

# 模态信息非完备采样对水下声源检测的影响及改进方法\*

李明杨 孙超<sup>†</sup> 邵炫

(西北工业大学航海学院, 西安 710072)

(2014年4月7日收到; 2014年6月19日收到修改稿)

给出了海洋波导中位置未知简谐声源的广义似然比检测器及其理论检测性能. 通过对检测器中模态相关矩阵进行特征值分解, 将该检测器分解为与各阶特征值相对应的谱成分. 推导了各阶谱成分的统计特性并以此获得了谱成分对输入信号的空间处理增益, 该增益与谱成分对应的特征值成正比. 当模态信息采样不完备时, 模态相关矩阵存在部分接近于0的小特征值, 相应的谱成分对输入信号的空间处理增益与其余谱成分相比非常小. 通过舍去这部分谱成分, 提出了有效谱检测器. 该检测器在保持其输出中目标信号成分与广义似然比检测器相同的基础上, 有效减少了其中的噪声成分, 因此, 具有比广义似然比检测器更好的检测性能. 在典型的浅海环境下进行仿真实验, 仿真结果验证了理论分析、推导以及有效谱检测器的有效性, 并且表明非完备采样程度越严重, 有效谱检测器相对于广义似然比检测器的检测性能提高越显著. 此外, 有效谱检测器具有比广义似然比检测器更好的数值计算稳健性.

**关键词:** 空间处理增益, 小特征值, 有效谱检测器, 模态信息非完备采样

**PACS:** 43.60.Bf, 43.60.Cg, 43.60.+d, 43.30.+m

**DOI:** 10.7498/aps.63.204302

## 1 引言

模态不仅是描述海洋波导中声场分布的重要物理量, 也是众多与水声物理相结合的水声信号处理方法的理论基础<sup>[1-12]</sup>. 通常情况下, 可以通过垂直布放于水体中的水听器基阵来采样获得模态函数随水体深度变化的信息, 而后再加以针对性的利用, 构建一些特定的水下目标检测、定位算法. 然而, 由于大多数的海底底质是损耗型底质, 水体中声源激励的部分模态会渗透到底质层中, 而这部分模态信息是无法通过布放于水体中的水听器基阵采样得到的; 并且, 当水深较大而垂直阵孔径有限、无法覆盖整个水体时, 未被覆盖到的水体中的模态信息也同样无法获取. 因此, 实际情况下, 垂直阵对模态信息的采样一般都是非完备的, 这将导致一些基于模态采样信息的水声信号处理方法的

处理性能显著下降, 其中最具代表性的则是匹配模处理<sup>[3-9]</sup>.

匹配模处理是在20世纪80年代逐渐兴起的定位技术, 它是在匹配场处理的基础上发展而来的<sup>[13]</sup>, 其基本思想是将接收信号从阵元域转化到模态域进行处理. 该方法既保留了匹配场处理充分利用海洋环境信息的优点, 相比匹配场处理又具有计算复杂度小、输出模糊表面旁瓣低, 以及较好的模态误差宽容性等优势, 引起了业界的广泛关注. 匹配模处理的核心是模态系数估计, 实质上是一个线性反演问题. 当模态信息采样不完备时, 模态采样之间存在较强的复共线性(即某几阶模态采样可由其余模态采样近似线性表示), 从而导致模态相关矩阵病态、模态系数的估计结果不稳定<sup>[7,14]</sup>, 并进一步导致匹配模处理的定位性能下降<sup>[7,8]</sup>. 针对模态相关矩阵是病态矩阵时的模态系数反演问题,

\* 国家自然科学基金(批准号: 11274252, 51479169)资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯作者. E-mail: csun@nwpu.edu.cn

Yang<sup>[7]</sup>通过研究模态相关矩阵的特征值分布, 根据特征值的大小将模态空间划分为“信号子空间”与“噪声子空间”, 通过舍去模态系数估计量中与“噪声子空间”相对应的谱成分, 提高了模态系数估计结果的数值计算稳健性, 并取得了较好的定位结果. Collison和Dosso<sup>[8]</sup>在Yang的基础上, 将线性反演问题中的正则化思想引入到模态系数估计中, 给出了对角加载技术以改善模态系数的估计性能, 并在此基础上将模态系数的先验估计考虑进来, 采用一种更为广义的正则化方法, 进一步提出了正则化匹配模处理以提高模态系数的估计性能. 此外, 在其他领域, 诸如大地测量以及地球物理领域中也会出现相关问题, 例如大地测量领域中的重力场向下延拓, 地球物理领域中的位场延拓、波场反演等, 这些领域的科研工作者为解决这些问题也提出了许多方法<sup>[14-17]</sup>, 而这些方法同样可以借鉴到模态信息非完备采样时模态系数的估计中.

