物理学报 Acta Phys. Sin. Vol. 63, No. 20 (2014) 200202

具有一般非线性弹性力和广义阻尼力的相对转动非线性系统的周期解问题*

李晓静† 严静 陈绚青 曹毅

(江苏理工学院数理学院, 常州 213001)

(2014 年 4 月 14 日收到; 2014 年 5 月 16 日收到修改稿)

讨论了一类相对转动非线性动力系统的周期解问题. 首先建立了一类具有一般非线性弹性力、广义阻尼力和强迫周期力项的相对转动非线性动力系统; 其次得到了对应自治系统的周期解不存在性结果, 以及运用 Mawhin 重合度理论得到了该模型的周期解存在性结果, 推广了已有的结果; 最后举例证明本文结果的正确性.

关键词: 相对转动, 非线性动力系统, 周期解

PACS: 02.30.Hq, 45.20.dc **DOI:** 10.7498/aps.63.200202

1 引 言

相对转动系统是一种广泛存在的能量传输系统, 是学术界非常值得关注的研究对象, 许多学者已使用不同的方法对其做了多方位的研究. Carmeli[1,2] 于 1985 年建立了转动相对论力学理论; 1996 和 1998 年, Luo[3,4] 建立了转动相对论分析力学理论. 近年来, 在 Birkhoff 系统动力学基本理论、几何理论及稳定性等研究领域取得了成果 [5−8]. 文献 [9] 建立了一类含周期参激刚度的相对转动非线性系统的动力学方程.

在相对转动非线性系统的周期解问题的研究中, 文献 [10] 针对如下具有强阻尼力和强振幅周期激励的一类 Duffing 系统:

$$\ddot{x} + k\dot{x} + a_1x + a_3x^3 = k\cos(\omega t), \tag{1}$$

其中 $k > 0$, $a_1 > 0$, $a_3 \geqslant 0$, 作者应用 Yoshizawa 关于非线性系统周期解惟一性的三组条件, 证明了该系统周期解的存在性、惟一性和有界性, 同时把该结论推广到如下一类更广泛的非线性周期系统:

$$\ddot{x} + kb\dot{x} + \sum_{i=0}^{n} a_{2i+1}x^{2i+1} = kp(t), \tag{2}$$

其中 $k > 0, b > 0$, $a_1 > 0$, $a_{2i+1} \geqslant 0$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$, $p(t)$ 是以 ω 为周期的连续函数. 文献 [11] 在阻尼力项为齐次多项式的条件下, 研究了如下一类具有强迫周期力项的相对转动非线性动力学系统

$$\ddot{x} + \sum_{k=0}^{n} a_{2k+1}\dot{x}^{2k+1} + bx = F(t) \tag{3}$$

的周期解问题, 其中 $x = \theta_2 - \theta_1$ 为相对转角, 这里 θ_1, θ_2 分别为弹性转轴两端面的转角;

$$F(t) = \frac{6}{J}(T_2 - T_1),$$

其中 J 为弹性转轴的转动惯量, T_1, T_2 分别为弹性转轴两端面的外加力矩, 且设 $F(t)$ 是圆频率为 ω 的连续周期函数; 而系数 $b > 0, a_1 > 0, a_{2k+1} \geqslant 0$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$; 作者应用 Yoshizawa 关于非线性系统周期解的理论, 证明了系统周期解的存在性、惟一性和有界性. 文献 [12] 研究了如下一类具有一

* 国家自然科学基金 (批准号: 51277017, 11202106)、江苏省自然科学基金 (批准号: BK2012583, 13KJB170016) 和江苏理工学院青年基金 (批准号: KYY13032) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: lixiaojing14@jstu.edu.cn

 http://wulixb.iphy.ac.cn

般广义阻尼力的相对转动非线性动力学系统:

$$x'' + K_1 f(x') + K_2 x = F(t), \tag{4}$$

其中 $f(x')$ 为相对转速 x' 的任意函数; $F(t)$ 为外干扰力或称为外激励; K_1, K_2 的具体意义见文献 [12]. 运用 Mawhin 重合度理论, 得到了该方程周期解的存在性、有界性和惟一性结果.

