

## 忆阻电路降维建模与特性分析\*

包伯成<sup>1)†</sup> 王春丽<sup>1)</sup> 武花干<sup>2)</sup> 乔晓华<sup>3)</sup>

1)(常州大学信息科学与工程学院, 常州 213164)

2)(南京理工大学电子工程系, 南京 210094)

3)(江苏理工学院电气信息工程学院, 常州 213001)

(2013年7月30日收到; 2013年9月17日收到修改稿)

通过对蔡氏忆阻电路的数学建模分析, 提出了忆阻电路动力学建模的降维问题. 以包含两个磁控忆阻器的忆阻电路为例, 进行了忆阻电路降维建模, 由此建立了一个三维系统模型. 基于该模型, 分析了忆阻电路的平衡点和稳定性, 研究了电路参数变化时忆阻电路的动力学特性. 进一步, 对包含两个磁控忆阻器的忆阻电路常规模型的分析结果和其降维模型的分析结果进行了比较. 结果表明: 忆阻电路降维模型的维数只与电容器的数量和电感器的数量有关, 而与忆阻器的数量无关; 当电路参数变化时忆阻电路存在分岔模式共存等非线性现象; 降维建模降低了系统建模复杂度, 有利于系统的动力学特性分析, 但消除了忆阻器内部状态变量的初始条件对忆阻电路动力学特性的影响.

关键词: 忆阻电路, 建模, 降维, 动力学

PACS: 05.45.-a

DOI: 10.7498/aps.63.020504

## 1 引言

一个实际的物理系统, 例如开关电源<sup>[1-3]</sup>、复杂网络<sup>[4,5]</sup>等, 往往需要经过抽象、简化并剥离本质属性后进行数学近似描述和建模, 才能对它进行系统特性的分析. 对于不同的物理系统, 一般需采用不同的近似方法从而尽可能地使得建立的系统数学模型越简单越好. 但对于复杂的物理系统, 所建立的系统数学模型往往较为复杂, 其系统维数一般较高, 很难对系统数学模型进行有效的定量分析. 为了进行定量分析, 通常对物理系统做降维处理<sup>[2,3]</sup>, 建立较低维的数学模型, 并进一步做无量纲、归一化处理<sup>[3]</sup>, 给出解析解, 使得理论分析结果对物理系统的工程应用提供有效的指导. 然而, 降维建模只适用于一些特定场合, 例如开关电源一般在闭环状态, 其反馈输出电压在基准电压附近的纹波较小, 因此可以用一个恒定电压代替输出电

压(输出电容电压)<sup>[2,3]</sup>, 这样就消除了输出电容电压变量, 实现对开关电源系统模型的降维处理. 如果需要分析开关电源的开环特性时, 就无法进行系统模型的降维处理.

忆阻器是具有记忆特性的非线性电阻器, 是第四种无源二端电路元件<sup>[6]</sup>. 忆阻器的电阻值随通过它的电流而改变, 而且当断电时其还能保持之前的电阻值, 这使得忆阻器成为天然的非挥发性存储器. 忆阻器的出现将使得集成电路元件变得更小, 计算机可以即开即关, 而且拥有可以模拟复杂的人脑神经功能的超级能力<sup>[7]</sup>. 因此, 忆阻器的记忆特性将会对计算机科学<sup>[7]</sup>、生物工程学<sup>[8]</sup>、神经网络<sup>[9]</sup>、电子工程<sup>[10]</sup>、通信工程<sup>[11]</sup>等领域产生极其深远的影响. 同时, 忆阻元件的存在使基础元件由电阻、电容和电感增加到了四个, 忆阻器为电路设计及忆阻电路应用提供了全新的发展空间<sup>[12-19]</sup>.

忆阻器是一个物理上新实现的基础元件, 该元件是否应视为动态元件, 目前学术界尚未定论. 但

\* 国家自然科学基金(批准号: 51277017)和江苏省自然科学基金(批准号: BK2012583)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: mervinbao@126.com

在进行忆阻电路尤其是忆阻混沌电路的数学建模时,已有的研究<sup>[13-19]</sup>都把忆阻器视作一个动态元件,系统模型因忆阻器的引入而增加了相应的维数.文献<sup>[20]</sup>提出忆阻电路的数学建模存在以下两种建模方法:第一种是考虑忆阻器作为一个动态元件,以电容电压、电感电流和忆阻磁通(或忆阻电荷)作为状态变量得到状态方程;第二种是仅把忆阻器当作一个非线性电阻元件,以电容磁通和电感电荷作为状态变量得到状态方程.两种建模方法所得到的数学模型是不同的.但文献<sup>[20]</sup>仅仅是简单地列出了采用第二种建模方法所得到的动力学模型,没有对该模型进行任何分析和说明,更没有与采用第一种建模方法所得到的模型在动力学特性方面进行相应的比较.

已有的研究<sup>[13-19]</sup>表明,基于忆阻器的混沌电路有一个平衡点集,其动力学特性除了与电路参数有关外,还依赖于忆阻器的初始状态,这与一般混沌系统的动力学特性不同.这些研究成果是在忆阻器为动态元件的基础上,进行忆阻电路的动力学建模后获得的.如果仅把忆阻器当作一个非线性电阻元件进行忆阻电路的动力学降维建模,忆阻电路的动力学特性又为何种情况?基于对蔡氏忆阻电路的数学建模分析,本文提出了忆阻电路动力学建模的降维问题,以包含两个磁控忆阻器的忆阻电路为例,进行了忆阻电路的动力学降维建模,基于此降维模型开展了忆阻电路的动力学特性分析研究,并对两种建模方法的分析结果进行了比较.

## 2 忆阻电路建模问题

以蔡氏忆阻电路为例说明忆阻电路的动力学建模及其降维动力学建模,由此提出忆阻电路的降维建模问题.

