变系数Whitham-Broer-Kaup方程组的对称、约化及精确解*

刘勇† 刘希强

(聊城大学数学科学学院, 聊城 252059)

(2014 年 4 月 28 日收到; 2014 年 6 月 5 日收到修改稿)

利用修正的Clarkson-Kruskal直接法对变系数Whitham-Broer-Kaup (VCWBK) 方程组进行等价转化, 建立了VCWBK方程组与常系数WBK方程组解之间的关系, 并得到了常系数WBK 方程组的一些对称和相似约化. 借助辅助函数法得到了VCWBK方程组的一些新精确解, 包括有理函数解、双曲函数的解、三角函数解和Jacobi椭圆函数解.

关键词: 变系数Whitham-Broer-Kau方程组, 修正的Clarkson-Kruskal直接法, 相似约化, 精确解

PACS: 02.30.Jr, 04.20.Jb, 05.45.Yv **DOI:** 10.7498/aps.63.200203

1 引 言

随着科技的发展, 人们发现变系数非线性发展方程比常系数非线性发展方程能更好地描述复杂物理现象. 因此, 找寻变系数非线性发展方程的精确解就成为一个重要的课题. 目前, 学者们已提出了一些有效的方法, 如指数函数法[1]、齐次平衡法[2]、经典李群法[3], 双曲正切展开法[4]、(G'/G)函数展开法[5,6]等. CK直接法由Clarkson和Kruskal[7]于1989年首次提出, 后由楼森岳教授于1990年加以改进, 我们称之为修正的CK直接法[8], 并在寻找真实物理模型的相似解中得到了广泛的应用.

下面考虑变系数Whitham-Broer-Kaup (VCWBK)方程组

$$
\begin{aligned}
&u_t+\gamma_1(t)uu_x+\gamma_2(t)v_x+\gamma_3(t)u_{xx}=0,\\
&v_t+\gamma_4(t)u_xv+\gamma_4(t)uv_x-\gamma_5(t)v_{xx}\\
&+\gamma_6(t)u_{xxx}=0,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

其中, $\gamma_i(t)$ $(i=1,2,\cdots,6)$是关于t的任意光滑函数, 且是用来表示不同的色散和耗散力. 当$\gamma_1(t)=\gamma_2(t)=\gamma_4(t)=2\alpha(t)$, $\gamma_3(t)=\gamma_5(t)=-\alpha(t), \gamma_6(t)=0$, 方程组(1)转化为变系数Broer-Kaup系统, 在文献[9]中, 作者利用相容性方法对其进行了研究并得到了该系统的误差函数解、Bessel函数解、指数函数解和Airy函数解.

如果方程组(1)中的系数变成为常系数, 即

$$
\begin{aligned}
&u_t+h_1uu_x+h_2v_x+h_3u_{xx}=0,\\
&v_t+h_4u_xv+h_4uv_x-h_5v_{xx}+h_6u_{xxx}=0,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

其中h_i $(i=1,2,\cdots,6)$是任意常数, 则方程组(1)转化为广义WBK方程组(2).

当$h_1=h_2=h_4=-1$, $h_3=h_5=1/2, h_6=0$, 方程组(2)转化为长水波方程, 在文献[10]中, 作者利用齐次平衡法对其进行研究并得到了非行波解和孤波解.

当$h_1=h_2=h_4=1, h_3=h_5$, 方程组(2)转化为WBK浅水波方程组, 在文献[11—13]中得到了WBK浅水波方程的对称和行波解.

当$h_1=h_4=2, h_2=h_6=-1/2, h_3=h_5=0$, 方程组(2)转化为Boussinesq-Burgers方程组[14].

* 国家自然科学基金委员会-中国工程物理研究院联合基金 (批准号: 11076015) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: liuyong0616@163.com

本文利用修正的CK直接法[15,16]对VCWBK方程组进行等价转化. 同时, 找到了VCWBK方程组与常系数WBK方程组的解之间的关系. 利用直接对称的方法得到了常系数WBK方程组的一些对称和相似约化; 借助辅助函数法得到了VCWBK方程组的一些新精确解, 包括有理函数解、双曲函数的解、三角函数解和Jacobi椭圆函数的解.

本文构成如下: 第2部分, VCWBK方程组的等价变化; 第3部分, 利用直接对称方法得到了方程组(2)的对称和相似约化; 第4部分, 得到方程组(1)的一些精确解; 第5部分给出结论.

2 VCWBK方程组的等价变换

为了找到方程组(1)和方程组(2)之间的等价变换, 假设方程组(1)具有下面形式的对称群:

$$
\begin{aligned}
&u(x,t)=\alpha_1+\beta_1 U(\xi,\tau),\\
&v(x,t)=\alpha_2+\beta_2 V(\xi,\tau),
\end{aligned}
\tag{3}
$$

其中$\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2,\xi$和$\tau$是关于的$\{x,t\}$待定函数.

