相干态在参数量子相空间的两维正态分布*

范洪义[1)2)†]

1) (宁波大学物理系, 宁波 315211)

2) (中国科学技术大学材料科学与工程系, 合肥 230026)

(2013 年 8 月 8 日收到; 2013 年 10 月 14 日收到修改稿)

把量子力学与数理统计的正态分布联系起来进行初步的尝试. 用数理统计的观点和有序算符内的积分技术研究相干态, 指出在依赖一个实参数 k 的量子化方案中, 相干态 $|z\rangle\langle z|$ 在相空间呈现出以 (q,p) 为随机变量的两维正态分布, $z=(q+\mathrm{i}p)/\sqrt{2}$. 两个随机变量的相关系数为 $\mathrm{i}k$. 在 $k=\pm1$ 的参数相空间中, $|z\rangle\langle z|$ 分别表现出 $\mathfrak{P}$ 排序 (P 在 Q 左) 和 $\mathfrak{Q}$ 排序的形式 (Q 在 P 左), 而在 $k=0$ 的参数相空间中, $|z\rangle\langle z|$ 表现出 Weyl 排序的形式. 在 $\mathfrak{P}$ 排序和 $\mathfrak{Q}$ 排序的情况下, 量子算符 $|z\rangle\langle z||_{z=(q+\mathrm{i}p)/\sqrt{2}}$ 的经典对应函数中随机变量 (q,p) 是关联的, 只有在 Weyl 对应时, 随机变量 (q,p) 是独立的. 也就是说, 算符的 Weyl 排序有利于其经典对应的随机变量解脱关联.

关键词: 正态分布, 相干态, 相空间, 相关系数

PACS: 03.65.–w **DOI:** 10.7498/aps.63.020302

1 引 言

在量子力学中, 由于坐标算符与动量算符 $[Q,P]=i$, $\hbar=1$. 当要把一个经典函数 $f(p,q)$ 量子化为算符时, 会给出不同的结果, 最简单的例子是经典函数 q^np^m 有多种不同的量子对应, 其中两个是 Q^nP^m 或 P^mQ^n, 如选 Q^nP^m, 则根据坐标表象与动量表象的完备性 [1]

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}q|q\rangle\langle q|=1,\quad \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}p|p\rangle\langle p|=1, \tag{1}$$

就有

$$\begin{aligned}Q^nP^m&=\int\mathrm{d}qq^n|q\rangle\langle q|\int\mathrm{d}pp^m|p\rangle\langle p|\\&=\iint\mathrm{d}q\mathrm{d}pq^np^m|q\rangle\langle p|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}pq},\end{aligned} \tag{2}$$

q^np^m 与 Q^nP^m 通过两维积分变换相联系, 积分核是 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}pq}|q\rangle\langle p|$. 鉴于

$$|q\rangle\langle q|=\delta(q-Q),\quad |p\rangle\langle p|=\delta(p-P), \tag{3}$$

所以

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}|q\rangle\langle p|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}pq}=\delta(q-Q)\delta(p-P). \tag{4}$$

于是 (2) 式变为

$$Q^nP^m=\iint\mathrm{d}q\mathrm{d}pq^np^m\delta(q-Q)\delta(p-P), \tag{5}$$

把一个单项里的所有 Q 置于所有 P 的左边, 记为 $\mathfrak{Q}$-排序, 上式是 q^np^m 的 $\mathfrak{Q}$-排序量子化方案. 另一方面, 如选量子化为 $q^np^m\to P^mQ^n$, 根据 (1) 式就有

$$\begin{aligned}P^mQ^n&=\int\mathrm{d}pp^m|p\rangle\langle p|\int\mathrm{d}qq^n|q\rangle\langle q|\\&=\iint\mathrm{d}q\mathrm{d}pq^np^m|p\rangle\langle q|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}pq},\end{aligned} \tag{6}$$

可见积分核是 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}|p\rangle\langle q|\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}pq}$. 鉴于

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}|p\rangle\langle q|\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}pq}=\delta(p-P)\delta(q-Q), \tag{7}$$

