|\xi| \rightarrow \infty$ 时, $u, u_\xi, u_{\xi\xi} \rightarrow 0$ 的钟型孤立波解. 因此, 可得到下面的结论 1.

结论 1 当

$$\begin{aligned} & \alpha_1 < 1, \quad V^2 < \alpha_1, \\ & -\frac{1}{2} \left(\frac{V^2 - \alpha_1}{V^2 - 1} \right)^{3/2} < \alpha_2 < \frac{1}{2} \left(\frac{V^2 - \alpha_1}{V^2 - 1} \right)^{3/2} \end{aligned}$$

时, 在微结构固体中可存在一种满足边条件 $|\xi| \rightarrow \infty$ 时, $u, u_\xi, u_{\xi\xi} \rightarrow 0$ 的非对称反钟型孤立波. 这种非对称孤立波是由于二次微观尺度非线性效应的存在, 破坏原有的宏观尺度非线性效应和微尺度频散效应的平衡, 并重新建立平衡后形成的一种新孤立波. 在图 4 中给出的数值计算结果进一步证实了这一结论. 从图 4 上可清楚地看到, 在二次微尺度非线性效应的影响下所形成的孤立波是一种反钟型孤立波, 且具有明显的非对称特征. 这一结论与文献 [6] 给出的结论一致.

2) 由相图 2 可看出, 当 $\alpha_1 < 1, V^2 > 1$ 时, 在相平面上只存在一个不被奇直线分割的同宿轨道. 这就是从鞍点 $(0, 0)$ 出发围绕中心点 $(V^2 - 1, 0)$ 又回到该鞍点的同宿轨道, 它位于 y 轴右侧, 对于 x 轴也是非对称的. 用同样的方法计算可知, 这一同宿轨道存在时也需要满足条件

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{V^2 - \alpha_1}{V^2 - 1} \right)^{3/2} < \alpha_2 < \frac{1}{2} \left(\frac{V^2 - \alpha_1}{V^2 - 1} \right)^{3/2}.$$

因此, 根据动力系统的同宿轨道与偏微分方程的孤立波解之间的关系可得结论 2.