在变换$\{x,t,u,v\}\ \rightarrow\ \{\xi,\tau,U,V\}$下要求$U(\xi,\tau),V(\xi,\tau)$也满足方程组(2), 即

$$
\begin{aligned}
&U_\tau+h_1UU_\xi+h_2V_\xi+h_3U_{\xi\xi}=0,\\
&V_\tau+h_4U_\xi V+h_4UV_\xi-h_5V_{\xi\xi}+h_6U_{\xi\xi\xi}=0,
\end{aligned}
\tag{4}
$$

其中h_i $(i=1,2,\cdots,6)$是任意的常数. 将(3)式带入到方程组(1)中, 并利用约束方程(4), 令U, V及其同阶导数的系数为零, 得到一个超定方程组:

$$
\begin{aligned}
&\gamma_3(t)\beta_1\tau_x^2(h_2h_6+h_3^2)=0,\\
&-\beta_1\tau_t h_3+\gamma_3(t)\beta_1\xi_x^2=0,\\
&\gamma_1(t)\beta_1\beta_{1x}=0,\\
&\gamma_2(t)\beta_{2x}=0,\\
&\beta_{1t}+\gamma_1(t)\alpha_{1x}\beta_1=0,\\
&-\beta_1\tau_t h_1+\gamma_1(t)\beta_1^2\xi_x=0,\\
&-\beta_1\tau_t h_2+\gamma_2(t)\beta_2\xi_x=0,\\
&\alpha_{1t}+\gamma_1(t)\alpha_1\alpha_{1x}+\gamma_2(t)\alpha_{2x}+\gamma_3(t)\alpha_{1xx}=0,\\
&\beta_1\xi_t+\gamma_1(t)\alpha_1\beta_1\xi_x+\gamma_3(t)\beta_1\xi_{xx}=0;\\
&\beta_2\tau_t h_5-\gamma_5(t)\beta_2\xi_x^2=0,\\
&3\gamma_6(t)\beta_1\xi_x\xi_{xx}=0,\\
&\gamma_4(t)\alpha_2\beta_1\xi_x=0,\\
&-\beta_2\tau_t h_6+\gamma_6(t)\beta_1\xi_x^3=0,\\
&\beta_2\xi_t+\gamma_4(t)\alpha_1\beta_2\xi_x=0,\\
&-\beta_2\tau_t h_4+\gamma_4(t)\beta_1\beta_2\xi_x=0,\\
&\beta_{2t}+\gamma_4(t)\alpha_{1x}\beta_2=0,\\
&\gamma_4(t)\alpha_{2x}\beta_1=0,\\
&\alpha_{2t}+\gamma_4(t)\alpha_{1x}\alpha_2+\gamma_4(t)\alpha_1\alpha_{2x}-\gamma_5(t)\alpha_{2xx}\\
&+\gamma_6(t)\alpha_{1xxx}=0.
\end{aligned}
$$

解超定方程组, 可得:

$$
\begin{aligned}
&\gamma_1(t)=\gamma_4(t)=F'(t),\\
&\gamma_2(t)=\frac{h_2q_3^2F'(t)}{h_1q_6F(t)},\\
&\gamma_3(t)=\frac{h_3q_3F'(t)}{h_1q_4},\\
&\gamma_5(t)=\frac{h_5q_3F'(t)}{h_1q_4},\\
&\gamma_6(t)=\frac{h_6q_6F(t)F'(t)}{h_1q_4^2},\\
&h_1=h_4\neq 0,\\
&\alpha_1=\frac{x+q_2}{F(t)},\\
&\alpha_2=0,\\
&\beta_1=\frac{q_3}{F(t)},\\
&\beta_2=\frac{q_6}{F(t)},\\
&\xi=\frac{q_4(x+q_2)}{F(t)}+q_5,\\
&\tau=-\frac{q_3q_4}{h_1F(t)}+q_1,
\end{aligned}
$$

其中, q_i $(i=1,2,\cdots,6)$是非零积分常数, 且$F(t)$是关于t任意的光滑函数.

定理1 如果给出$\gamma_i(t)$ $(i=1,2,\cdots,6)$, 即

$$
\begin{aligned}
&\gamma_1(t)=\gamma_4(t)=F'(t),\\
&\gamma_2(t)=\frac{h_2q_3^2F'(t)}{h_1q_6F(t)},\\
&\gamma_3(t)=\frac{h_3q_3F'(t)}{h_1q_4},\\
&\gamma_6(t)=\frac{h_6q_6F(t)F'(t)}{h_1q_4^2},h_1=h_4\neq 0
\end{aligned}
$$

和以下等价变换

$$
\begin{aligned}
&u(x,t)=\frac{x+q_2}{F(t)}+\frac{q_3}{F(t)}U(\xi,\tau),\\
&v(x,t)=\frac{q_6}{F(t)}V(\xi,\tau),
\end{aligned}
$$

$$\xi = \frac{q_4(x+q_2)}{F(t)} + q_5,$$
$$\tau = -\frac{q_3 q_4}{h_1 F(t)} + q_1, \tag{5}$$

则有方程组 (1) 可在等价变换 (5) 下被映射到方程组 (4).

在定理 1 中, q_i $(i = 1, 2, \cdots, 6)$ 是非零积分常数, 且 $F(t)$ 是关于 t 任意的光滑函数.

注 1 定理 1 建立了方程组 (1) 和方程组 (4) 解之间的关系, 即如果 $\{U(\xi,\tau), V(\xi,\tau)\}$ 是方程组 (4) 的解, 那么 $\{u(x,t), v(x,t)\}$ 也是方程组 (1) 的解.

3 常系数WBK方程组的对称及相似约化

为了利用等价变换 (5) 得到方程组 (1) 的解, 需要求解方程组 (2) 或 (4) 的解. 下面利用直接对称法寻找方程组 (2) 的对称和相似约化.