### 2.1 蔡氏忆阻电路

一个含忆阻器的蔡氏电路如图1所示<sup>[15,16]</sup>.该电路是通过一个无源二端口磁控忆阻器和一个负电导代替蔡氏混沌电路中的蔡氏二极管实现的.

考虑到磁控忆阻器可由一个光滑的三次单调上升的非线性函数<sup>[21]</sup>描述,即

$$q(\varphi) = a\varphi + b\varphi^3, \quad (1)$$

式中,  $q$  表示电荷,  $\varphi$  表示磁通,  $a > 0, b > 0$ . 相应

地,磁控忆阻器的忆导  $W(\varphi)$  为

$$W(\varphi) = \frac{dq(\varphi)}{d\varphi} = a + 3b\varphi^2. \quad (2)$$

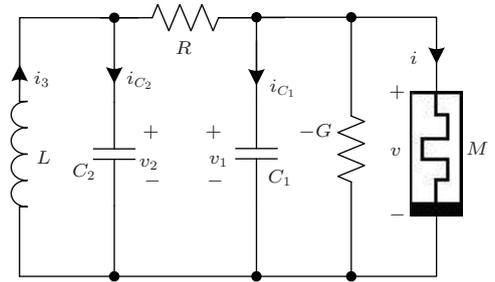


图1 蔡氏忆阻混沌电路

### 2.2 蔡氏忆阻电路常规建模

考虑到磁控忆阻器为一个动态元件,其状态变量为磁通  $\varphi$ . 其他三个动态元件电容  $C_1$ 、电容  $C_2$  和电感  $L$  分别对应的状态变量为电压  $v_1$ 、电压  $v_2$  和电流  $i_3$ . 对于图1所示的电路,运用基尔霍夫电流定律(KCL)、基尔霍夫电压定律(KVL)以及元件伏安关系(VCR),可得到定义四个状态变量  $v_1, v_2, i_3$  和  $\varphi$  之间关系的四个联立的一阶微分方程<sup>[15]</sup>,即

$$\begin{aligned} \frac{dv_1}{dt} &= \frac{1}{RC_1} [v_2 - v_1 + GRv_1 - RW(\varphi)v_1], \\ \frac{dv_2}{dt} &= \frac{1}{RC_2} [v_1 - v_2 + Ri_3], \\ \frac{di_3}{dt} &= -\frac{1}{L}v_2, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= v_1. \end{aligned} \quad (3)$$

设  $x = v_1, y = v_2, z = i_3, w = \varphi, \alpha = 1/C_1, \beta = 1/L, \xi = G, C_2 = 1$  和  $R = 1$ , 状态方程(3)式可以重写为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha(y - x + \xi x - W(w)x), \\ \dot{y} &= x - y + z, \\ \dot{z} &= -\beta y, \\ \dot{w} &= x, \end{aligned} \quad (4)$$

这表明蔡氏忆阻电路是一个四维系统.

系统(4)有一个平衡点集合  $E = \{(x, y, z, w) | x = y = z = 0, w = c\}$ , 即  $w$  坐标上的点集均是平衡点,其中  $c$  是一个实常数. 分析可知,对于  $w$  坐标上不同位置的平衡点,系统(4)有着不同的动力学特性. 因此,系统(4)的动力学

特性除了随电路参数变化外,还极端地依赖于磁控忆阻器的初始条件,具有一些与众不同的非线性动力学行为<sup>[15]</sup>.

### 2.3 蔡氏忆阻电路降维建模

基于KCL和KVL,可列出图1电路的两个节点电流方程分别为

$$\frac{v_2 - v_1}{R} - i_{C_1} + Gv_1 - i = 0, \quad (5)$$

$$i_3 - i_{C_2} - \frac{v_2 - v_1}{R} = 0, \quad (6)$$

式中  $i_{C_1}$ ,  $i_{C_2}$  和  $i$  分别表示流过电容  $C_1$ 、电容  $C_2$  和忆阻  $M$  的电流.

在(5)和(6)式两边同时对时间进行积分,以磁通和电荷为电路变量可写出如下方程:

$$\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{R} - q_{C_1} + G\varphi_1 - q(\varphi) = 0, \quad (7)$$

$$q_3 - q_{C_2} - \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{R} = 0, \quad (8)$$

式中  $q(\varphi) = a\varphi + b\varphi^3 = a\varphi_1 + b\varphi_1^3$ . (7)和(8)式表明在电路节点上图1电路满足电荷守恒定律.

图1电路中,电容和电感的元件特性关系式有

$$C_1 v_1 = q_{C_1} = C_1 \frac{d\varphi_1}{dt},$$

$$C_2 v_2 = q_{C_2} = C_2 \frac{d\varphi_2}{dt},$$

$$Li_3 = L \frac{dq_3}{dt} = -\varphi_2.$$

将其代入(7)和(8)式并整理后可得,以磁通  $\varphi_1$ 、磁通  $\varphi_2$  和电荷  $q_3$  为状态变量的微分方程为

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_1}{dt} &= \frac{1}{C_1} \left[ \left( G - a - \frac{1}{R} \right) \varphi_1 - b\varphi_1^3 + \frac{\varphi_2}{R} \right], \\ \frac{d\varphi_2}{dt} &= \frac{1}{C_2} \left( \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R} + q_3 \right), \\ \frac{dq_3}{dt} &= -\frac{\varphi_2}{L}. \end{aligned} \quad (9)$$

令  $x = \varphi_1$ ,  $y = \varphi_2$ ,  $z = q_3$ ,  $\alpha = 1/C_1$ ,  $\beta = 1/L$ ,  $\xi = G$ ,  $C_2 = 1$  和  $R = 1$ , (9)式的状态方程可以重写为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha(y - x) - \alpha f(x), \\ \dot{y} &= x - y + z, \\ \dot{z} &= -\beta y, \end{aligned} \quad (10)$$

式中  $f(x) = (a - \xi)x + bx^3$ .