(6) 式变为

$$P^mQ^n=\iint\mathrm{d}q\mathrm{d}pq^np^m\delta(p-P)\delta(q-Q), \tag{8}$$

* 国家自然科学基金 (批准号: 11175113) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: fanhongyi@nbu.edu.cn

 http://wulixb.iphy.ac.cn

这里P置于Q左边, 这是q^np^m的$\mathfrak{P}$-排序量子化方案. 可见量子化q^np^m的结果取决于在选方案时用$\mathfrak{Q}$-排序(Q置于P左边)方案还是用$\mathfrak{P}$-排序(P置于Q左边)方案. 注意以上的讨论是建立在(1)式的基础上, 反映了坐标表象与动量表象的新应用. 而(5)和(8)式的右边都体现了有序算符内积分的思想, 作者以前曾提出了在正规乘积算符内的积分方法, 可见文献[2, 3]. 以下我们将进一步将$\mathfrak{P}$-排序、$\mathfrak{Q}$-排序和Weyl-排序算符内积分方法和数理统计的观点应用于研究相空间, 指出在依赖一个实参数k的量子化方案中, 纯相干态$|z\rangle\langle z|$在相空间呈现出以(q,p)为随机变量的两维正态分布, $z=(q+\mathrm{i}p)/\sqrt{2}$. 两个随机变量的相关系数为$\mathrm{i}k$. 由于正态分布是随机变量理论中最常出现的分布, 有广泛的应用. 而相干态是最接近于经典的量子态, 所以发现纯相干态对应正态分布对于发展量子力学相空间理论有促进作用[4,5].

这里还要指出: 在$k=\pm1$的参数相空间中, 纯相干态$|z\rangle\langle z|$分别呈现出$\mathfrak{P}$排序(P在Q左)和$\mathfrak{Q}$排序(Q在P左)的正态分布, 且$|z\rangle\langle z||_{z=(q+\mathrm{i}p)/\sqrt{2}}$的经典对应随机变量$(q,p)$是关联的, 而在$k=0$的参数相空间中, $|z\rangle\langle z|$表现出Weyl排序, 随机变量(q,p)是独立的. 也就是说, Weyl排序算符有利于其经典对应的随机变量解脱关联.

2 Weyl-排序与$\mathfrak{P}$-排序、$\mathfrak{Q}$-排序的相互转换

经典函数$\mathrm{e}^{\mathrm{i}qu+\mathrm{i}pv}$的$P$-量子化是

$$\begin{aligned}&\mathrm{e}^{\mathrm{i}qu+\mathrm{i}pv}\to\mathrm{e}^{\mathrm{i}Pv}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}Qu}=\mathfrak{P}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}Pv}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}Qu}]\\&=\mathrm{e}^{\mathrm{i}Qu+\mathrm{i}Pv}\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}uv},\end{aligned}\tag{9}$$

而其$\mathfrak{Q}$-量子化是

$$\begin{aligned}&\mathrm{e}^{\mathrm{i}qu+\mathrm{i}pv}\to\mathrm{e}^{\mathrm{i}Qu}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}Pv}=\mathfrak{Q}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}Qu}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}Pv}]\\&=\mathrm{e}^{\mathrm{i}Qu+\mathrm{i}Pv}\,\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}uv},\end{aligned}\tag{10}$$

这里用了Baker-Hausdorff公式. 如取另一种量子化方案, 是使得经典函数$\mathrm{e}^{\mathrm{i}qu+\mathrm{i}pv}$正好量子化为$\mathrm{e}^{\mathrm{i}Qu+\mathrm{i}Pv}$,

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}qu+\mathrm{i}pv}\to\mathrm{e}^{\mathrm{i}Qu+\mathrm{i}Pv},\tag{11}$$

我们称它为Weyl量子化[6], 也就是要找一个积分核$\Delta(p,q)$(称为Wigner算符[7])使得

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}Qu+\mathrm{i}Pv}=\iint_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}qu+\mathrm{i}pv}\Delta(q,p)\,\mathrm{d}q\,\mathrm{d}p.\tag{12}$$

从此式我们看出两点结论:

1) 每一种量子化方案对应一种算符排序, (12)式的成立隐含了一种算符排序, 称为Weyl排序, 如引入记号$\vdots\ \vdots$以标志Weyl排序[7], 那么上式左边就是Weyl排序好了的, 故(12)式即为

$$\vdots\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}Qu+\mathrm{i}Pv}\,\vdots=\iint_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}qu+\mathrm{i}pv}\Delta(q,p)\,\mathrm{d}q\,\mathrm{d}p,\tag{13}$$