假定方程组 (2) 的对称 (σ, ψ) 的形式如下:

$$\begin{aligned}\sigma &= a(x,t)u_x + b(x,t)u_t + c(x,t)u + d(x,t),\\ \psi &= a(x,t)v_x + b(x,t)v_t + e(x,t)v + f(x,t),\end{aligned} \tag{6}$$

其中 a, b, c, d, e 和 f 都是关于 $\{x, t\}$ 的待定函数, 且要求 (6) 式满足下列方程组:

$$\begin{aligned}&\sigma_t + h_1\sigma u_x + h_1\sigma_x u + h_2\psi_x + h_3\sigma_{xx} = 0,\\ &\psi_t + h_4\sigma_x v + h_4 u_x\psi + h_4 u\psi_x + h_4\sigma v_x\\ &- h_5\psi_{xx} + h_6\sigma_{xxx} = 0.\end{aligned} \tag{7}$$

将 (6) 式代入到 (7) 式中并利用方程组 (2) 可解得

$$\begin{aligned}a &= c_1 x - c_2 h_1 t + c_3,\\ b &= 2c_1 t + c_4,\\ c &= c_1,\\ d &= c_2,\\ e &= 2c_1,\\ f &= 0,\\ h_1 &= h_4 \neq 0,\end{aligned}$$

其中 c_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ 是任意的常数. 因此, 方程组 (2) 有如下对称形式

$$\begin{aligned}\sigma &= (c_1 x - c_2 h_1 t + c_3)u_x + (2c_1 t + c_4)u_t\\ &\quad + c_1 u + c_2,\\ \psi &= (c_1 x - c_2 h_1 t + c_3)v_x + (2c_1 t + c_4)v_t + 2c_1 v.\end{aligned}$$

考虑如下四种情况:

情况 1 $c_2 = 1, c_1 = c_3 = c_4 = 0$. 解对应的特征方程组, 得到不变量 θ 和不变函数

$$\theta = t, u = \frac{x}{h_1\theta} + p(\theta), v = w(\theta). \tag{8}$$

将 (8) 式代入到方程组 (2) 中, 可以得到方程组 (2) 的下列约化形式

$$p' + \frac{p}{\theta} = 0, w' + \frac{w}{\theta} = 0. \tag{9}$$

情况 2 $c_2 = c_4 = 1, c_1 = c_3 = 0$. 解对应的特征方程组, 可得

$$\theta = x + \frac{h_1}{2}t^2, u = -t + p(\theta), v = w(\theta). \tag{10}$$

将 (10) 式代入到方程组 (2) 中, 可以得到方程组 (2) 的下列约化形式:

$$\begin{aligned}&-1 + h_1 pp' + h_2 w' + h_3 p'' = 0,\\ &h_1 p'w + h_1 pw' - h_5 w'' + h_6 p''' = 0.\end{aligned} \tag{11}$$

情况 3 $c_3 \neq 0, c_4 \neq 0, c_1 = c_2 = 0$. 解对应的特征方程组, 可得

$$\theta = c_4 x - c_3 t, u = p(\theta), v = w(\theta). \tag{12}$$

将 (12) 式代入到方程组 (2) 中, 得到方程组 (2) 的下列约化形式:

$$\begin{aligned}&-c_3 p' + c_4 h_1 pp' + c_4 h_2 w' + c_4^2 h_3 p'' = 0,\\ &-c_3 w' + c_4 h_1 p'w + c_4 h_1 pw' - c_4^2 h_5 w''\\ &+ c_4^3 h_6 p''' = 0.\end{aligned} \tag{13}$$

情况 4 $c_1 = 1, c_2 = c_3 = c_4 = 0$. 解对应的特征方程组, 可得

$$\theta = x^2 t^{-1}, u = \frac{p(\theta)}{x}, v = \frac{w(\theta)}{t}. \tag{14}$$

将 (14) 式代入到方程组 (2) 中, 可以得到方程组 (2) 的下列约化形式:

$$\begin{aligned}&(-\theta^2 - 2h_3\theta)p' + 2h_1\theta pp' - h_1 p^2\\ &+ 4h_3\theta^2 p'' + 2h_2\theta^2 w' + 2h_3 p = 0,\\ &8h_6\theta^3 p''' + 6h_6\theta p' + 2h_1\theta^2 p'w\\ &- h_1\theta pw + 2h_1\theta^2 pw' - 4h_5\theta^3 w''\\ &- (\theta^3 + 2h_5\theta^2)w' - 6h_6 p - \theta^2 w = 0.\end{aligned} \tag{15}$$

4 VCWBK 方程组的新精确解

本节考虑第3部分得到的约化方程组, 利用定理1得到方程组(1)的一些新精确解.

情况1 解方程组(9), 可得

$$p=\frac{k_1}{\theta},\quad w=\frac{k_2}{\theta},\tag{16}$$

其中 k_1,k_2 是任意的常数. 由变换(8)并结合定理1, 得到

$$\begin{aligned}&\gamma_1(t)=\gamma_4(t)=F'(t),\\&\gamma_2(t)=\frac{h_2q_3^2F'(t)}{h_1q_6F(t)},\\&\gamma_3(t)=\frac{h_3q_3F'(t)}{h_1q_4},\\&\gamma_5(t)=\frac{h_5q_3F'(t)}{h_1q_4},\\&\gamma_6(t)=\frac{h_6q_6F(t)F'(t)}{h_1q_4^2},\end{aligned}$$