与系统(4)进行比较,显然系统(10)在维数上降了一维,变成了一个三维系统.不难看出,系统

(10)的方程形式与光滑蔡氏电路方程形式<sup>[22]</sup>完全一致.因此,系统(10)具有与光滑蔡氏混沌电路完全相同的动力学特性.然而,在基于系统(10)模型进行蔡氏忆阻电路动力学分析时,无法展示出由磁控忆阻器内部状态变量的初始条件所引起的各种非线性现象<sup>[15]</sup>.

## 3 忆阻电路降维建模

以包含两个无源二端口光滑磁控忆阻器的忆阻电路为例,进行忆阻电路的降维动力学建模和动力学特性分析.

### 3.1 包含两个磁控忆阻器的忆阻电路

包含两个磁控忆阻器的忆阻电路如图2所示<sup>[19]</sup>,该电路是从蔡氏混沌电路演变而来.用一个磁控忆阻和一个负电导构成的有源忆阻电路来代替原电路中的蔡氏二极管,再在LC谐振部分与RC非线性滤波部分之间的耦合电路上插入一个磁控忆阻器.两个磁控忆阻器具有相同的电路特性,其数学表达式为

$$q(\varphi) = \varphi + \varphi^3, \quad (11)$$

忆导  $W(\varphi)$  为

$$W(\varphi) = 1 + 3\varphi^2. \quad (12)$$

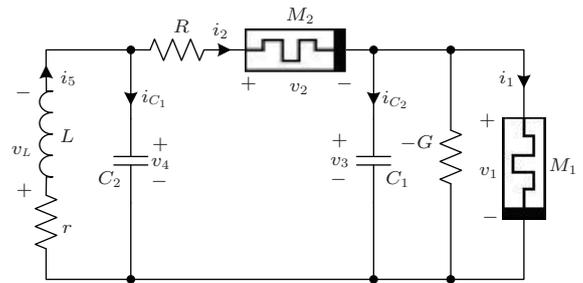


图2 包含两个磁控忆阻器的忆阻电路

若考虑磁控忆阻器为动态元件,则图2电路由五个动态元件组成,分别是两个磁控忆阻、两个电容和一个电感,它们所对应的五个状态变量分别是  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $v_3$ ,  $v_4$  和  $i_5$ . 这里  $\varphi_1$  和  $\varphi_2$  分别是两个磁控忆阻器的内部状态变量.

由KCL, KVL和元件VCR可得到图2电路的状态方程为五个联立的一阶微分方程<sup>[19]</sup>,即

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = v_3,$$

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_2}{dt} &= \frac{v_4 - v_3}{RW_2 + 1}, \\ \frac{dv_3}{dt} &= \frac{1}{C_1} \left[ (G - W_1)v_3 - \frac{W_2}{RW_2 + 1}(v_3 - v_4) \right], \\ \frac{dv_4}{dt} &= \frac{1}{C_2} \left[ \frac{W_2}{RW_2 + 1}(v_3 - v_4) + i_5 \right], \\ \frac{di_5}{dt} &= -\frac{1}{L}v_4 - \frac{r}{L}i_5, \end{aligned} \quad (13)$$

式中,  $W_1 = 1 + 3\varphi_1^2$ ,  $W_2 = 1 + 3\varphi_2^2$ . 设  $x = \varphi_1$ ,  $y = \varphi_2$ ,  $z = v_3$ ,  $u = v_4$ ,  $v = i_5$ ,  $a = 1/C_1$ ,  $b = 1/L$ ,  $c = r/L$ ,  $d = G$ ,  $e = R$ ,  $C_2 = 1$ , (13) 式的状态方程可以重写为<sup>[19]</sup>

$$\begin{aligned} \dot{x} &= z, \\ \dot{y} &= (u - z)h(y), \\ \dot{z} &= az(d - 1 - 3x^2) \\ &\quad - a(z - u)(1 + 3y^2)h(y), \\ \dot{u} &= (z - u)(1 + 3y^2)h(y) + v, \\ \dot{v} &= -bu - cv, \end{aligned} \quad (14)$$

式中  $h(y) = \frac{1}{1 + e + 3ey^2}$ .

若考虑磁控忆阻器为动态元件, 则包含两个磁控忆阻器的忆阻电路是一个五维系统, 其动力学特性由系统(14)描述. 基于系统(14), 可以对包含两个磁控忆阻器的忆阻电路进行理论分析, 但推演过程较为复杂.

### 3.2 动力学降维建模

定义包含两个磁控忆阻器的忆阻电路中各元件电压的方向和电流的方向为关联参考方向, 如图2所示. 由KCL和KVL可得, 图2电路的节点方

程和回路方程分别为

$$i_2 - i_{C_1} + Gv_3 - i_1 = 0, \quad (15)$$

$$i_5 - i_{C_2} - i_2 = 0, \quad (16)$$

$$v_4 - Ri_2 - v_2 - v_3 = 0, \quad (17)$$

$$v_L + ri_5 + v_4 = 0, \quad (18)$$

式中,  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $i_{C_1}$ ,  $i_{C_2}$  和  $i_5$  分别表示流过忆阻  $M_1$ 、忆阻  $M_2$ 、电容  $C_1$ 、电容  $C_2$  和电感  $L$  的电流;  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$ ,  $v_4$  和  $v_L$  分别表示忆阻  $M_1$ 、忆阻  $M_2$ 、电容  $C_1$ 、电容  $C_2$  和电感  $L$  两端的电压.