但是很少有文献建立具有一般非线性弹性力和广义阻尼力的相对转动非线性动力系统, 特别是对其周期解问题的研究并不多见. 本文在文献 [10—12] 的基础上, 同时考虑具有一般非线性弹性力和广义摩阻力的作用下, 建立相对转动非线性动力系统, 并讨论该系统的周期解问题. 这种方法曾为学者们成功地解决了一些非线性问题的周期解问题[12−23].

2 动力学模型

对于两质量的相对转动系统, 设 J_1, J_2 为相对转动系统集中质量的转动惯量, θ_1, θ_2 分别为两个集中质量的转角, $\dot\theta_1, \dot\theta_2$ 分别为两个集中质量的转速, $\ddot\theta_1, \ddot\theta_2$ 分别为两个集中质量的角加速度, F_1 和 F_2 分别是两个集中质量的外加力矩. 取阻尼力 (阻尼力矩) 为

$$F_1^{\mathrm{c}} = -f(\dot\theta_1 - \dot\theta_2), \tag{5}$$

$$F_2^{\mathrm{c}} = f(\dot\theta_1 - \dot\theta_2), \tag{6}$$

其中 $f(\dot\theta_1 - \dot\theta_2)$ 为相对转速差的任意函数. 将 (5) 和 (6) 式代入动力学普遍方程

$$\sum_{i=1}^{n} (F_i^{(j)} - J_i \ddot\theta_i)\delta\theta_i = 0, \tag{7}$$

其中 $F_i^{(j)} = F_i + F_i^{\mathrm{c}}$. 广义力 (广义力矩) 为

$$Q_r = \sum_{i=1}^{n} F_i^{(j)} \frac{\partial \theta_i}{\partial q_r} \quad (r = 1, 2), \tag{8}$$

其中 $q_r (r = 1, 2)$ 为广义坐标, n 为自由度数目. 将 (5) 和 (6) 式代入 (8) 式后得本系统的广义力 (广义力矩) 为

$$Q_1 = F_1 - f(\dot\theta_1 - \dot\theta_2), \tag{9}$$

$$Q_2 = F_2 + f(\dot\theta_1 - \dot\theta_2). \tag{10}$$

相对转动系统的动能为

$$E = \frac{1}{2} J_1 \dot\theta_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot\theta_2^2, \tag{11}$$

且本系统的势能为

$$U(\theta_1 - \theta_2) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1} a_i (\theta_1 - \theta_2)^{i+1}, \tag{12}$$

则得系统的恢复力

$$g(\theta_1 - \theta_2) = \sum_{i=1}^{n} a_i (\theta_1 - \theta_2)^i,$$

其中 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 为系统扭转刚度, 故将 (5), (6) 和 (9)—(12) 式代入如下拉格朗日动力学方程:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial E}{\partial \dot\theta_r} - \frac{\partial E}{\partial \theta_r} + \frac{\partial U}{\partial \theta_r} = Q_r \quad (r = 1, 2),$$

得

$$J_1 \ddot\theta_1 + f(\dot\theta_1 - \dot\theta_2) + g(\theta_1 - \theta_2) = F_1, \tag{13}$$

$$J_2 \ddot\theta_2 - f(\dot\theta_1 - \dot\theta_2) - g(\theta_1 - \theta_2) = F_2. \tag{14}$$