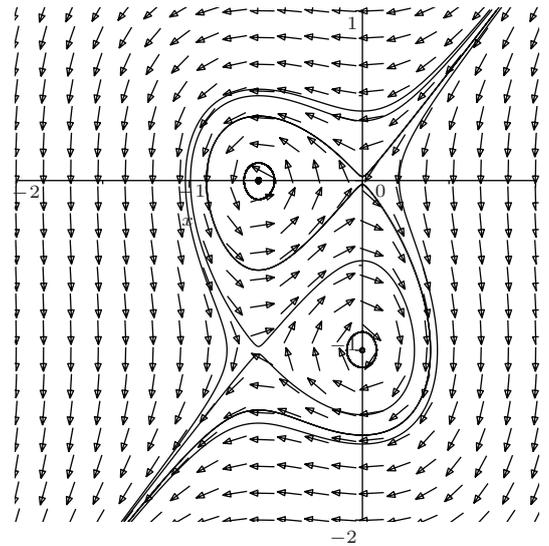


图 1 $\alpha_1 = 0.8, \alpha_2 = 0.2, V = \sqrt{0.4}$ 时, 系统 (20) 的相图

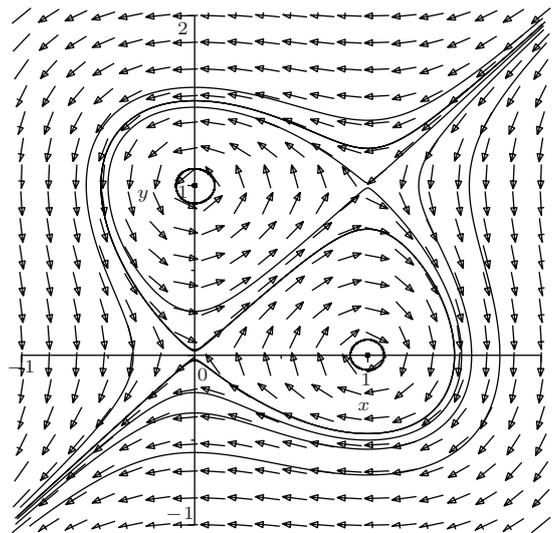


图 2 $\alpha_1 = 0.8, \alpha_2 = 0.6, V = \sqrt{2}$ 时, 系统 (20) 的相图

结论 2 当 $\alpha_1 < 1, V^2 > 1$,

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{V^2 - \alpha_1}{V^2 - 1} \right)^{3/2} < \alpha_2 < \frac{1}{2} \left(\frac{V^2 - \alpha_1}{V^2 - 1} \right)^{3/2}$$

时, 在微结构固体中可存在一种满足边条件 $|\xi| \rightarrow \infty$ 时, $u, u_\xi, u_{\xi\xi} \rightarrow 0$ 的非对称钟型孤立波. 在图 5 中给出的数值计算结果也表明, 此时在微结构固体中形成的孤立波是一种非对称钟型孤立波.

3) 由相图 3 可看出, 当 $\alpha_1 < 1, \alpha_1 < V^2 < 1$ 时, 在相平面内不存在从鞍点 $(0, 0)$ 出发又回到该鞍点的同宿轨道, 故我们得到如下结论 3.

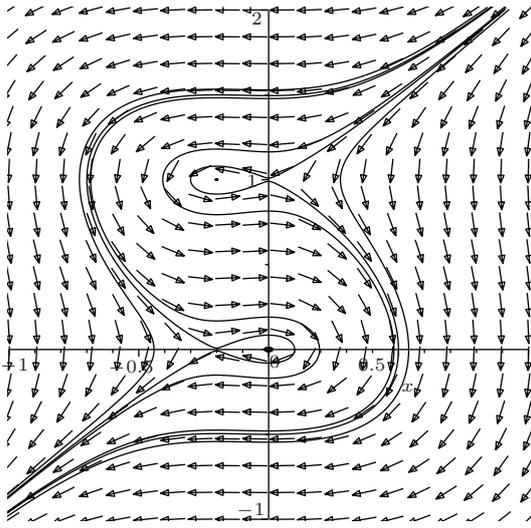


图3 $\alpha_1 = 0.4, \alpha_2 = 0.2, V = \sqrt{0.8}$ 时, 系统 (20) 的相图

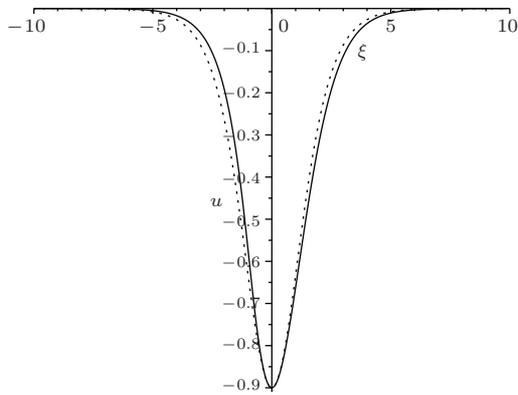


图4 $\alpha_1 = 0.8, \alpha_2 = 0.2, V = \sqrt{0.4}$ 时, 形成的非对称孤立波 (实线) 与孤立波解 (13) (点线) 的比较

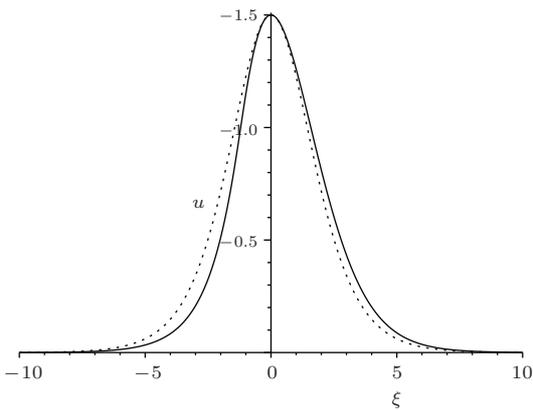


图5 $\alpha_1 = 0.8, \alpha_2 = 0.6, V = \sqrt{2}$ 时, 形成的非对称孤立波 (实线) 与孤立波解 (13) (点线) 的比较

结论 3 当 $\alpha_1 < 1, \alpha_1 < V^2 < 1$ 时, 在微结构固体中不可能存在满足边条件 $|\xi| \rightarrow \infty$ 时, $u, u_\xi, u_{\xi\xi} \rightarrow 0$ 的钟型孤立波.