在(15)—(18)式两边同时对时间进行积分, 以磁通和电荷为电路变量可写出如下方程:

$$q_2 - q_{C_1} + G\varphi_3 - q_1 = 0, \quad (19)$$

$$q_5 - q_{C_2} - q_2 = 0, \quad (20)$$

$$\varphi_4 - Rq_2 - \varphi_2 - \varphi_3 = 0, \quad (21)$$

$$\varphi_L + rq_5 + \varphi_4 = 0. \quad (22)$$

(19)—(22)式遵循了节点电荷守恒定律和回路能量守恒定律. 图2电路中, 忆阻、电容和电感的元件特性关系有

$$q_1 = \varphi_1 + \varphi_1^3 = \varphi_3 + \varphi_3^3,$$

$$q_2 = \varphi_2 + \varphi_2^3,$$

$$C_1v_3 = q_{C_1} = C_1 \frac{d\varphi_3}{dt},$$

$$C_2v_4 = q_{C_2} = C_2 \frac{d\varphi_4}{dt},$$

$$Li_5 = L \frac{dq_5}{dt} = \varphi_L.$$

将上述各元件特性关系式代入(19)—(22)式中并加以整理, 以  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  和  $q_5$  为状态变量可得到图2电路的状态方程为

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_1}{dt} &= \frac{1}{C_1} [(G - 1)\varphi_1 - \varphi_1^3 + \varphi_2 + \varphi_2^3], \\ \frac{d\varphi_2}{dt} &= \frac{C_2(1 - G)\varphi_1 + C_2\varphi_1^3 - (C_1 + C_2)(\varphi_2 + \varphi_2^3) + C_1q_5}{C_1C_2(1 + R + 3R\varphi_2^2)}, \\ \frac{dq_5}{dt} &= -\frac{1}{L} [\varphi_1 + (1 + R)\varphi_2 + R\varphi_2^3 + rq_5]. \end{aligned} \quad (23)$$

需要说明的是, 此处也可以以两个电容磁通和一个电感电荷为状态变量列写图2电路的状态方程, 但表达式较为复杂, 且不能与文献[19]的结果直接进行比较.

设  $x = \varphi_1$ ,  $y = \varphi_2$ ,  $z = q_5$ ,  $a = 1/C_1$ ,  $b = 1/L$ ,  $c = r/L$ ,  $d = G$ ,  $e = R$ ,  $C_2 = 1$ , (23) 式的状态方程可以重写为

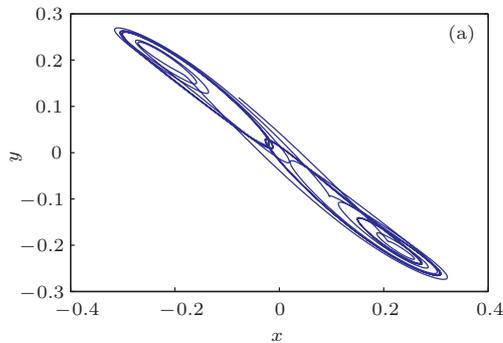
$$\dot{x} = a[(d - 1)x - x^3 + y + y^3],$$

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \frac{a(1-d)x + ax^3 - (1+a)(y+y^3) + z}{1+e+3ey^2}, \\ \dot{z} &= -b[x + (1+e)y + ey^3] - cz. \end{aligned} \quad (24)$$

将系统(24)与(14)进行比较可知:由系统(24)所表示的包含两个磁控忆阻器的忆阻电路在系统维数上降了两维,从五维系统变成了一个三维系统;同样的忆阻电路,但在系统动力学建模上有着很大的不同,降维动力学建模在很大程度上降低了系统数学模型的复杂性.

### 3.3 降维模型的混沌吸引子

根据文献[19],选择与之相同的电路参数  $a = 8, b = 10, c = 0, d = 2$  和  $e = 0.1$ . 对于



初始条件  $(0.001, 0, 0)$ , 系统(24)生成了一个双涡卷混沌吸引子,其运行轨线在相平面上的投影如图3所示.图3(a)所示的相轨图与文献[19]中对应的相轨图是完全一致的.利用Jacobi方法计算得到Lyapunov指数  $L_1 = 0.0643, L_2 = -0.0191, L_3 = -1.9926$ .因此,从忆阻电路的相轨图和Lyapunov指数可知,包含两个磁控忆阻器的忆阻电路是混沌振荡的.

## 4 降维模型的动力学特性

基于系统(24)表示的降维模型,分析了电路参数变化时包含两个磁控忆阻器的忆阻电路的动力学特性.

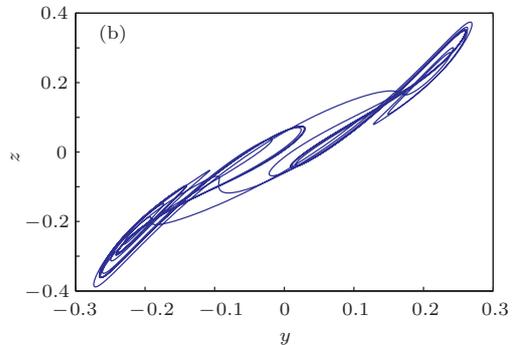


图3 混沌吸引子的投影 (a)  $x-y$  平面相轨; (b)  $y-z$  平面相轨

### 4.1 平衡点与稳定性

选择电路参数

$$a = 8, \quad b = 10, \quad c = 0, \quad d = 2, \quad e = 0.1.$$

令  $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$ , 可知系统(24)存在三个平衡点,分别为

$$\begin{aligned} S_0 &= (0, 0, 0), \quad S_1 = (0.2330, -0.2109, -0.2203), \\ S_2 &= (-0.2330, 0.2109, 0.2203). \end{aligned}$$

由此可知,  $S_1$  和  $S_2$  是关于原点对称的一对平衡点.