方程组(1)有如下有理函数解:

$$\begin{aligned}u_1={}&\frac{x+q_2}{F(t)}+\frac{q_3}{F(t)}\\&\times\left[\frac{q_4x+(q_5-k_1h_1)F(t)+q_2q_4}{q_1h_1F(t)-q_3q_4}\right],\\v_1={}&\frac{q_6k_2h_1}{q_1h_1F(t)-q_3q_4}.\end{aligned}$$

情况2 在(11)式中, 令 $h_1=h_2=h_4=1,h_3=-h_5$, 对 θ 积分一次, 可得

$$-\theta+\frac{1}{2}p^2+w+h_3p'=D_1,\tag{17}$$

$$pw+h_3w'+h_6p''=D_2,\tag{18}$$

其中 D_1,D_2 是积分常数. 解(17)和(18)式, 可得

$$D_1=0,D_2=h_3,p(\theta)=0,w(\theta)=\theta.\tag{19}$$

由变换(10)并结合定理1, 得到

$$\begin{aligned}&\gamma_1(t)=\gamma_4(t)=F'(t),\\&\gamma_2(t)=\frac{q_3^2F'(t)}{q_6F(t)},\\&\gamma_3(t)=-\gamma_5(t)=\frac{h_3q_3F'(t)}{q_4},\\&\gamma_6(t)=\frac{h_6q_6F(t)F'(t)}{q_4^2},\end{aligned}$$

可得方程组(1)有如下形式的有理函数解:

$$\begin{aligned}u_2={}&\frac{x+q_2}{F(t)}+\frac{q_3}{F(t)}\left\{\frac{q_3q_4}{F(t)}-q_1\right\},\\v_2={}&\frac{q_6}{F(t)}\left\{\frac{q_4(x+q_2)}{F(t)}+q_5\right.\\&\left.+\frac{1}{2}\left(\frac{q_3q_4}{F(t)}-q_1\right)^2\right\}.\end{aligned}$$

为了得到方程组(1)的其他特殊的精确解, 令(11)式中 $h_1=h_2=h_4=1$, $h_3=h_5$, $h_6=-h_3^2$, 对 θ 进行一次积分, 可得

$$\begin{aligned}&w=\theta-\frac{1}{2}p^2-h_3p'+D_1,\\&(\theta+D_1)p-\frac{1}{2}p^3-2h_3pp'-h_3-D_2=0,\end{aligned}\tag{20}$$

解(20)式, 可得

$$\begin{aligned}&D_1=0,\quad D_2=-h_3,\quad p(\theta)=\sqrt{2\theta},\\&w(\theta)=\frac{-\sqrt{2}}{2}h_3\theta^{-1/2}.\end{aligned}\tag{21}$$

由变换(10)并结合定理1, 得到

$$\begin{aligned}&\gamma_1(t)=\gamma_4(t)=F'(t),\\&\gamma_2(t)=\frac{q_3^2F'(t)}{q_6F(t)},\\&\gamma_3(t)=\gamma_5(t)=\frac{h_3q_3F'(t)}{q_4},\\&\gamma_6(t)=\frac{-h_3^2q_6F(t)F'(t)}{h_1q_4^2}.\end{aligned}$$

可以得到方程组(1)的如下形式的精确解:

$$\begin{aligned}u_3={}&\frac{x+q_2}{F(t)}+\frac{q_3}{F(t)}\\&\times\left\{\frac{q_3q_4}{F(t)}-q_1+\left(\frac{2q_4(x+q_2)}{F(t)}\right.\right.\\&\left.\left.+2q_5+\left(\frac{q_3q_4}{F(t)}-q_1\right)^2\right)^{1/2}\right\},\\v_3={}&\frac{-h_3q_6}{F(t)}\left(\frac{2q_4(x+q_2)}{F(t)}+2q_5\right.\\&\left.+\left(\frac{q_3q_4}{F(t)}-q_1\right)^2\right)^{-1/2}.\end{aligned}$$

情况3 在(13)中令 $h_1=h_2=h_4=1,h_3=h_5$, 对 θ 进行一次积分, 可得

$$-c_3p+\frac{1}{2}c_4p^2+c_4w+c_4^2h_3p'=D_1,\tag{22}$$

$$-c_3w+c_4pw-c_4^2h_3w'+c_4^3h_6p''=D_2,\tag{23}$$

其中 D_1,D_2 是积分常数. 将(22)式代入到(23)式中, 可得

$$\begin{aligned}&\left(-\frac{c_3^2}{c_4}+D_1\right)p+\frac{3c_3}{2}p^2-\frac{c_4}{2}p^3\\&+c_4^3(h_3^2+h_6)p''-\left(D_2+\frac{c_3D_1}{c_4}\right)\end{aligned}$$

$$= 0. \tag{24}$$

为了得到(24)式的解, 可设(24)式具有下列形式的解

$$p(\theta) = \sum_{i=0}^{M} a_i \varphi^i, \tag{25}$$

其中$\varphi = \varphi(\theta)$满足Riccati方程$\varphi' = A + B\varphi + C\varphi^2$. 平衡(24)式中的$p''$和$p^3$可得$M = 1$. 由(25)式可得

$$p(\theta) = a_0 + a_1\varphi, \quad a_1 \neq 0. \tag{26}$$

将(26)式代入到(24)式中, 令φ及其同阶导数系数为0得到一个超定方程组, 解之得

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{c_3 \pm c_4^2\sqrt{h_3^2 + h_6}B}{c_4},\\
a_1 &= \pm 2Cc_4\sqrt{h_3^2 + h_6},\\
D_1 &= -\frac{c_3^2 + c_4^4(h_3^2 + h_6)(4AC - B^2)}{2c_4},\\
D_2 &= -\frac{3c_3(c_3 \pm c_4^2\sqrt{h_3^2 + h_6}B)(c_3 \pm c_4^2\sqrt{h_3^2 + h_6}B - c_4)}{2c_4^2},
\end{aligned}$$