在工程中最关心相对转角的变化, 故将 (13) 式乘以 $\dfrac{1}{J_1}$ 减去 (14) 式乘以 $\dfrac{1}{J_2}$, 并令

$$x = \theta_1 - \theta_2, \quad x' = \dot\theta_1 - \dot\theta_2, \quad x'' = \ddot\theta_1 - \ddot\theta_2,$$

$$K_1 = \frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2}, \quad K_2 = \frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2},$$

$$F(t) = \frac{J_2 F_1 - J_1 F_2}{J_1 J_2},$$

则有

$$x'' + K_1 f(x') + K_2 g(x) = F(t). \tag{15}$$

本文针对具有周期性载荷的相对转动系统的非线性动力学方程, 即假定 (15) 式中的 $F(t)$ 为连续且以 ω 为周期的函数, 运用 Mawhin 重合度理论, 得到了该方程周期解的存在性结果.

为了行文方便, 假定 $\int_0^\omega F(t)\mathrm{d}t = 0$, 并取如下记号:

$$X = \{x | x \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad x(t+\omega) \equiv x(t)\},$$

其模为 $|\varphi|_0 = \underset{t \in [0,\omega]}{\max} |\varphi(t)|$; $\forall \varphi \in X$ 和 $Y = \{x | x \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ x(t+\omega) \equiv x(t)\}$, 其模为 $\|\varphi\| = \max\{|\varphi|_0, |\varphi'|_0\}$, $\forall \varphi \in Y$. 显然 X 和 Y 是两个 Banach 空间. 同时定义算子

$$L : D(L) \subset X \longrightarrow Y, Lx = x'' \tag{16}$$

和 $N : X \longrightarrow Y$,

$$\begin{aligned}[Nx](t) = &- K_1 f(x') - K_2 g(x) \\ &+ F(t), \forall t \in \mathbb{R},\end{aligned} \tag{17}$$

其中 $D(L) = \{x | x \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}), x(t+\omega) \equiv x(t)\}$. 易见 $\mathrm{Ker}(L) = \mathbb{R}$, $\mathrm{Im}(L) = \{x | x \in Y, \int_0^\omega x(s)\mathrm{d}s\}$,

因此 L 是指标为零的 Fredholm 算子[24]. 再定义投影算子:

$$P : X \to \mathrm{Ker}(L),\ Px = x(0),$$

$$Q : Y \to \mathrm{Im}(Q),\ Qy = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} y(s)\mathrm{d}s,$$

那么

$$\mathrm{Im}(P) = \mathrm{Ker}(L), \quad \mathrm{Ker}(Q) = \mathrm{Im}(L).$$

令

$$L_P = L|_{\mathrm{Ker}P\cap D(L)} : \mathrm{Ker}P \cap D(L) \longrightarrow \mathrm{Im}(L),$$

定义

$$L_p^{-1} : \mathrm{Im}L \longrightarrow \mathrm{Ker}P \cap D(L)$$

为算子 L_P 的逆算子. 由数学分析的知识和周期函数的性质可知

$$\begin{aligned}[L_p^{-1}y](t) = &-\frac{t}{\omega}\int_0^{\omega}(\omega - s)y(s)\mathrm{d}s \\ &+ \int_0^t (t-s)y(s)\mathrm{d}s, \end{aligned} \tag{18}$$

从 (17) 和 (18) 式可知, N 在 $\overline{\varOmega}$ 是 L 紧的, 这里 $\varOmega$ 是 X 中的任意有界开集.

3 对应自治系统的周期解问题

取系统 (15) 的对应自治系统

$$x'' + K_1 f(x') + K_2 g(x) = 0, \tag{19}$$

当 f 为严格单调增或严格单调减函数时, 系统 (19) 无闭轨[25], 即方程 (15) 不存在周期解.

4 系统周期解的存在性结果

定理 1 在系统 (15) 式中, 如果 $f(0) = 0$, 并且存在常数 $d > 0, \sigma > 0, b \geqslant 1, d_1 > 0, r > 0$, 使得

$[H_1]$ 当 $|x| > d$ 时, $xg(x) > 0$, 且 $|g(x)| > \dfrac{|F|_0}{K_2}$,

$[H_2]$ 当 $|x| > b$ 时, $f(x)x \geqslant \sigma|x|^n + h(x)$, 其中 $h(x) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 满足 $|h(x)| \leqslant r|x|^n, \forall |x| > d_1$,

则当 $\sigma > r$ 时, 系统 (15) 式至少存在一个 ω 周期解.