所以$\Delta(q,p)$本身的Weyl排序是[8,9]

$$\begin{aligned}\Delta(q,p)&=\vdots\,\delta(p-P)\delta(q-Q)\,\vdots\\&=\vdots\,\delta(q-Q)\delta(p-P)\,\vdots,\end{aligned}\tag{14}$$

即在记号$\vdots\ \vdots$内部Q与P可以交换;

2) 把(13)式看做是Fourier变换, 所以其反变换给出

$$\begin{aligned}\Delta(q,p)&=\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{4\pi^2}\,\vdots\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(Q-q)u+\mathrm{i}(P-p)v}\,\vdots\\&=\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{4\pi^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(Q-q)u+\mathrm{i}(P-p)v},\end{aligned}\tag{15}$$

由(9)式进一步将$\Delta(q,p)$排成$\mathfrak{P}$-排序积分得到

$$\begin{aligned}\Delta(q,p)&=\mathfrak{P}\left[\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{4\pi^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(P-p)v}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(Q-q)u}\,\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}uv}\right]\\&=\mathfrak{P}\left[\int\frac{\mathrm{d}v}{2\pi}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(P-p)v}\delta\left(Q-q-\frac{v}{2}\right)\right]\\&=\frac{1}{\pi}\mathfrak{P}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}2(P-p)(Q-q)}\right],\end{aligned}\tag{16}$$

注意在$\mathfrak{P}$编序的记号内, P与Q是可交换的, 这如同在正规乘积记号(或反正规乘积记号)内部产生算符与消灭算符可交换一样. 于是由(16)我们发现$\Delta(q,p)$与$\delta(p-P)\delta(q-Q)$存在如下的变换关系

$$\begin{aligned}\Delta(q,p)=&\frac{1}{\pi}\iint_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(p'-p)(q'-q)}\delta(p'-P)\\&\times\delta(q'-Q)\,\mathrm{d}q'\,\mathrm{d}p',\end{aligned}\tag{17}$$

类似可得$\Delta(q,p)$与$\delta(q-Q)\delta(p-P)$的变换关系

$$\Delta(q,p)=\frac{1}{\pi}\mathfrak{Q}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2(P-p)(Q-q)}\right]$$

$$
\begin{aligned}
=&\frac{1}{\pi}\iint_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}(p'-p)(q'-q)}\delta(q'-Q)\\
&\times\delta(p'-P)\,\mathrm{d}q'\,\mathrm{d}p',
\end{aligned}
\tag{18}
$$

注意在$\mathfrak{Q}$编序的记号内, P与Q也是可交换的. 可以证明(17)式的反变换是

$$
\begin{aligned}
&\delta(p-P)\delta(q-Q)\\
=&\frac{1}{\pi}\iint_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}(p'-p)(q'-q)}\Delta(q',p')\mathrm{d}q'\mathrm{d}p'.
\end{aligned}
\tag{19}
$$

由以上讨论可以得出:

定理1　当某个算符$A(Q,P)$已被排成$\mathfrak{P}$-编序的算符, 其形式是$\mathfrak{P}[B(Q,P)]$, 即

$$
A(Q,P)=\mathfrak{P}[B(Q,P)],
\tag{20}
$$

那么$A(Q,P)$的Weyl排序就是

$$
\begin{aligned}
&A(Q,P)\\
=&\frac{1}{\pi}\iint_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}q\mathrm{d}pB(q,p)\vdots\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}(P-p)(Q-q)}\vdots,
\end{aligned}
\tag{21}
$$

其中$B(q,p)$是将$\mathfrak{P}[B(Q,P)]$中的$Q\to q, P\to p$而得到的经典函数.