系统(24)在平衡点  $S^* = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  处的Jacobi矩阵  $J_{S^*}$  为

$$J_{S^*} = \begin{pmatrix} 8 - 24\bar{x}^2 & 8 + 24\bar{y}^2 & 0 \\ (-8 + 24\bar{x}^2)k & (k_1 + k_2)k^2 & k \\ -10 & -11 - 3\bar{y}^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (25)$$

式中,  $k = 1/(1.1 + 0.3\bar{y}^2), k_1 = -9.9 - 27\bar{y}^2 - 2.7\bar{y}^4, k_2 = 0.6\bar{y}(8\bar{x} - 8\bar{x}^3 - z)$ . 特征根方程为

$$\det(\mathbf{1}\lambda - J_{S^*}) = 0. \quad (26)$$

因此,系统(24)在原点平衡点  $S_0$  处的特征根为  $\lambda_1 = 1.4381, \lambda_{2,3} = -0.81 \pm j2.0978$ . 这表明系统(24)的原点平衡点  $S_0$  是一个不稳定的鞍点,即指数1平衡点.系统(24)在两个非零平衡点  $S_1$  和  $S_2$  处有着相同的特征根,即  $\lambda_1 = -3.0078, \lambda_{2,3} = 0.2711 \pm j2.1769$ . 这表明系统(24)的两个非零平衡点  $S_1$  和  $S_2$  是不稳定的鞍点,即指数2平衡点.系统(24)在这两个非零平衡点  $S_1$  和  $S_2$  处可形成混沌吸引子的涡卷.由此也说明系统(24)所生成的图3所示的混沌吸引子为双涡卷混沌吸引子.

### 4.2 分岔分析

利用分岔图、Lyapunov指数谱和相轨图等动力学分析手段,可对系统(24)进行动力学特性分析.

固定电路参数  $a = 8, c = 0, d = 2$  和  $e = 0.1$ , 系统(24)随参数  $b$  变化的分岔图如图4所示,其中图4(c)为图4(a)和(b)在  $[9.2, 12]$  区间内分岔模式

共存的局部分岔图,  $x_0$  为变量  $x$  的初始值. 在 [9.03, 11.3] 区间内, 系统 (24) 是混沌的. 从分岔图可观察到系统通向混沌的道路, 随着  $b$  的逐步减小, 从不稳定的周期轨道, 历经倍周期分岔后进入到混沌轨道, 最后由于混沌危机引发运行轨道状态突变, 形成了周期轨道. 显然, 在混沌区域中系统运行轨迹存在若干个周期窗. 从分岔图也可观察到, 对于不同的初始条件, 系统 (24) 存在两种不同的分岔模式 [23,24]. 这两种共存的分岔模式是由于系统 (24) 存在两个不同的非零平衡点引起的.

当  $c = 0$ ,  $b$  发生变化时, 系统 (24) 的三个平衡点位置固定不变, 但在三个平衡点处的特征根发生了变化. 当  $b = 12$  时, 系统 (24) 在原点平

衡点  $S_0$  处的特征根变化为  $\lambda_1 = 1.3075$ ,  $\lambda_{2,3} = -0.7447 \pm j2.4739$ , 在非零平衡点  $S_1$  和  $S_2$  处的特征根变化为  $\lambda_1 = -2.8160$ ,  $\lambda_{2,3} = 0.1752 \pm j2.4774$ . 由此可知, 参数  $b$  增大后, 原点平衡点  $S_0$  处的排斥力减弱不明显, 但两个非零平衡点  $S_1$  和  $S_2$  处的吸引力减弱较明显, 从而形成了分岔模式共存现象.

参数  $b$  在 [10.69, 13] 区间内变化时, 两个不同的非零平衡点对称地位于  $x$  轴的正负值区间, 它们都是吸引的, 在各自邻域形成一个吸引域, 但彼此之间存在着一个较大的间隙. 从位于不同区域内的初始条件出发的系统运行轨线, 随着时间的演化很快地落入各自的吸引域中, 其轨迹点在  $x$  轴上的投影分别形成了分岔图的上吸引区域或下吸引区域.