证明 考虑方程 $Lx = \lambda Nx, \lambda \in (0, 1)$, 其中 L 和 N 分别由 (16) 和 (17) 式所定义. 如果 $x(t)$ 是算子方程 $Lx = \lambda Nx$, $\lambda \in (0, 1)$ 的任一解, 则

$$x'' + \lambda K_1 f(x') + \lambda K_2 g(x) = \lambda F(t). \tag{20}$$

假设 t_1 和 t_2 分别为函数 $x(t)$ 在 $[0, \omega]$ 上的最大值点和最小值点, 则

$$x'(t_1) = 0, \quad x'(t_2) = 0,$$

$$x''(t_1) \leqslant 0, \quad x''(t_2) \geqslant 0,$$

所以由条件 $f(0) = 0$ 可知

$$K_2 g(x(t_1)) \geqslant F(t_1) \geqslant -|F|_0 \tag{21}$$

和

$$K_2 g(x(t_2)) \leqslant F(t_2) \leqslant |F|_0. \tag{22}$$

1) 如果 $K_2 g(x(t_1)) > |F|_0$, 由 (22) 式可知存在一点 $\eta \in [0, \omega]$, 使得 $g(x(\eta)) = \dfrac{|F|_0}{K_2}$, 由条件 $[H_1]$ 可以得到

$$|x(\eta)| \leqslant d. \tag{23}$$

2) 如果 $K_2 g(x(t_1)) \leqslant |F|_0$, 由 (21) 式可知 $|g(x(t_1))| \leqslant \dfrac{|F|_0}{K_2}$. 由条件 $[H_1]$ 可以得到

$$|x(t_1)| \leqslant d. \tag{24}$$

所以不管是第 1) 种还是第 2) 种情况, 从 (23) 和 (24) 两式可知存在一点 $\xi \in [0, \omega]$, 使得

$$|x(\xi)| \leqslant d.$$

利用关系

$$\begin{aligned}|x(t)| &= |x(\xi) + \int_{\xi}^{t} x'(s)\mathrm{d}s| \\ &\leqslant d + \int_0^{\omega} |x'(s)|\mathrm{d}s, \quad \forall t \in [0, \omega],\end{aligned}$$

可以得到

$$|x|_0 \leqslant d + \int_0^{\omega} |x'(t)|\mathrm{d}t. \tag{25}$$

另一方面, 将方程 (20) 两端同乘以 $x'(t)$, 同时对 t 在 $[0, \omega]$ 上积分, 则有

$$\begin{aligned}&K_1 \int_0^{\omega} f(x'(t))x'(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\omega} F(t)x'(t)\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{26}$$

令

$$\triangle_1 = \{t : t \in [0, \omega], |x'(t)| \leqslant d_1\},$$

$$\triangle_2 = \{t : t \in [0, \omega], |x'(t)| > d_1\},$$

$$\triangle_3 = \{t : t \in [0, \omega], |x'(t)| \leqslant b\},$$

$$\triangle_4 = \{t : t \in [0, \omega], |x'(t)| > b\},$$

显然由条件 $[H_2]$ 可得

$$\int_0^{\omega} |h(x'(t))|\mathrm{d}t$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\triangle_1} |h(x'(t))|\,\mathrm{d}t + \int_{\triangle_2} |h(x'(t))|\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant \omega h_{d_1} + r\int_0^{\omega} |x'(t)|^n\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}
$$