证明　由于$A(Q,P)=\mathfrak{P}[B(Q,P)]$, 故有

$$
\begin{aligned}
&A(Q,P)\\
=&\iint_{-\infty}^{\infty}B(q,p)\,\delta(p-P)\,\delta(q-Q)\,.
\end{aligned}
\tag{22}
$$

把(19)式代入(22)式并利用(14)式和在Weyl编序算符内的积分技术, 得到

$$
\begin{aligned}
A(Q,P)=&\frac{1}{\pi}\iint_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}q\mathrm{d}pB(q,p)\iint_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}q'\mathrm{d}p'\\
&\times\ \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}(p'-p)(q'-q)}\Delta(q',p')\\
=&\frac{1}{\pi}\iint_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}q\mathrm{d}pB(q,p)\iint_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}q'\mathrm{d}p'\\
&\times\ \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}(p'-p)(q'-q)}\vdots\,\delta(p'-P)\\
&\times\delta(q'-Q)\vdots\\
=&\frac{1}{\pi}\iint_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}q\mathrm{d}pB(q,p)\\
&\times\vdots\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}(P-p)(Q-q)}\vdots,
\end{aligned}
\tag{23}
$$

积分后得到的即为$A(Q,P)$的Weyl排序式. 类似地, 当某个算符A已被排成$\mathfrak{Q}$-编序的算符, 其形式是$\mathfrak{Q}[C(Q,P)]$, 我们可以通过以下积分

$$
\begin{aligned}
A(Q,P)=&\mathfrak{Q}[C(Q,P)]\\
=&\frac{1}{\pi}\iint_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}q\mathrm{d}pC(q,p)\\
&\times\vdots\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(P-p)(Q-q)}\vdots,
\end{aligned}
\tag{24}
$$

得到$A(Q,P)$的Weyl排序式, 其中$C(q,p)$是将$\mathfrak{Q}[C(Q,P)]$中的$Q\to q, P\to p$而得到的经典函数.

3 纯相干态的$\mathfrak{Q}$-排序、$\mathfrak{P}$-排序和Weyl排序

相干态$|z\rangle$是一个使Heisenberg不确定关系取极小值的态, 所以它是描述单色性优良的激光的量子态[10], 其定义是

$$
|z\rangle=\exp\left(\frac{-|z|^2}{2}+za^\dagger\right)|0\rangle.
\tag{25}
$$

在本节中要用数理统计中的两维正态分布来研究$|z\rangle\langle z|$在(q,p)相空间中的行为, 这在以往的文献中尚未有报道. 先求$|z\rangle\langle z|$的$\mathfrak{Q}$-排序形式, 注意到坐标本征态$\langle q|$与$|z\rangle$的内积为

$$
\begin{aligned}
\langle q|z\rangle=&\pi^{-1/4}\exp\bigg[-\frac{|z|^2}{2}-\frac{q^2}{2}\\
&+\sqrt{2}qz-\frac{z^2}{2}\bigg],
\end{aligned}
\tag{26}
$$

动量本征态$\langle p|$与$|z\rangle$的内积为

$$
\begin{aligned}
\langle p|z\rangle=&\pi^{-1/4}\exp\bigg[-\frac{|z|^2}{2}-\frac{p^2}{2}\\
&-\sqrt{2}\mathrm{i}pz+\frac{z^2}{2}\bigg]
\end{aligned}
\tag{27}
$$

于是

$$
\begin{aligned}
&\langle q|z\rangle\langle z|p\rangle\\
=&\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(q^2+p^2)-|z|^2+\sqrt{2}qz+\sqrt{2}\mathrm{i}pz^*+\frac{z^{*2}}{2}-\frac{z^2}{2}}\\
=&[\langle p|z\rangle\langle z|q\rangle]^*.
\end{aligned}
\tag{28}
$$

所以用(1), (28)和(4)式就有

$$
\begin{aligned}
|z\rangle\langle z| &= \iint_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}q\mathrm{d}p|q\rangle\langle q|z\rangle\langle z|p\rangle\langle p| \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\iint_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}q\mathrm{d}p|q\rangle\langle p|\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(q^2+p^2)-|z|^2+\sqrt{2}qz+\sqrt{2}\mathrm{i}pz^*+\frac{z^{*2}}{2}-\frac{z^2}{2}} \\
&=\sqrt{2}\iint_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}q\mathrm{d}p\delta(q-Q)\delta(p-P)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(q^2+p^2)-z|^2+\sqrt{2}qz+\sqrt{2}\mathrm{i}pz^*+\frac{z^{*2}}{2}-\frac{z^2}{2}-\mathrm{i}pq} \\
&= \sqrt{2}\mathfrak{Q}\left[\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(Q^2+P^2)-|z|^2+\sqrt{2}Qz+\sqrt{2}\mathrm{i}Pz^*+\frac{z^{*2}}{2}-\frac{z^2}{2}-\mathrm{i}PQ}\right],
\end{aligned}
\tag{29}
$$