其中$h_3^2 + h_6 > 0$. 因此, 得到方程(24)的两种类型的精确解:

情况 3.1 双曲函数解

当$A = 1/2, C = -1/2, B = 0$, 方程(24)有一组双曲函数解:

$$p(\theta) = \frac{c_3}{c_4} + c_4\sqrt{h_3^2 + h_6}(\coth(\theta) + \mathrm{csch}(\theta)), \quad w(\theta) = \frac{c_4^2(h_3\sqrt{h_3^2 + h_6} - h_3^2 - h_6)(\cosh(\theta) + 1)}{\sinh^2(\theta)}, \tag{27}$$

$$p(\theta) = \frac{c_3}{c_4} + c_4\sqrt{h_3^2 + h_6}\frac{\tanh(\theta)}{1 + \mathrm{sech}(\theta)}, \quad w(\theta) = -\frac{c_4^2(h_3\sqrt{h_3^2 + h_6} - h_3^2 - h_6)}{1 + \cosh(\theta)}. \tag{28}$$

情况 3.2 三角函数解

当$A = C = 1/2, B = 0$, 方程(24)有一组三角函数解:

$$p(\theta) = \frac{c_3}{c_4} + c_4\sqrt{h_3^2 + h_6}(\sec(\theta) - \tan(\theta)), \quad w(\theta) = \frac{c_4^2(h_3\sqrt{h_3^2 + h_6} - h_3^2 - h_6)}{1 + \sin(\theta)}. \tag{29}$$

当$A = C = 1, B = 0$, 方程(24)有一组三角函数解:

$$p(\theta) = \frac{c_3}{c_4} + 2c_4\sqrt{h_3^2 + h_6}\tan(\theta), \quad w(\theta) = -\frac{2c_4^2(h_3\sqrt{h_3^2 + h_6} + h_3^2 + h_6)}{\cos^2(\theta)}. \tag{30}$$

当$A = 1, C = 4, B = 0$, 方程(24)有一组三角函数解:

$$p(\theta) = \frac{c_3}{c_4} + 8c_4\sqrt{h_3^2 + h_6}\frac{\tan(\theta)}{1 - \tan^2(\theta)}, \quad w(\theta) = -\frac{8c_4^2(h_3\sqrt{h_3^2 + h_6} + h_3^2 + h_6)}{(2\cos^2(\theta) - 1)^2}. \tag{31}$$

当 $A = -1, B = C = -2$, 方程(24)有一组三角函数解:

$$p(\theta) = \frac{c_3 - 2c_4^2\sqrt{h_3^2 + h_6}}{c_4} - 4c_4\sqrt{h_3^2 + h_6}\frac{\cot(\theta)}{1 - \cot(\theta)}, \quad w(\theta) = \frac{4c_4^2(h_3\sqrt{h_3^2 + h_6} + h_3^2 + h_6)}{2\sin(\theta)\cos(\theta) - 1}. \tag{32}$$

限于篇幅, 此处不再一一列出. 由变换(12)并结合定理1, 得到

当$\gamma_1(t) = \gamma_4(t) = F'(t)$, $\gamma_2(t) = \dfrac{q_3^2 F'(t)}{q_6 F(t)}$, $\gamma_3(t) = \gamma_5(t) = \dfrac{h_3 q_3 F'(t)}{q_4}$, $\gamma_6(t) = \dfrac{h_6 q_6 F(t) F'(t)}{q_4^2}$, 方程组(1)有如下精确解

$$\begin{aligned}
u_4 &= \frac{x + q_2}{F(t)} + \frac{q_3}{F(t)}\left\{\frac{c_3}{c_4} + c_4\sqrt{h_3^2 + h_6}(\coth(\eta) + \csc h(\eta))\right\},\\
v_4 &= \frac{q_6}{F(t)}\left\{\frac{c_4^2(h_3\sqrt{h_3^2 + h_6} - h_3^2 - h_6)(\cosh(\eta) + 1)}{\sinh^2(\eta)}\right\},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
u_5 &= \frac{x+q_2}{F(t)} + \frac{q_3}{F(t)}\left\{\frac{c_3}{c_4} + c_4\sqrt{h_3^2+h_6}\frac{\tanh(\eta)}{1+\operatorname{sech}(\eta)}\right\},\\
v_5 &= -\frac{q_6}{F(t)}\frac{c_4^2(h_3\sqrt{h_3^2+h_6}-h_3^2-h_6)}{1+\cosh(\eta)},\\
u_6 &= \frac{x+q_2}{F(t)} + \frac{q_3}{F(t)}\left\{\frac{c_3}{c_4} + c_4\sqrt{h_3^2+h_6}(\sec(\eta)-\tan(\eta))\right\},\\
v_6 &= \frac{q_6}{F(t)}\frac{c_4^2(h_3\sqrt{h_3^2+h_6}-h_3^2-h_6)}{1+\sin(\eta)},\\
u_7 &= \frac{x+q_2}{F(t)} + \frac{q_3}{F(t)}\left\{\frac{c_3}{c_4} + 2c_4\sqrt{h_3^2+h_6}\tan(\eta)\right\},\\
v_7 &= -\frac{q_6}{F(t)}\frac{2c_4^2(h_3\sqrt{h_3^2+h_6}+h_3^2+h_6)}{\cos^2(\eta)},\\
u_8 &= \frac{x+q_2}{F(t)} + \frac{q_3}{F(t)}\left\{\frac{c_3}{c_4} + 8c_4\sqrt{h_3^2+h_6}\frac{\tan(\eta)}{1-\tan^2(\eta)}\right\},\\
v_8 &= -\frac{q_6}{F(t)}\frac{8c_4^2(h_3\sqrt{h_3^2+h_6}+h_3^2+h_6)}{(2\cos^2(\eta)-1)^2},\\
u_9 &= \frac{x+q_2}{F(t)} + \frac{q_3}{F(t)}\left\{\frac{c_3-2c_4^2\sqrt{h_3^2+h_6}}{c_4} - 4c_4\sqrt{h_3^2+h_6}\frac{\cot(\eta)}{1-\cot(\eta)}\right\},\\
v_9 &= \frac{q_6}{F(t)}\frac{4c_4^2(h_3\sqrt{h_3^2+h_6}+h_3^2+h_6)}{2\sin(\eta)\cos(\eta)-1},
\end{aligned}
$$