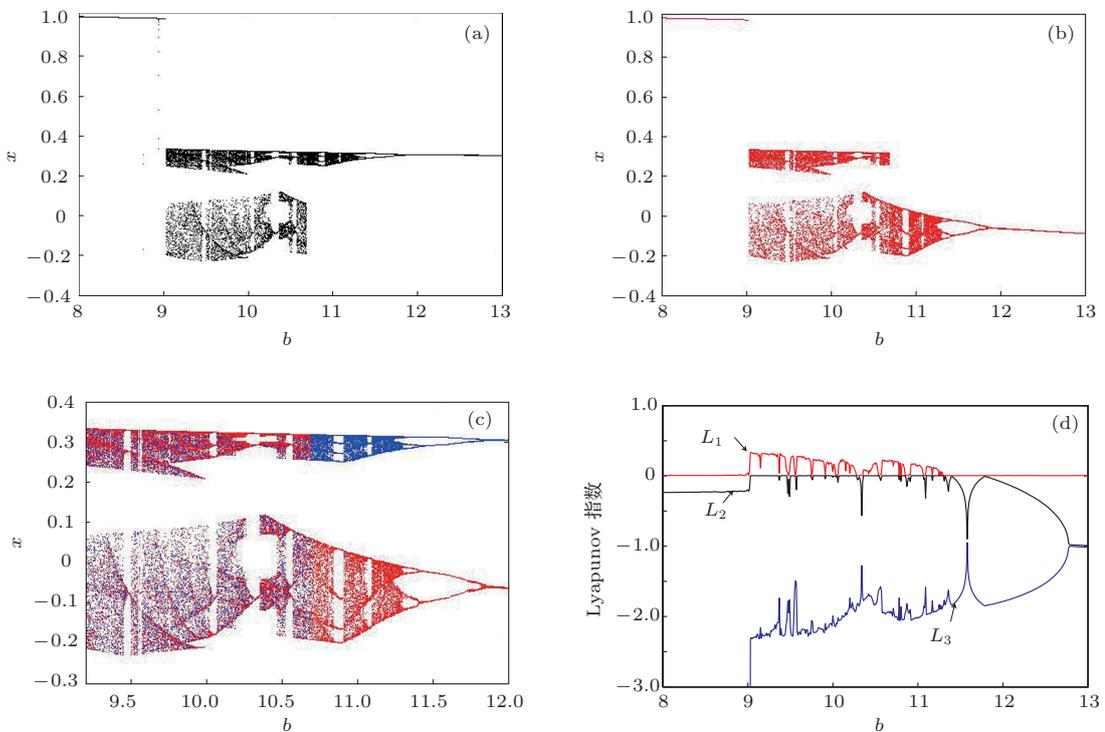


图4 系统 (24) 的分岔图和 Lyapunov 指数谱 (a) 分岔图,  $x_0 > 0$ ; (b) 分岔图,  $x_0 < 0$ ; (c) 局部分岔图; (d) Lyapunov 指数谱

系统 (24) 随参数  $b$  变化的 Lyapunov 指数谱如图 4(d) 所示. 为了清晰, 图 4(d) 中第三根 Lyapunov 指数曲线  $L_3$  只画出了其中的一部分. 从图 4 可以看出, 分岔图所表示的动力学行为的演变趋势与 Lyapunov 指数谱所表示的动力学行为的演变趋势是一致的. 从图 4(d) 可观察到, 处于混沌状态时, 系统具有一个正值 Lyapunov 指数、一个零值 Lyapunov 指数和一个负值 Lyapunov 指数.

图 5 给出了系统 (24) 随参数  $b$  减少时一些典型的周期轨道和混沌轨道. 图 5(a) 和 (b) 分别描述了

共存的周期极限环和单涡卷混沌吸引子, 初始条件中  $x_0 > 0$  时周期极限环和单涡卷混沌吸引子位于  $x$  轴的上区域, 而  $x_0 < 0$  时周期极限环和单涡卷混沌吸引子则位于  $x$  轴的下区域. 图 5(c) 和 (d) 分别给出了另一个混沌和周期轨道, 这时分岔模式共存现象消失.

## 5 两种模型的特性比较

常规模型系统 (14) 是基于忆阻器为动态元件的前提下以电容电压、电感电流和忆阻磁通为状态

变量得到的一个五维混沌系统,而降维模型系统(24)是以忆阻磁通和电感电荷为状态变量得到的一个三维混沌系统.因此,在系统建模的复杂度方面,系统(24)要比系统(14)简化很多.这两种模型所表示的系统在动力学特性方面存在差别,下面从平衡点、稳定性和随电路参数变化的动力学特性三方面对两者进行比较.

### 5.1 平衡点及稳定性比较

系统(14)的平衡点为一个集合<sup>[19]</sup>

$$E = \{(x, y, z, u, v) | z = u = v = 0, x = c_1, y = c_2\}, \quad (27)$$

即位于  $x$ - $y$  平面上的每一个点均是平衡点. 这

里  $c_1$  和  $c_2$  是实常数. 在平衡点处系统(14)除了三个非零特征根外,还有两个零特征根. 零特征根为系统稳定与不稳定的临界值,从而导致系统(14)的稳定性分析变得较为复杂.

(27)式所表示的平衡点集处系统稳定性除了取决于电路参数外,还依赖于表示两个忆阻器内部状态变量初始条件的参数  $c_1$  和  $c_2$ . 因此,从  $x$ - $y$  平面上某一点出发的运行轨线可能趋于一个稳定的汇,也可能趋于一个不稳定的极限环(混沌轨道)或者可能无穷发散.

然而,系统(24)的平衡点为有限数量,仅有三个,其稳定性仅仅取决于电路参数. 因此,在平衡点和稳定性方面,系统(24)明显要比系统(14)更易于分析和解析表达,从而便于优化配置系统平衡点.