这就是 $|z\rangle\langle z|$ 的 $\mathfrak{Q}$-排序形式. 进一步让

$$
z = (q+\mathrm{i}p)/\sqrt{2},
\tag{30}
$$

(29) 式变为

$$
|z\rangle\langle z| = \sqrt{2}\mathfrak{Q}\left[\exp\left\{-\frac{1}{2}[(q-Q)^2+2\mathrm{i}(q-Q)(p-P)+(p-P)^2]\right\}\right],
\tag{31}
$$

另一方面, 又可导出 $|z\rangle\langle z|$ 的 P-排序

$$
\begin{aligned}
|z\rangle\langle z| &= \iint_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}q\mathrm{d}p|p\rangle\langle p|z\rangle\langle z|q\rangle\langle q| \\
&= \sqrt{2}\int \mathrm{d}q\mathrm{d}p\delta(p-P)\delta(q-Q)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(q^2+p^2)-|z|^2+\sqrt{2}qz^*-\sqrt{2}\mathrm{i}pz-\frac{z^{*2}}{2}+\frac{z^2}{2}+\mathrm{i}pq} \\
&= \sqrt{2}\mathfrak{P}\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(Q^2+P^2)-|z|^2+\sqrt{2}Qz^*-\sqrt{2}\mathrm{i}Pz-\frac{z^{*2}}{2}+\frac{z^2}{2}+\mathrm{i}PQ}\right) \\
&= \sqrt{2}\mathfrak{P}\exp\left\{-\frac{1}{2}[(q-Q)^2-2\mathrm{i}(q-Q)(p-P)+(p-P)^2]\right\}.
\end{aligned}
\tag{32}
$$

现求 $|z\rangle\langle z|$ 的 Weyl 排序, 先把 $|z\rangle\langle z|$ 的 $\mathfrak{Q}$ 排序式 (31) 右边的 $Q\to q, P\to p$, 再根据 (24) 式, 我们有

$$
\begin{aligned}
|z\rangle\langle z| =&\frac{\sqrt{2}}{\pi}\iint_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}p\mathrm{d}q \,\vdots\, \mathrm{e}^{2\mathrm{i}(P-p)(Q-q)} \,\vdots\, \exp\left\{-\frac{1}{2}[(q-q)^2+2\mathrm{i}(q-q)(p-p)+(p-p)^2]\right\} \\
=&\frac{\sqrt{2}}{\pi}\iint_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}p\mathrm{d}q \,\vdots\, \exp\left\{-\frac{q^2}{2}+\mathrm{i}q(p+p-2P-\mathrm{i}q)-\frac{q^2}{2}-\mathrm{i}q(p-p)\right. \\
&\left.+2\mathrm{i}Q(P-p)-\frac{(p-p)^2}{2}\right\}\vdots \\
=&2\,\vdots\,\exp\left[-(Q-q)^2-(P-p)^2\right]\vdots.
\end{aligned}
\tag{33}
$$

结合 (31)—(33) 式, 可以统一写下

$$
|z\rangle\langle z| = \frac{2}{\sqrt{1+k^2}}\mathfrak{K}\exp\left\{-\frac{1}{1+k^2}\left[(Q-q)^2+2\mathrm{i}k(Q-q)(P-p)+(P-p)^2\right]\right\},
\tag{34}
$$

这里当 $k=1$, (34) 式变为 (32) 式, 记号 $\mathfrak{K}$ 表示 $\mathfrak{P}$; 当 $k=-1$, (34) 式变为 (31) 式, 记号 $\mathfrak{K}$ 表示 $\mathfrak{Q}$; 当 $k=0$, 记号 $\mathfrak{K}$ 表示 $\vdots\ \vdots$. 比较 (34) 式和数理统计的两维随机变量的标准正态分布形式 [11]

$$
f(q,p) = \frac{1}{\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\tau^2}}\exp\left\{-\frac{1}{1-\tau^2}\left[\frac{(q-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\tau(q-\mu_1)(p-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(p-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\},
\tag{35}
$$

其中 τ 是关联系数, $\tau\sigma_1\sigma_2$ 称为协方差, 我们看到 (34) 式对应于 (35) 式的特殊情况,

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 1, \quad \tau = -\mathrm{i}k, \tag{36}$$