情况 2 在反常频散 ($\alpha_1 > 1$)^[6] 情况下, 当 $V^2 > \alpha_1$ 时, $(0, 0)$ 和 $(V^2 - 1, \frac{V^2 - \alpha_1}{2\alpha_2})$ 是鞍点, $(0, \frac{V^2 - \alpha_1}{2\alpha_2})$ 和 $(V^2 - 1, 0)$ 是中心; 当 $V^2 < 1$ 时, $(0, 0)$ 和 $(V^2 - 1, \frac{V^2 - \alpha_1}{2\alpha_2})$ 是鞍点, $(0, \frac{V^2 - \alpha_1}{2\alpha_2})$ 和 $(V^2 - 1, 0)$ 是中心; 当 $1 < V^2 < \alpha_1$ 时, $(0, 0)$ 和 $(V^2 - 1, \frac{V^2 - \alpha_1}{2\alpha_2})$ 是中心, $(0, \frac{V^2 - \alpha_1}{2\alpha_2})$ 和 $(V^2 - 1, 0)$ 是鞍点. 在反常频散情况下的分析完全类似于正常频散情况的分析, 故这里已忽略.

3.2 三次微尺度非线性效应影响下形成的孤立波及其存在条件

当 $\alpha_2 = 0$ (即 (2) 式中 $M = 0$) 时, 方程 (12) 变成

$$u_{tt} - u_{xx} - (u^2)_{xx} - u_{ttxx} + \alpha_1 u_{xxxx} - \alpha_3 (u_x^3)_{xxx} = 0, \quad (24)$$

此方程体现了三次微尺度非线性效应. 作行波约化 $\xi = x - Vt, u = u(\xi)$ 可得

$$V^2 u_{\xi\xi} - u_{\xi\xi} - (u^2)_{\xi\xi} - V^2 u_{\xi\xi\xi\xi} + \alpha_1 u_{\xi\xi\xi\xi} - \alpha_3 (u_\xi^3)_{\xi\xi\xi} = 0, \quad (25)$$

积分两次, 并利用边条件 $|\xi| \rightarrow \infty$ 时, $u, u_\xi, u_{\xi\xi} \rightarrow 0$ 可得

$$(V^2 - 1)u - u^2 - (V^2 - \alpha_1)u_{\xi\xi} - 3\alpha_3 u_\xi^2 u_{\xi\xi} = 0. \quad (26)$$

令 $u = x, x_\xi = y$, 则把方程 (26) 改写为如下平面系统:

$$\begin{aligned} x_\xi &= y, \\ y_\xi &= \frac{(V^2 - 1)x - x^2}{(V^2 - \alpha_1) + 3\alpha_3 y^2}. \end{aligned} \quad (27)$$

系统 (27) 存在两条奇直线

$$y_1 = \sqrt{\frac{\alpha_1 - V^2}{3\alpha_3}}, \quad y_2 = -\sqrt{\frac{\alpha_1 - V^2}{3\alpha_3}}. \quad (28)$$

为了消去这两条奇直线, 作如下变换:

$$d\xi = (V^2 - \alpha_1 + 3\alpha_3 y^2) d\tau, \quad (29)$$

在此变换下, 系统 (27) 变成平面 Hamilton 系统

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= (V^2 - \alpha_1)y + 3\alpha_3 y^3, \\ \frac{dy}{d\tau} &= (V^2 - 1)x - x^2. \end{aligned} \quad (30)$$