其中 $\eta = \dfrac{c_4q_4(x+q_2)}{F(t)} + c_4q_5 + \dfrac{c_3q_3q_4}{F(t)} - c_3q_1$.

注 2 $\{u_4, v_4\}$ 和 $\{u_5, v_5\}$ 是方程组 (1) 的双曲函数解; $\{u_6, v_6\}$, $\{u_7, v_7\}$, $\{u_8, v_8\}$ 和 $\{u_9, v_9\}$ 是方程组 (1) 的三角函数解.

为了能找到 (24) 式的椭圆函数解 [17], 令 $\varphi = \varphi(\theta)$ 并满足 $\varphi'^2 = C + A\varphi^2 + B\varphi^4$. 将 (26) 式代入到 (24) 式中, 可得

$$
a_0 = \frac{c_3}{c_4}, a_1 = \pm 2c_4\sqrt{B(h_3^2+h_6)},\quad D_1 = -\frac{c_3^2+2c_4^4A(h_3^2+h_6)}{2c_4},\quad D_2 = 0.
$$

当 A, B 和 C 取特殊值时 (24) 式有椭圆函数解, 此处仅列出几组解.

当 $A = -(m^2+1), B = m^2, C = 1, h_3^2 + h_6 > 0$, (24) 式有下列形式的解:

$$
\begin{aligned}
p(\theta) &= \frac{c_3}{c_4} \pm 2c_4m\sqrt{h_3^2+h_6}\operatorname{sn}(\theta),\\
w(\theta) &= -c_4^2\Big((h_3^2+h_6)(1-2\operatorname{dn}^2(\theta)-m^2) \pm 2h_3m\sqrt{h_3^2+h_6}\operatorname{cn}(\theta)\operatorname{dn}(\theta)\Big);
\end{aligned}
$$

当 $A = 2-m^2, B = 1, C = 1-m^2, h_3^2+h_6 > 0$, (24) 式有下列形式的解:

$$
\begin{aligned}
p(\theta) &= \frac{c_3}{c_4} \pm 2c_4\sqrt{h_3^2+h_6}\frac{\operatorname{cn}(\theta)}{\operatorname{sn}(\theta)},\\
w(\theta) &= \frac{-c_4^2\big((\operatorname{dn}^2(\theta)+1)(h_3^2+h_6) \mp 2h_3\sqrt{h_3^2+h_6}\operatorname{dn}(\theta)\big)}{\operatorname{sn}^2(\theta)};
\end{aligned}
$$

当 $A = 2, B = m^4, C = 1$, $h_3^2 + h_6 > 0$, (24) 式有下列形式的解:

$$
\begin{aligned}
p(\theta) &= \frac{c_3}{c_4} \pm 2c_4m^2\sqrt{h_3^2+h_6}\frac{\operatorname{sn}(\theta)\operatorname{cn}(\theta)}{\operatorname{dn}(\theta)},\\
w(\theta) &= \frac{-2c_4^2\Big(\big(m^4\operatorname{cn}^2(\theta)\operatorname{sn}^2(\theta)+(2-m^2)\operatorname{dn}^2(\theta)\big)(h_3^2+h_6) \pm m^2h_3\sqrt{h_3^2+h_6}(\operatorname{cn}^2(\theta)-\operatorname{sn}^2(\theta)\operatorname{dn}^2(\theta))\Big)}{\operatorname{dn}^2(\theta)};
\end{aligned}
$$

当 $A = (1-2m^2)/2, B = 1/4, C = 1/4,\ h_3^2 + h_6 > 0$, (24) 式有下列形式的解:

$$p(\theta) = \frac{c_3}{c_4} \pm c_4\sqrt{h_3^2 + h_6}(\mathrm{ns}(\theta) + \mathrm{cs}(\theta)),$$

$$w(\theta) = -c_4^2\Big((h_3^2 + h_6)(\mathrm{ns}^2(\theta) + \mathrm{ns}(\theta)\mathrm{cs}(\theta) - m^2) \mp h_3\sqrt{h_3^2 + h_6}\mathrm{ds}(\theta)(\mathrm{cs}(\theta) + \mathrm{ns}(\theta))\Big);$$