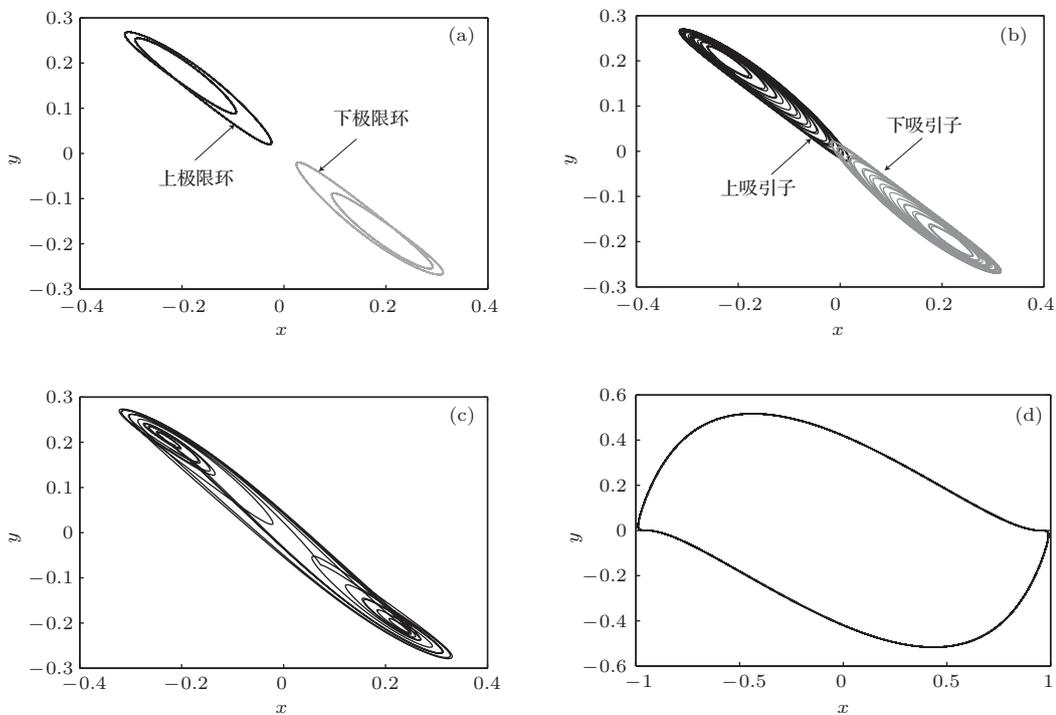


图5 当  $b$  取不同参数时,系统(24)所表示忆阻电路的相轨图 (a)  $b = 11.5$ ; (b)  $b = 11$ ; (c)  $b = 9.2$ ; (d)  $b = 9$

### 5.2 动力学特性比较

选择与图4相同的电路参数,系统(14)随参数  $b$  变化的分岔图(变量  $v$  的初始值  $v_0 < 0$ )和相应的 Lyapunov 指数谱如图6(a)和(b)所示.为了清晰,图6(b)中第五根 Lyapunov 指数曲线  $L_5$  只画出了其中的一部分.比较图6(a)和图4(b)的分岔图以及比较图6(b)和图4(d)的 Lyapunov 指数谱可见,在相同的电路参数下系统(14)与系统(24)有着基本一致的动力学行为,只是图6(b)的 Lyapunov 指

数谱多了两根指数均为零的曲线(图中标注为  $L_2$  和  $L_3$ ).由此说明,忆阻电路的常规建模和降维建模对电路元件参数有着基本一致的动力学特性.

此外,系统(14)对于忆阻器内部状态变量初始条件极其敏感,且其初始条件有传递性,因此对于不同的初始条件,系统(14)的动力学行为有着完全不同的特性.而系统(24)则对忆阻器内部状态变量初始条件的依赖性不是很强,即(24)式所表示的降维模型消除了忆阻器内部状态变量初始条件对忆阻电路动力学特性的影响,无法体现出忆阻器内部

所独特的记忆特性. 这是由于在对忆阻电路动力学降维建模时, 采用了以物理量磁通  $\varphi$  和电荷  $q$  为状态变量而不是以物理量电压  $v$  和电流  $i$  为状态变量所致. 物理量  $\varphi, q$  在数学上分别是  $v, i$  的时间积分, 本身就能展现出一种记忆特征<sup>[25]</sup>. 例如在忆阻器中, 当电源关闭时, 电压  $v$  和电流  $i$  即时为零, 但忆阻器不丢失  $\varphi$  和  $q$  的值<sup>[6]</sup>. 实际上,  $\varphi$  或  $q$  可视作为一种理想的忆阻器“状态”<sup>[26]</sup>, 能记住过去发生的事情. 因此, 忆阻的记忆特性是直接体现在降维模型所采用的物理量上, 而不是体现在降维模型的动力学方程中.

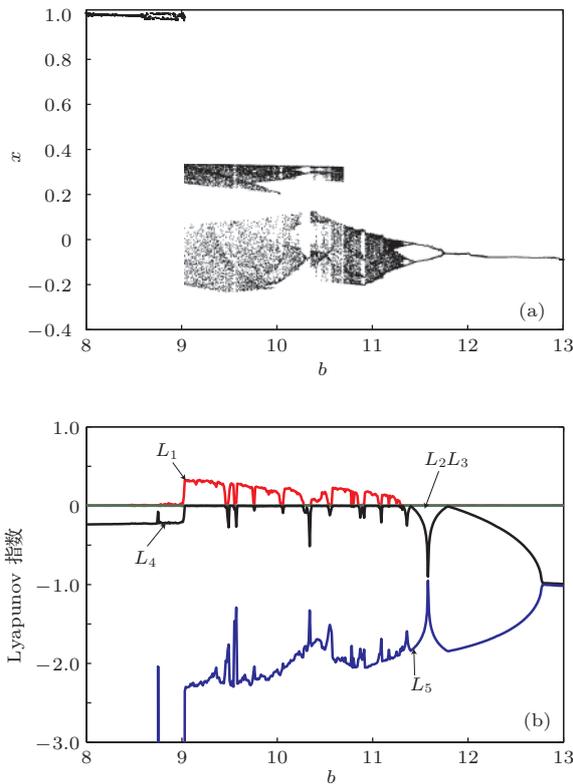


图6 系统(14)的分岔图和Lyapunov指数谱 (a) 分岔图 ( $v_0 < 0$ ); (b) Lyapunov指数谱

## 6 结 论

若忆阻器作为动态元件, 则电路的阶数因忆阻的引入而增加; 若忆阻不作为动态元件, 则电路的阶数不因忆阻的引入而改变. 由此导致忆阻电路的动力学建模存在以下两种建模方法: 一种是以电容电压、电感电流和忆阻磁通(或忆阻电荷)作为状态变量的常规建模; 另一种则是以电容磁通和电感电荷作为状态变量的降维建模. 以包含两个磁控忆阻器的忆阻电路为例, 本文建立了忆阻电路的动力学降维模型. 基于该模型, 分析了忆阻电路的平衡点

和稳定性, 研究了电路参数变化时忆阻电路的动力学特性. 研究表明: 包含两个磁控忆阻器的忆阻电路的降维模型是一个三维系统模型, 具有三个确定的平衡点, 可生成双涡卷混沌吸引子, 当电路参数变化时系统存在分岔模式共存等非线性现象; 与常规建模相比, 降维建模可以降低忆阻电路系统模型的复杂度, 便于解析表达, 有利于系统的动力学特性分析.