系统(30)有如下首次积分:

$$H(x, y) = \frac{1}{2}(V^2 - \alpha_1)y^2 + \frac{3}{4}\alpha_3y^4 - \frac{1}{2}(V^2 - 1)x^2 + \frac{1}{3}x^3 = h. \quad (31)$$

在拓扑意义下, 除了两条奇直线(28)之外, 系统(27)和(30)有相同的相图. 因此, 通过分析系统(30)的相图, 可获知系统(27)的相图分布. 系统(30)有如下六个平衡点: $(0, 0)$, $(V^2 - 1, \sqrt{\frac{\alpha_1 - V^2}{3\alpha_3}})$, $(V^2 - 1, -\sqrt{\frac{\alpha_1 - V^2}{3\alpha_3}})$, $(0, \sqrt{\frac{\alpha_1 - V^2}{3\alpha_3}})$, $(0, -\sqrt{\frac{\alpha_1 - V^2}{3\alpha_3}})$, $(V^2 - 1, 0)$. 下面也分正常频散和反常频散两种情况进行分析.

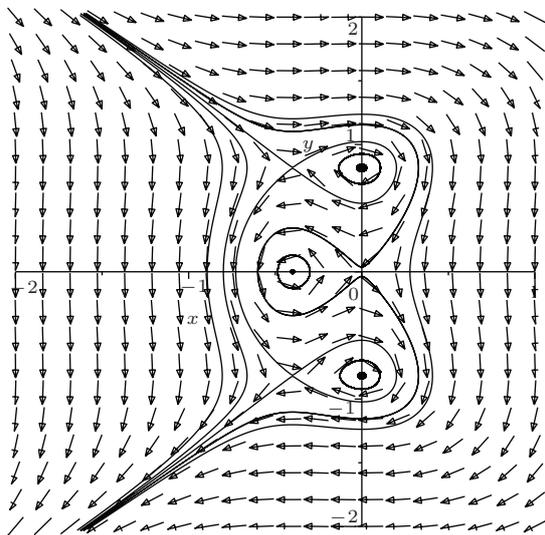


图6 $\alpha_1 = 0.8, \alpha_3 = 0.1, V = \sqrt{0.6}$ 时, 系统(30)的相图

情况1 在正常频散($\alpha_1 < 1$)情况下, 当 $V^2 < \alpha_1, \alpha_3 > 0$ 时, $(0, 0)$, $(V^2 - 1, \sqrt{\frac{\alpha_1 - V^2}{3\alpha_3}})$ 和 $(V^2 - 1, -\sqrt{\frac{\alpha_1 - V^2}{3\alpha_3}})$ 是鞍点, $(0, \sqrt{\frac{\alpha_1 - V^2}{3\alpha_3}})$, $(0, -\sqrt{\frac{\alpha_1 - V^2}{3\alpha_3}})$ 和 $(V^2 - 1, 0)$ 是中心; 当 $V^2 > 1, \alpha_3 < 0$ 时, $(0, 0)$, $(V^2 - 1, \sqrt{\frac{\alpha_1 - V^2}{3\alpha_3}})$ 和 $(V^2 - 1, -\sqrt{\frac{\alpha_1 - V^2}{3\alpha_3}})$ 是鞍点, $(0, \sqrt{\frac{\alpha_1 - V^2}{3\alpha_3}})$, $(0, -\sqrt{\frac{\alpha_1 - V^2}{3\alpha_3}})$ 和 $(V^2 - 1, 0)$ 是中心; 当 $\alpha_1 <$

$V^2 < 1, \alpha_3 < 0$ 时, $(0, 0)$, $(V^2 - 1, \sqrt{\frac{\alpha_1 - V^2}{3\alpha_3}})$ 和 $(V^2 - 1, -\sqrt{\frac{\alpha_1 - V^2}{3\alpha_3}})$ 是中心, $(0, \sqrt{\frac{\alpha_1 - V^2}{3\alpha_3}})$, $(0, -\sqrt{\frac{\alpha_1 - V^2}{3\alpha_3}})$ 和 $(V^2 - 1, 0)$ 是鞍点. 用数值方法绘制的相图, 如图6至图8所示. 分别分析可得如下三种结论:

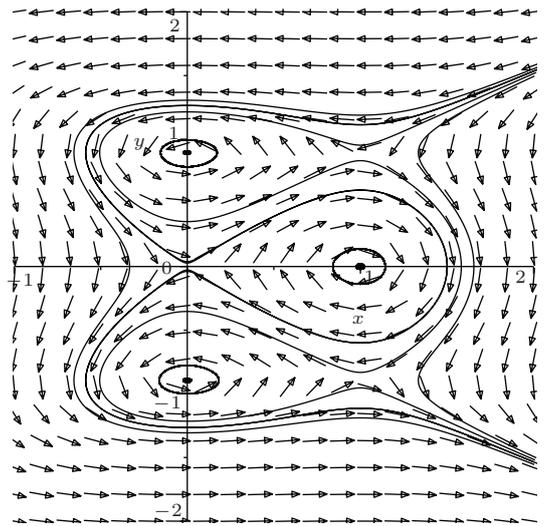


图7 $\alpha_1 = 0.8, \alpha_3 = -0.5, V = \sqrt{2}$ 时, 系统(30)的相图

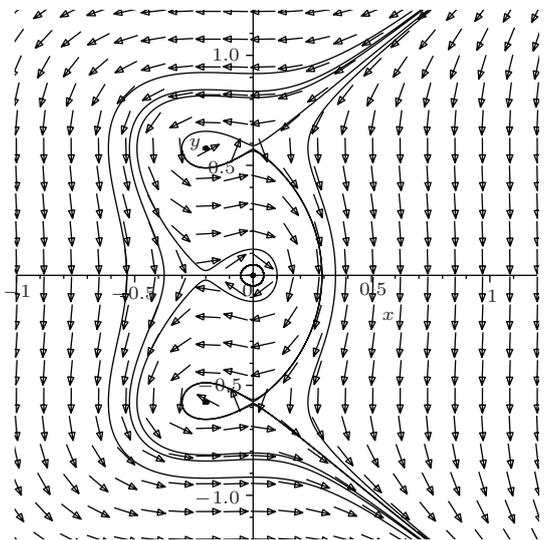


图8 $\alpha_1 = 0.6, \alpha_3 = -0.2, V = \sqrt{0.8}$ 时, 系统(30)的相图

1) 由相图6可看出, 当 $\alpha_1 < 1, V^2 < \alpha_1, \alpha_3 > 0$ 时, 在相平面上只存在一个不被两条奇直线分割的同宿轨道. 这就是从鞍点 $(0, 0)$ 出发围绕中心点 $(V^2 - 1, 0)$ 又回到该鞍点的同宿轨道, 它位于 y

轴左侧, 两条奇直线之间, 且对 x 轴是对称的. 这一同宿轨道可无限接近于另两个在奇直线上的鞍点 $\left(V^2 - 1, \sqrt{\frac{\alpha_1 - V^2}{3\alpha_3}}\right)$ 和 $\left(V^2 - 1, -\sqrt{\frac{\alpha_1 - V^2}{3\alpha_3}}\right)$, 但不能通过这两个鞍点. 假设在极限情况下可通过这两个鞍点, 把鞍点坐标代入同宿轨道方程 (31)(当 $h = 0$ 时) 可得

$$\frac{1}{2}(V^2 - \alpha_1)\left(\frac{\alpha_1 - V^2}{3\alpha_3}\right) + \frac{3}{4}\alpha_3\left(\frac{\alpha_1 - V^2}{3\alpha_3}\right)^2 - \frac{1}{2}(V^2 - 1)(V^2 - 1)^2 + \frac{1}{3}(V^2 - 1)^3 = 0, \quad (32)$$

计算得

$$\alpha_3 = \frac{1}{2} \frac{(\alpha_1 - V^2)^2}{(1 - V^2)^3}. \quad (33)$$

这表明, 这一同宿轨道存在时应满足条件 $0 < \alpha_3 < \frac{1}{2} \frac{(\alpha_1 - V^2)^2}{(1 - V^2)^3}$. 因此, 由动力系统的定性分析理论可得下面的结论 4.