当 $A = 2 - m^2, B = m^2 - 1, C = -1,\ h_3^2 + h_6 < 0$, (24) 式有下列形式的解:

$$p(\theta) = \frac{c_3}{c_4} \pm 2c_4\sqrt{(m^2-1)(h_3^2 + h_6)}\frac{1}{\mathrm{dn}(\theta)},$$

$$w(\theta) = \frac{c_4^2 m^2((h_3^2 + h_6)(-m^2\mathrm{sn}^2(\theta) + 2\mathrm{sn}^2(\theta) - 1) \mp 2h_3\sqrt{(m^2-1)(h_3^2 + h_6)}\mathrm{cn}(\theta)\mathrm{sn}(\theta))}{\mathrm{dn}^2(\theta)},$$

限于篇幅, 此处不再一一列出. 由变换 (12) 并结合定理 1, 得到

当 $\gamma_1(t) = \gamma_4(t) = F'(t), \gamma_2(t) = \dfrac{q_3^2 F'(t)}{q_6 F(t)}, \gamma_3(t) = \gamma_5(t) = \dfrac{h_3 q_3 F'(t)}{q_4}, \gamma_6(t) = \dfrac{h_6 q_6 F(t) F'(t)}{q_4^2}$, 方程组 (1) 有下列形式的椭圆函数解:

$$u_{10} = \frac{x + q_2}{F(t)} + \frac{q_3}{F(t)}\left\{\frac{c_3}{c_4} \pm 2c_4 m\sqrt{h_3^2 + h_6}\mathrm{sn}(\eta)\right\},$$

$$v_{10} = \frac{q_6}{F(t)}\left\{-c_4^2((h_3^2 + h_6)(1 - 2\mathrm{dn}^2(\eta) - m^2) \pm 2h_3 m\sqrt{h_3^2 + h_6}\mathrm{cn}(\eta)\mathrm{dn}(\eta))\right\},$$

$$u_{11} = \frac{x + q_2}{F(t)} + \frac{q_3}{F(t)}\left\{\frac{c_3}{c_4} \pm 2c_4\sqrt{h_3^2 + h_6}\frac{\mathrm{cn}(\eta)}{\mathrm{sn}(\eta)}\right\},$$

$$v_{11} = \frac{q_6}{F(t)}\frac{-c_4^2((\mathrm{dn}^2(\eta) + 1)(h_3^2 + h_6) \mp 2h_3\sqrt{h_3^2 + h_6}\mathrm{dn}(\eta))}{\mathrm{sn}^2(\eta)},$$

$$u_{12} = \frac{x + q_2}{F(t)} + \frac{q_3}{F(t)}\left\{\frac{c_3}{c_4} \pm 2c_4 m^2\sqrt{h_3^2 + h_6}\frac{\mathrm{sn}(\eta)\mathrm{cn}(\eta)}{\mathrm{dn}(\eta)}\right\},$$

$$v_{12} = \frac{q_6}{F(t)}\frac{-2c_4^2((m^4\mathrm{cn}^2(\eta)\mathrm{sn}^2(\eta) + (2 - m^2)\mathrm{dn}^2(\eta))(h_3^2 + h_6) \pm m^2 h_3\sqrt{h_3^2 + h_6}(\mathrm{cn}^2(\eta) - \mathrm{sn}^2(\eta)\mathrm{dn}^2(\eta)))}{\mathrm{dn}^2(\eta)},$$

$$u_{13} = \frac{x + q_2}{F(t)} + \frac{q_3}{F(t)}\left\{\frac{c_3}{c_4} \pm c_4\sqrt{h_3^2 + h_6}(\mathrm{ns}(\eta) + \mathrm{cs}(\eta))\right\},$$

$$v_{13} = \frac{q_6}{F(t)}\left\{-c_4^2((h_3^2 + h_6)(\mathrm{ns}^2(\eta) + \mathrm{ns}(\eta)\mathrm{cs}(\eta) - m^2) \mp h_3\sqrt{h_3^2 + h_6}\mathrm{ds}(\eta)(\mathrm{cs}(\eta) + \mathrm{ns}(\eta)))\right\},$$

$$u_{14} = \frac{x + q_2}{F(t)} + \frac{q_3}{F(t)}\left\{\frac{c_3}{c_4} \pm 2c_4\sqrt{(m^2-1)(h_3^2 + h_6)}\frac{1}{\mathrm{dn}(\eta)}\right\},$$

$$v_{14} = \frac{q_6}{F(t)}\frac{c_4^2 m^2((h_3^2 + h_6)(-m^2\mathrm{sn}^2(\eta) + 2\mathrm{sn}^2(\eta) - 1) \mp 2h_3\sqrt{(m^2-1)(h_3^2 + h_6)}\mathrm{cn}(\eta)\mathrm{sn}(\eta))}{\mathrm{dn}^2(\eta)},$$

其中 $\eta = \dfrac{c_4 q_4(x + q_2)}{F(t)} + c_4 q_5 + \dfrac{c_3 q_3 q_4}{F(t)} - c_3 q_1$, m 是 Jacobi 椭圆函数的模量.