这里 $h_{d_1} = \max\limits_{|x|\leqslant d_1} |h(x)|$, 结合条件 $[H_2]$ 和 (26) 式, 有

$$
\begin{aligned}
&\sigma \int_{\triangle_4} |x'(t)|^n\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant \int_{\triangle_4} f(x'(t))x'(t)\,\mathrm{d}t - \int_{\triangle_4} h(x'(t))\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}
$$

即

$$
\begin{aligned}
&\sigma \int_0^{\omega} |x'(t)|^n\,\mathrm{d}t \\
&= \sigma \int_{\triangle_3} |x'(t)|^n\,\mathrm{d}t + \sigma \int_{\triangle_4} |x'(t)|^n\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant \sigma\omega b^n + \sigma \int_{\triangle_4} |x'(t)|^n\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant \sigma\omega b^n + \int_{\triangle_4} f(x'(t))x'(t)\,\mathrm{d}t - \int_{\triangle_4} h(x'(t))\,\mathrm{d}t \\
&= \sigma\omega b^n + \int_0^{\omega} f(x'(t))x'(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{\omega} h(x'(t))\,\mathrm{d}t \\
&\quad - \int_{\triangle_3} f(x'(t))x'(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\triangle_3} h(x'(t))\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant \int_0^{\omega} f(x'(t))x'(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{\omega} h(x'(t))\,\mathrm{d}t \\
&\quad + \sigma\omega b^n + f_b b\omega + h_b\omega \\
&= \frac{1}{K_1}\int_0^{\omega} F(t)x'(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{\omega} h(x'(t))\,\mathrm{d}t + C \\
&\leqslant \omega h_{d_1} + C + \frac{|F|_0}{K_1}\omega^{\frac{n-1}{n}}\Big(\int_0^{\omega} |x'(t)|^n\,\mathrm{d}t\Big)^{1/n} \\
&\quad + r\int_0^{\omega} |x'(t)|^n\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
C &= \sigma\omega b^n + f_b b\omega + h_b\omega, \\
f_b &= \max_{|x|\leqslant b} |f(x)|, \\
h_b &= \max_{|x|\leqslant b} |h(x)|,
\end{aligned}
$$

考虑到 $\sigma > r$ 可知存在 $M_1 > 0$, 使得

$$
\int_0^{\omega} |x'(t)|^n\,\mathrm{d}t \leqslant M_1,
$$

结合 (25) 式, 有

$$
\begin{aligned}
|x|_0 &\leqslant d + \int_0^{\omega} |x'(t)|\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant d + \omega^{\frac{n-1}{n}} M_1^{\frac{1}{n}} := M_2. \qquad (27)
\end{aligned}
$$

在方程 (20) 两边乘以 $x''(t)$, 并从 0 到 ω 积分, 有

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\omega} |x''(t)|^2\,\mathrm{d}t + \lambda K_2\int_0^{\omega} g(x(t))x''(t)\,\mathrm{d}t \\
&=\lambda\int_0^{\omega} F(t)x''(t)\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}
$$

结合 (27) 式和 Hölder 不等式, 有

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\omega} |x''(t)|^2\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant (K_2 g_{M_2} + |F|_0)\sqrt{\omega}\Big(\int_0^{\omega} |x''(t)|^2\,\mathrm{d}t\Big)^{1/2},
\end{aligned}
$$

其中 $g_{M_2} = \max\limits_{|x|\leqslant M_2} |g(x)|$, 所以存在 $M_3 > 0$, 使得

$$
\int_0^{\omega} |x''(t)|^2\,\mathrm{d}t \leqslant M_3. \qquad (28)
$$

同时, 由文献 [26] 的引理 2.1, 我们知道

$$
|x'|_0 \leqslant \frac{1}{2}\int_0^{\omega} |x''(t)|\,\mathrm{d}t,
$$

结合 (28) 式, 有 $|x'|_0 \leqslant \dfrac{\sqrt{\omega}}{2}\Big(\int_0^{\omega} |x''(t)|^2\,\mathrm{d}t\Big)^{1/2}$, 从而存在 $M_4 > 0$, 使得

$$
|x'|_0 \leqslant M_4.
$$

令

$$
\begin{aligned}
M &= \max\{d, M_2, M_4\}, \\
\varOmega &= \{x \in X : |x^{(i)}|_0 < M, i = 0, 1\}, \\
\varOmega_1 &= \{x \in \partial\varOmega : x \in \mathrm{Ker}L\},
\end{aligned}
$$