结论 4 当 $\alpha_1 < 1, V^2 < \alpha_1, 0 < \alpha_3 < \frac{1}{2} \frac{(\alpha_1 - V^2)^2}{(1 - V^2)^3}$ 时, 在微结构固体中可存在满足边条件 $|\xi| \rightarrow \infty$ 时, $u, u_\xi, u_{\xi\xi} \rightarrow 0$ 的一种对称的反钟型孤立波. 这说明, 在三次微尺度非线性效应的影响下, 孤立波不出现非对称特征, 只是孤立波的宽度发生了改变. 在图 9 中给出的数值计算结果进一步证实了这一结论. 由此可见, 文献 [6] 给出的微结构固体中只存在非对称孤立波的这一结论是不完善的, 只有二次微尺度非线性效应的情况下才正确.

2) 由相图 7 可看出, 当 $\alpha_1 < 1, V^2 > 1, \alpha_3 < 0$ 时, 在相平面上只存在一个不被两条奇直线分割的从鞍点 $(0, 0)$ 出发围绕中心点 $(V^2 - 1, 0)$ 又回到该鞍点的同宿轨道. 它位于 y 轴右侧, 两条奇直线之间, 且对 x 轴是对称的. 此同宿轨道的存在条件为 $\frac{1}{2} \frac{(\alpha_1 - V^2)^2}{(1 - V^2)^3} < \alpha_3 < 0$. 这样, 可得到下面的结论 5.

结论 5 当 $\alpha_1 < 1, V^2 > 1, \frac{1}{2} \frac{(\alpha_1 - V^2)^2}{(1 - V^2)^3} < \alpha_3 < 0$ 时, 在微结构固体中可存在满足边条件 $|\xi| \rightarrow \infty$ 时, $u, u_\xi, u_{\xi\xi} \rightarrow 0$ 的一种对称钟型孤立波. 从图 10 中给出的数值计算结果也能看到一种对称的钟型孤立波, 这进一步证实了上述结论.

3) 由相图 8 可看出, 当 $\alpha_1 < 1, \alpha_1 < V^2 < 1, \alpha_3 < 0$ 时, 在相平面内不存在从鞍点 $(0, 0)$ 出发又回到该鞍点的同宿轨道, 故可得到下面的结论 6.

结论 6 当 $\alpha_1 < 1, \alpha_1 < V^2 < 1, \alpha_3 < 0$ 时,

在微结构固体中不可能存在满足边条件 $|\xi| \rightarrow \infty$ 时, $u, u_\xi, u_{\xi\xi} \rightarrow 0$ 的钟型孤立波.

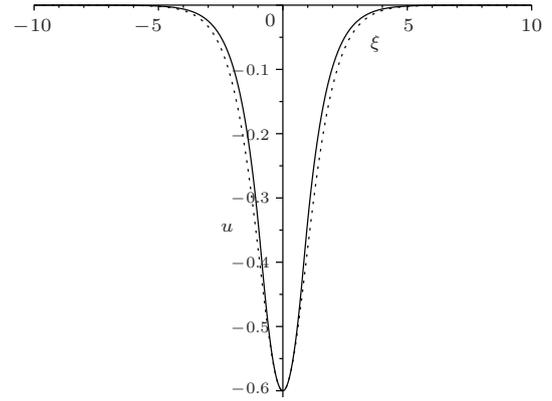


图 9 $\alpha_1 = 0.8, \alpha_3 = 0.3, V = \sqrt{0.6}$ 时, 形成的对称孤立波 (实线) 与孤立波解 (13) (点线) 的比较