## 参考文献

- [1] Bao B C, Yang P, Ma Z H, Zhang X 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 220502 (in Chinese)[包伯成, 杨平, 马正华, 张希 2012 物理学报 **61** 220502]
- [2] Yang P, Xu J P, He S Z, Bao B C 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 160501 (in Chinese)[杨平, 许建平, 何圣仲, 包伯成 2013 物理学报 **62** 160501]
- [3] Bao B C, Zhou G H, Xu J P, Liu Z 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 3769 (in Chinese)[包伯成, 周国华, 许建平, 刘中 2010 物理学报 **59** 3769]
- [4] Lu Y L, Jiang G P, Song Y R 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 130202 (in Chinese)[鲁延玲, 蒋国平, 宋玉蓉 2013 物理学报 **62** 130202]
- [5] Zhao J, Yu L, Li J R 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 130201 (in Chinese)[赵佳, 喻莉, 李静茹 2013 物理学报 **62** 130201]
- [6] Strukov D B, Snider G S, Stewart D R, Williams R S 2008 *Nature* **453** 80
- [7] Borghetti J, Snider G S, Kuekes P J, Yang J J, Stewart D R, Williams R S 2010 *Nature* **464** 873
- [8] Pershin Y V, Fontaine S L, Di Ventra M 2009 *Phys. Rev. E* **80** 021926
- [9] Wu A L, Zeng Z G 2012 *Neural Networks* **36** 1
- [10] Shin S, Kim K, Kang S M 2011 *IEEE Trans. Nanotechnol.* **10** 266
- [11] Witrals K 2009 *Electron. Lett.* **45** 713
- [12] Bao B C, Feng F, Dong W, Pan S H 2013 *Chin. Phys. B* **22** 068401
- [13] Li Z J, Zeng Y C 2013 *Chin. Phys. B* **22** 040502
- [14] Bao B C, Xu J P, Liu Z 2010 *Chin. Phys. Lett.* **27** 070504
- [15] Bao B C, Liu Z, Xu J P 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 3785 (in Chinese)[包伯成, 刘中, 许建平 2010 物理学报 **59** 3785]
- [16] Bao B C, Hu W, Xu J P, Liu Z, Zou L 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 120502 (in Chinese)[包伯成, 胡文, 许建平, 刘中, 邹凌 2011 物理学报 **60** 120502]
- [17] Bao B C, Liu Z, Xu J P 2010 *Chin. Phys. B* **19** 030510
- [18] Bao B C, Xu J P, Zhou G H, Ma Z H, Zou L 2011 *Chin. Phys. B* **20** 120502
- [19] Bao B C, Shi G D, Xu J P, Liu Z, Pan S H 2011 *Sci. China: Tech. Sci.* **54** 2180
- [20] El-Sayed A M A, Elsaid A, Nour H M, Elsonbaty A 2013 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **18** 148
- [21] Bao B C, Liu Z, Xu J P 2010 *Electron. Lett.* **46** 237
- [22] Tsuneda A 2005 *Int. J. Bifur. Chaos* **5** 1
- [23] Meng J D, Bao B C, Xu Q 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 010504 (in Chinese)[孟继德, 包伯成, 徐强 2011 物理学报 **60** 010504]

[24] Zhang X F, Chen Z Y, Ji Y, Bi Q S 2009 *Chin. J. Theor. Appl. Mech.* **41** 765 (in Chinese)[张晓芳, 陈章耀, 季颖, 毕勤胜 2009 力学学报 **41** 765]

[25] Chua L O 2011 *Appl. Phys. A* **102** 765

[26] Wang F 2013 *IEEE Trans. Circuits Syst. I* **60** 616

## Dimensionality reduction modeling and characteristic analysis of memristive circuit\*

Bao Bo-Cheng<sup>1)†</sup> Wang Chun-Li<sup>1)</sup> Wu Hua-Gan<sup>2)</sup> Qiao Xiao-Hua<sup>3)</sup>

1) (School of Information Science and Engineering, Changzhou University, Changzhou 213164, China)

2) (Department of Electronic Engineering, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China)

3) (School of Electrical and Information Engineering, Jiangsu University of Technology, Changzhou 213001, China)

( Received 30 July 2013; revised manuscript received 17 September 2013 )

### Abstract

Through mathematical modeling analysis of Chua's memristive circuit, the problem of dimensionality reduction for dynamical modeling of memristive circuit is proposed. Taking memristive circuit with two memristors for example, dimensionality reduction modeling of the memristive circuit is performed, on which a three-dimensional system model is established. Based on this model, the equilibrium points and stabilities are analyzed, and the dynamical characteristics, when the parameters are varied, are investigated. Furthermore, the analysis results from the conventional model are compared with the results from the dimensionality reduction model of memristive circuit with two memristors. The results indicate that the dimensionality of the dimensionality reduction model of memristive circuit is related to the number of capacitors and inductors only, but unrelated to the number of memristors; there exist nonlinear phenomena about the coexistence of bifurcation modes in the memristive circuit when circuit parameters are varied; the dimensionality reduction modeling reduces the complexity of system modeling, which is conducive to dynamical characteristic analysis of the system but eliminates the effect of the initial conditions of the memristors internal state variables on dynamical characteristics of memristive circuit.

**Keywords:** memristive circuit, modeling, dimensionality reduction, dynamics

**PACS:** 05.45.-a

**DOI:** 10.7498/aps.63.020504

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 51277017) and the Natural Science Foundation of Jiangsu Province, China (Grant No. BK2012583).

† Corresponding author. E-mail: [mervinbao@126.com](mailto:mervinbao@126.com)