所以纯相干态 $|z\rangle\langle z|$ 在相空间呈现出以 (q,p) 为随机变量的两维正态分布, (34) 式中的 $-\mathrm{i}k$ 代表 (q,p) 的关联系数. 在带 $k=1$ 的参数相空间中, $|z\rangle\langle z|$ 表现出 $\mathfrak{P}$ 排序, (q,p) 的关联系数为 $\mathrm{i}k$; 在带 $k=-1$ 的参数相空间中, $|z\rangle\langle z|$ 表现出 $\mathfrak{Q}$ 排序, 其关联系数为 $-\mathrm{i}k$; 而在带 $k=0$ 的参数相空间中, $|z\rangle\langle z|$ 表现出 Weyl 排序, 其中含的 (q,p) 不是关联的.

4 结 论

从分析纯相干态 $|z\rangle\langle z||_{z=(q+\mathrm{i}pt)/\sqrt{2}}$ 的经典对应来看, 在 $\mathfrak{P}$ 排序和 $\mathfrak{Q}$ 排序的量子-经典对应随机变量 (q,p) 是关联的, 只有在 Weyl 对应时, 随机变量 (q,p) 是独立的, 也就是说, 算符的 Weyl 排序有利于其经典对应的随机变量解脱关联. 把量子力学与正态分布联系起来, 本文做了一个初步的尝试.

参考文献

[1] Dirac P A M 1930 *The Principle of Quantum Mechanics* (Oxford: Clarendon Press)

[2] Fan H Y 2012 *Representation and Transformation Theory in Quantum Mechanics-Progress of Dirac's Symbolic Method* (2nd Ed.) (Hefei: USTC Press) (in Chinese) [范洪义 2012 量子力学表象与变换论——狄拉克符号法进展 (合肥: 中国科学技术大学出版社)]

[3] Fan H Y, Lu H L, Fan Y 2006 *Ann. Phys.* **321** 480

[4] Zhang X Y, Wang J S 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 090304

[5] Li H Q, Meng X G, Wang J S 2008 *Chin. Phys. B* **17** 2973

[6] Weyl H 1927 *Z. Phys.* **46** 1

[7] Wigner E 1932 *Phys. Rev.* **40** 749

[8] Fan H Y 1992 *J. Phys. A* **25** 3443

[9] Fan H Y 2006 *Ann. Phys.* **323** 1502

[10] Glauber R J 1963 *Phy. Rev.* **130** 2529

[11] Zhou G R 1984 *Probability and Statistics* (Beijing: Higher Education Press) (in Chinese) [周概容 1984 概率论与数理统计 (北京: 高等教育出版社)]

Bivariate normal distribution of coherent state in parameterized phase space*

Fan Hong-Yi[1)2)†]

1) (*Department of Physics, Ningbo University, Ningbo 315211, China*)

2) (*Department of Materials Science and Engineering, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China*)

(Received 8 August 2013; revised manuscript received 14 October 2013)

Abstract

Combining quantum mechanics and the normal distribution in statistics we study the coherent state from the point of view of statistics and by using the integration method within ordered product of operators. We find that the pure coherent state $|z\rangle\langle z|$ exhibits a bivariate normal distribution of randon variables in (q,p) phase space, $z=(q+\mathrm{i}p)/\sqrt{2}$, with a real k-parameter which is related to the quantization scheme, and the correlation coefficient is ik. For $k=\pm1$, $|z\rangle\langle z|$ respectively is arranged as $\mathfrak{P}$-ordering (all P stand on the left of all Q) and $\mathfrak{Q}$-ordering (all Q stand on the left of all P), while in the case of $k=0$, $|z\rangle\langle z|$ is arranged as the Weyl-ordering. In the cases of $\mathfrak{P}$-ordering and $\mathfrak{Q}$-ordering, in the classical correspondence function of $|z\rangle\langle z||_{z=(q+\mathrm{i}p)/\sqrt{2}}$ the bivariates (q,p) are correlated, only in the case of Weyl correspondece, (q,p) are independent. In other words, the Weyl ordering of operators is liable to decouple the correlation in bivariates.

Keywords: normal distribution, coherent state, phase space, correlation coefficient

PACS: 03.65.–w **DOI:** 10.7498/aps.63.020302

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11175113).

† Corresponding author. E-mail: fanhongyi@nbu.edu.cn