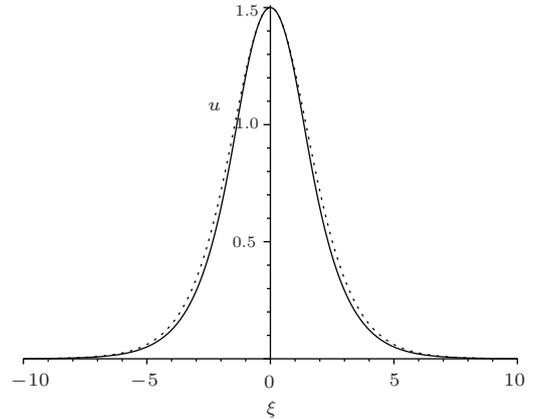


图 10 $\alpha_1 = 0.8, \alpha_3 = -0.5, V = \sqrt{2}$ 时, 形成的对称孤立波 (实线) 与孤立波解 (13) (点线) 的比较

情况 3 在反常频散 ($\alpha_1 > 1$) 情况下, 当 $V^2 > \alpha_1, \alpha_3 < 0$ 时, $(0, 0), \left(V^2 - 1, \sqrt{\frac{\alpha_1 - V^2}{3\alpha_3}}\right)$ 和 $\left(V^2 - 1, -\sqrt{\frac{\alpha_1 - V^2}{3\alpha_3}}\right)$ 是鞍点, $\left(0, \sqrt{\frac{\alpha_1 - V^2}{3\alpha_3}}\right), \left(0, -\sqrt{\frac{\alpha_1 - V^2}{3\alpha_3}}\right)$ 和 $(V^2 - 1, 0)$ 是中心; 当 $V^2 < 1, \alpha_3 > 0$ 时, $(0, 0), \left(V^2 - 1, \sqrt{\frac{\alpha_1 - V^2}{3\alpha_3}}\right)$ 和 $\left(V^2 - 1, -\sqrt{\frac{\alpha_1 - V^2}{3\alpha_3}}\right)$ 是鞍点, $\left(0, \sqrt{\frac{\alpha_1 - V^2}{3\alpha_3}}\right), \left(0, -\sqrt{\frac{\alpha_1 - V^2}{3\alpha_3}}\right)$ 和 $(V^2 - 1, 0)$ 是中心; 当 $1 < V^2 < \alpha_1, \alpha_3 > 0$ 时, $(0, 0), \left(V^2 - 1, \sqrt{\frac{\alpha_1 - V^2}{3\alpha_3}}\right)$ 和 $\left(V^2 - 1, -\sqrt{\frac{\alpha_1 - V^2}{3\alpha_3}}\right)$ 是鞍点, $\left(0, \sqrt{\frac{\alpha_1 - V^2}{3\alpha_3}}\right), \left(0, -\sqrt{\frac{\alpha_1 - V^2}{3\alpha_3}}\right)$ 和 $(V^2 - 1, 0)$ 是中心.

$1, \sqrt{\frac{\alpha_1 - V^2}{3\alpha_3}}$ 和 $(V^2 - 1, -\sqrt{\frac{\alpha_1 - V^2}{3\alpha_3}})$ 是中心, $(0, \sqrt{\frac{\alpha_1 - V^2}{3\alpha_3}})$, $(0, -\sqrt{\frac{\alpha_1 - V^2}{3\alpha_3}})$ 和 $(V^2 - 1, 0)$ 是鞍点. 在反常频散情况下的分析完全类似于正常频散情况的分析, 故这里忽略.

4 结 论

本文考虑宏观尺度非线性效应、二次和三次微尺度非线性效应以及微尺度频散效应, 建立了一维微结构固体中纵波传播的新模型. 采用动力系统定性分析方法和数值方法, 详细分析了在二次和三次微尺度非线性效应的影响下, 微结构固体中孤立波的存在条件及其几何特征, 进而证明了当介质参数和孤立波传播速度满足适当条件时, 在二次微尺度非线性效应的影响下微结构固体中可以形成一种非对称钟型孤立波, 在三次微尺度非线性效应的影响下微结构固体中可以形成一种对称钟型孤立波. 本文结果补充完善了文献[6]的结果, 证明了在适当条件下, 微观结构固体中既可以形成非对称钟型孤立波, 也可以形成对称钟型孤立波. 微观结构固体中对称与非对称孤立波等多种孤立波的存在, 对固体材料性能的无损检测与评价提供了更多的信息, 为设计一种有效的检测方法提供了更多有价值的理论依据.