情况 4 为简单起见, 在 (15) 式中令 $h_1 = h_2 = h_4 = 1, h_3 = h_5$, 假设 (15) 式具有下列形式的解:

$$p(\theta) = \sum_{i=0}^{M} a_i(\theta)\varphi^i, w(\theta) = \sum_{i=0}^{N} b_i(\theta)\varphi^i,$$

其中 $\varphi = \varphi(\theta)$ 满足常微分方程 $\varphi' = A + B\varphi + C\varphi^2$. 平衡最高阶导数项和最高阶非线性项, 可得 $M = 1, N = 2$. 因此 $p(\theta), w(\theta)$ 可表示为

$$p(\theta) = a_0(\theta) + a_1(\theta)\varphi,$$

$$w(\theta) = b_0(\theta) + b_1(\theta)\varphi + b_2(\theta)\varphi^2,$$

将其代入到 (15) 式中可解得

$$a_1 = 0, a_0 = \theta, b_0 = k_1, b_1 = 0,$$

$$b_2 = k_3\,\mathrm{e}^{k_2\theta}, l = 0, m = -\frac{1}{2}k_2, n = 0.$$

因此, 可得 $p(\theta) = \theta, w(\theta) = k_4$, 其中 k_1, k_2, k_3 和 k_4 是任意的非零常数.

此时结合 (5) 和 (14) 式可得, 当

$$\gamma_1(t)=\gamma_4(t)=F'(t),$$
$$\gamma_2(t)=\frac{q_3^2F'(t)}{q_6F(t)},$$
$$\gamma_3(t)=\gamma_5(t)=\frac{q_3F'(t)}{q_4},$$
$$\gamma_6(t)=\frac{q_6F(t)F'(t)}{q_4^2},$$

方程组 (1) 有下列形式的有理数解:

$$u_{15}=\frac{x+q_2}{F(t)}+\frac{q_3}{F(t)}\frac{q_4x+q_2q_4}{q_1F(t)-q_3q_4},$$
$$v_{15}=\frac{q_6k_4}{q_1F(t)-q_3q_4}.$$

不难看出 $\{u_{15},v_{15}\}$ 是情况 1 中 $\{u_1,v_1\}$ 的特殊情况.

5 结 论

本文利用修正的 CK 方法对方程组 (1) 进行等价转化, 并找到了方程组 (1) 与方程组 (4) 的解之间的关系. 同时, 利用直接对称方法得到了方程组 (2) 的一些对称和相似约化. 借助辅助函数法得到了 VCWBK 方程的一些新精确解, 包括有理函数解、双曲函数的解、三角函数解和 Jacobi 椭圆函数的解. 这些解在现有的文献中没有被发现. 本文的推导过程, 很好地说明了此方法也可应用于其他非线性变系数方程的求解.

参考文献

[1] Yu Y D, Ma H C 2010 *Appl. Math. Comput.* **215** 3534

[2] Fan E G, Zhang H Q 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 353 (in Chinese) [范恩贵, 张鸿庆 1998 物理学报 **47** 353]

[3] Dong Z Z, Chen Y, Lang H Y 2010 *Chin. Phys. B* **19** 090205

[4] Li D S, Zhang H Q 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1569 (in Chinese) [李德生, 张鸿庆 2003 物理学报 **52** 1569]

[5] Chen Y M, Ma S H, Ma Z Y 2013 *Chin. Phys. B* **22** 050510

[6] Bekir A, Ayhan B, Özer M N 2013 *Chin. Phys. B* **22** 010202

[7] Clarkson P A, Kruskal M D 1989 *J. Math. Phys.* **30** 2201

[8] Lou S Y 1990 *Phys. Lett. A* **151** 133

[9] Yan Z L, Zhou J P 2010 *Commun. Theor. Phys.* **54** 965

[10] Yan Z L, Liu X Q 2005 *Commun. Theor. Phys.* **44** 479

[11] Zhang Z Y, Yong X L, Chen Y F 2008 *J. Nonlinear Math. Phys.* **15** 383

[12] Emmanuel Y, Peng y Z 2006 *Acta. J. Theor. Phys.* **45** 197

[13] Yan Z Y, Zhang H Q 2001 *Phys. Lett. A* **285** 355

[14] Mohammed Khalfallah 2009 *Math. Comput. Model.* **49** 666

[15] Tian Y H, Chen H L, Liu X Q 2010 *Appl. Math. Comput.* **215** 3509

[16] Zhang L H, Liu X Q, Bai C L 2007 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing, China) **48** 405

[17] Bai C L, Bai C J, Zhao H 2005 *Z. Naturforsch.* **60a** 211

Exact solutions of Whitham-Broer-Kaup equations with variable coefficients*

Liu Yong† Liu Xi-Qiang

(*School of Mathematical Sciences, Liaocheng University, Liaocheng 252059, China*)

(Received 28 April 2014; revised manuscript received 5 June 2014)

Abstract

An equivalence transformation of Whitham-Broer-Kaup equations with variable coefficients (VCWBK) is obtained by using modified Clarkson-Kruskal direct method. Further, the relationship between the solutions of VCWBK equations and ones of the corresponding WBK equations with constant coefficients is obtained. In addition, by applying direct symmetry method, some symmetries and similarity reductions of the corresponding WBK equations with constant coefficients are derived. Using an auxiliary function to solve some special cases, we obtain some new exact solutions of VCWBK equations, including rational solutions, hyperbolic function solutions, trigonometric function solutions, and Jacobi elliptic function solutions.

Keywords: Whitham-Broer-Kaup equations with variable coefficients, modified Clarkson-Kruska direct method, similarity reductions, exact solutions

PACS: 02.30.Jr, 04.20.Jb, 05.45.Yv **DOI:** 10.7498/aps.63.200203

* Project supported by the Joint Fund of the National Natural Science Foundation of China and the China Academy of Engineering Physics (Grant No. 11076015).

† Corresponding author. E-mail: liuyong0616@163.com