则 $\forall x \in \partial\varOmega_1$,

$$
QNx = -\frac{K_2}{\omega}\int_0^{\omega} g(x)\,\mathrm{d}t \leqslant 0.
$$

令 $J : \mathrm{Im}(Q) \longrightarrow \mathrm{Ker}(L)$ 为恒同映射, 且取变换

$$
\begin{aligned}
H(x,\mu) = &-\mu x + (1-\mu)JQNx, (x,\mu) \in \varOmega \\
&\times [0, 1],
\end{aligned}
$$

那么, $\forall (x,\mu) \in (\partial\varOmega \cap \mathrm{Ker}(L)) \times [0, 1]$, 有

$$
\begin{aligned}
H(x,\mu) = &-(1-\mu)\frac{K_2}{\omega}\int_0^{\omega} g(x)\,\mathrm{d}t - \mu x \\
&\neq 0.
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
&\deg\{JQN, \varOmega \cap \mathrm{Ker}(L), 0\} \\
&= \deg\{H(x, 0), \varOmega \cap \mathrm{Ker}(L), 0\} \\
&= \deg\{H(x, 1), \varOmega \cap \mathrm{Ker}(L), 0\} \\
&= \deg\{-I, \varOmega \cap \mathrm{Ker}(L), 0\} \neq 0,
\end{aligned}
$$

根据Mawhin重合度拓展定理可知[24], 方程(15)至少存在一个ω周期解.

5 具体例子

考虑如下非线性弹性力项和阻尼力项均为齐次多项式的相对转动非线性动力系统

$$\ddot{x}+\sum_{k=0}^{l}a_{2k+1}\dot{x}^{2k+1}+\sum_{i=0}^{m}b_{2i+1}x^{2i+1} \\ =\frac{1}{2}\cos t, \tag{29}$$

其中,

$$a_1>0,$$
$$a_{2k+1}\geqslant 0\quad(k=1,2,\cdots,l),$$
$$b_1>0,$$
$$b_{2i+1}\geqslant 0\quad(i=1,2,\cdots,m)$$

且

$$a_{2l+1}>\sum_{k=0}^{l-1}a_{2k+1},\sum_{i=0}^{m}b_{2i+1}>1.$$

此时, 取

$$K_1=K_2=1,\quad d=d_1=b=1,$$
$$n=2l+2,\quad \sigma=a_{2l+1},\quad r=\sum_{k=0}^{l-1}a_{2k+1}.$$

显然, 系统(29)式满足定理1的所有条件, 故由定理1可得系统(29)式至少存在一个2π周期解.

6 结　论

本文针对一类具有一般非线性弹性力、一般广义阻尼力和强迫周期力项的相对转动非线性动力学模型. 运用Mawhin重合度理论, 得到了该模型的周期解存在性结果. 显然, 文献[10] 研究的方程(1), (2), 文献[11]研究的方程(3)和文献[12]研究的方程(4)是本文研究方程(15)的特殊情形, 故本文推广了已有的结果.