参考文献

- [1] Mindlin R D 1964 *Arch. Rat. Mech. Anal.* **16** 51
- [2] Engelbrecht J, Khamidullin Y 1988 *Phys. Earth Planet. Inter.* **50** 39
- [3] Erofeev V I 2003 *Wave Processes in Solids with Microstructure* (Singapore: World Scientific press) p-p101-223
- [4] Chen S H, Wang Z Q 2003 *Advanc. Mech.* **33** 207 (in Chinese) [陈少华, 王自强 2003 力学进展 **33** 207]
- [5] Hu G K, Liu X N, Xun F 2004 *Advanc. Mech.* **34** 195 (in Chinese) [胡更开, 刘晓宁, 荀飞 2004 力学进展 **34** 195]
- [6] Janno J, Engelbrecht J 2005 *J. Phys. A: Math. Gen.* **38** 5159
- [7] Peets T, Randruut M, Engelbrecht J 2008 *Wave Motion* **45** 471
- [8] Porubov A V, Pastrone F 2004 *Int. J. Non-Linear Mech.* **39** 1289
- [9] Porubov A V 2003 *Amplification of Nonlinear Strain Waves in Solids* (Singapore: World Scientific press) p-p114-192
- [10] Porubov A V, Aero E L, Maugin G A 2009 *Phys. Rev. E* **79** 046608
- [11] Janno J, Engelbrecht J 2005 *Inverse Probl.* **21** 2019
- [12] Zhang J L, Wang H X 2014 *Chin. Phys. B* **23** 044208
- [13] Gao X H, T D, Zhang C Y, Zheng H, Lu D Q, Hu W 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 024204 (in Chinese) [高星辉, 唐冬, 张承云, 郑晖, 陆大全, 胡巍 2014 物理学报 **63** 024204]
- [14] Shi Y R, Zhang J, Yang H J, Duan W S 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 020401 (in Chinese) [石玉仁, 张娟, 杨红娟, 段文山 2011 物理学报 **60** 020401]
- [15] Li R H, Chen W S 2013 *Chin. Phys. B* **22** 040503
- [16] Potapov A, Rodyushkin V M 2001 *Acoust. Phys.* **47** 347
- [17] Shuang S, Naranmandula 2012 *Chin. J. Theor. Appl. Mech.* **44** 117 (in Chinese) [双山, 那仁满都拉 2012 力学学报 **44** 117]

Solitary waves and their existence conditions in microstructured solids*

Naranmandula[†]

(College of Physics and Electronic Information, Inner Mongolia University for Nationalities, Tongliao 028043, China)

(Received 1 April 2014; revised manuscript received 11 May 2014)

Abstract

By taking into account the macroscale nonlinear effect, quadratic and cubic microscale nonlinear effects, and microscale dispersion effect, a new model capable to describe the longitudinal wave propagation in one-dimensional microstructured solid is established based on the Mindlin theory. Using the qualitative analysis theory in the planar dynamical systems, we have analyzed the existence conditions and geometrical characteristics of solitary waves, and proved that the faces under the influence of quadratic microscale nonlinear effect, can form an asymmetric solitary wave in the microstructured solid; and under the influence of cubic microscale nonlinear effect, they can form a symmetric solitary wave in the microstructured solid, when the medium parameters and the propagation speeds of solitary waves satisfy certain appropriate conditions. Finally, the above results are further verified using a numerical method.

Keywords: microstructured solid, solitary wave, existence condition, geometrical characteristic

PACS: 43.25.Rq, 46.40.cD, 02.90.+p

DOI: [10.7498/aps.63.194301](https://doi.org/10.7498/aps.63.194301)

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No.10862003), and the Scientific Research Innovation Team Building Programs of Inner Mongolia University for Nationalities.

[†] Corresponding author. E-mail: nrmdtl@126.com