参考文献

[1] Carmeli M 1985 *Found. Phys.* **15** 175

[2] Carmeli M 1986 *Int. J. Theor. Phys.* **15** 89

[3] Luo S K 1996 *J. Beijing Inst. Technol.* **16** (S1) 154 (in Chinese) [罗绍凯 1996 北京理工大学学报 **16** (S1) 154]

[4] Luo S K 1998 *Appl. Math. Mech.* **19** 45

[5] Luo S K, Chen X W, Fu J L 2001 *Chin. Phys.* **10** 271

[6] Luo S K 2002 *Chin. Phys. Lett.* **19** 449

[7] Luo S K, Chen X W, Guo Y X 2002 *Chin. Phys.* **11** 429

[8] Luo S K, Chen X W, Guo Y X 2002 *Chin. Phys.* **11** 523

[9] Wang Y Z, Zhou Y Z 2011 *Chin. Phys. B* **20** 040501

[10] Wang K, Guan X P, Ding X F, Qiao J M 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 6859 (in Chinese) [王坤, 关新平, 丁喜峰, 乔杰敏 2010 物理学报 **59** 6859]

[11] Wang K, Guan X P, Qiao J M 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 3648 (in Chinese) [王坤, 关新平, 乔杰敏 2010 物理学报 **59** 3648]

[12] Li X J, Chen X Q 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 210201 (in Chinese) [李晓静, 陈绚青 2012 物理学报 **61** 210201]

[13] Wang K, Zhu Y L 2010 *Neurocomputing* **73** 3300

[14] Wang K 2011 *Nonlinear Analysis: Real World Application* **12** 1062

[15] Wang X L, Du Z J, Liang J 2010 *Nonlinear Analysis: Real World Application* **11** 4054

[16] Peng S G 2007 *Nonlinear Analysis* **67** 138

[17] Xiao B, Liu B W 2009 *Nonlinear Analysis* **10** 16

[18] Tang Y, Li Y Q 2008 *J. Math. Anal. Appl.* **340** 1380

[19] Gao H, Liu B W 2009 *Applied Mathematics and Computation* **211** 148

[20] Li X J 2007 *Chin. Phys.* **16** 2837

[21] Li X J 2008 *Chin. Phys. B* **17** 1946

[22] Li X J 2010 *Chin. Phys. B* **19** 020202

[23] Li X J 2010 *Chin. Phys. B* **19** 030201

[24] Gaines R E, Mawhin J L 1977 *Coincidence Degree and Nonlinear Differential Equations* (Berlin: *Springer*)

[25] Zhang J Y, Feng B Y 2000 *The Geometric Theory and Bifurcation Problem of Ordinary Differential Equations* (Beijing: Peking University Press) (in Chinese) [张锦炎, 冯贝叶 2000 常微分方程几何理论与分支问题 (北京: 北京大学出版社)]

[26] Li X J 2009 *Nonlinear Analysis* **71** 2764

The periodic solution problem of a relative rotation nonlinear system with nonlinear elastic force and generalized damping force*

Li Xiao-Jing† Yan Jing Chen Xuan-Qing Cao Yi

(*College of Mathematics and Physics, Jiangsu University of Technology, Changzhou 213001, China*)

(Received 14 April 2014; revised manuscript received 16 May 2014)

Abstract

The periodic solution problem of a relative rotation nonlinear system is considered. Firstly, the relative rotation nonlinear dynamic system is established, which contains nonlinear elastic force, commonly damped force and forcing periodic force. Secondly, the result about the nonexistence of periodic solution of the corresponding autonomous system is obtained, and some results about the existence of periodic solutions of the system are obtained by using the continuation theorem of coincidence degree theory. The significance is that we generalize the existing results of the literature. Finally an example is given to illustrate that our results are right.

Keywords: relative rotation, nonlinear dynamic system, periodic solution

PACS: 02.30.Hq, 45.20.dc **DOI:** 10.7498/aps.63.200202

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 51277017, 11202106), the Natural Science Foundation of Jiangsu Province, China (Grant Nos. BK2012583, 13KJB170016), and the Young Scientists Foundation of Jiangsu University of Technology, China (Grant No. KYY 13032).

† Corresponding author. E-mail: lixiaojing14@jstu.edu.cn