在过去的近二十年里, 模态信息非完备采样情况的研究主要集中在如何提高模态系数的估计性能上, 相关研究也取得了较大的进展. 然而, 一直以来, 模态信息非完备采样情况下的水下目标检测问题却鲜有问津. 事实上, 水下简谐声源的检测问题与匹配模处理之间有着密切的联系. 通常情况下, 待检测声源的位置是未知的, 对于这类含有未知参数的确定性信号检测问题, 广义似然比 (generalized likelihood ratio test, GLRT) 检测器是最常用的检测器形式<sup>[18]</sup>. 在设计该检测器时, 首先必须对声源位置进行估计, 再将估计得到的声源位置参数取代原位置参数进行检测器设计. 然而, 声源位置的最大似然估计对应了匹配模处理中的模态系数估计. 由于模态信息非完备采样将影响模态系数的估计性能, 因此, GLRT 检测器也势必会受到该因素的影响. 然而, 由于该问题长期以来缺乏研究, 因此, 模态信息非完备采样这一普遍存在的物理现象对 GLRT 检测器会产生何种影响, 能否减小或者利用该影响以恢复或者提高 GLRT 检测器的检测性能等问题, 长期以来都未引起足够的重视.

本文则针对上述问题展开相应的研究. 首先, 探究模态信息非完备采样对水下简谐声源被动检测的影响. 与以往从估计结果的稳定性对参数反演的方法研究重在数学层面上的分析不同, 本文关注的是模态信息非完备采样在物理层面上对 GLRT 检测器的影响, 即研究其对检测器处理增益的影

响. 然后通过分析, 从提高实际输出信噪比的角度, 提出了 GLRT 检测器的改进方法, 从而提高了模态信息非完备采样下的水下目标检测性能.

## 2 海洋波导中声场模态采样及简谐声源辐射声场观测

### 2.1 海洋波导中声场模态信息的采样完备性

在水平不变海洋波导中, 某一垂直线列阵 (vertical linear array, VLA) 对各阶模态函数的空间采样通常用模态矩阵  $\Psi$  表示, 定义为

$$\Psi \triangleq \begin{pmatrix} \Psi_1(z_1) & \Psi_2(z_1) & \cdots & \Psi_M(z_1) \\ \Psi_1(z_2) & \Psi_2(z_2) & \cdots & \Psi_M(z_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Psi_1(z_N) & \Psi_2(z_N) & \cdots & \Psi_M(z_N) \end{pmatrix}, \quad (1)$$

其中,  $z_i$  表示 VLA 中第  $i$  号阵元所在深度,  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $N$  表示 VLA 的阵元个数;  $\Psi(z)$  表示模态函数, 简称模态;  $\Psi_m(z_i)$  则表示第  $i$  号阵元对第  $m$  阶模态的空间采样,  $m = 1, 2, \dots, M$ ,  $M$  表示波导中传播模态的个数.

为了衡量 VLA 对模态信息采样的完备程度, 定义模态信息采样度 (modal sampling degree, MSD) 为

$$\text{MSD} = \frac{L}{H}, \quad (2)$$

其中,  $L$  表示阵列孔径,  $H$  表示模态覆盖的波导深度, 包括水体、底质层与半空间中模态覆盖的区域, 且  $L \leq H$ , 因此, 有  $0 \leq \text{MSD} \leq 1$ .

本文只考虑阵列孔径大小对模态信息采样的影响. 因此, 假设阵列阵元间距较小, 对各阶模态的采样均满足空间采样定理.

理想情况下, 当阵列由接近水面处向下布放, 且阵列孔径大于或等于模态覆盖深度时, 阵列可以采样到各阶模态的完整信息, 即  $\text{MSD} = 1$ . 根据 Sturm-Liouville 理论可知, 模态函数之间是相互正交的<sup>[1]</sup>, 即

$$\int_0^H \frac{\Psi_m(z)\Psi_n(z)}{\rho(z)} dz = \delta_{mn}, \quad (3)$$

其中,  $m = 1, 2, \dots, M; n = 1, 2, \dots, M; \rho(z)$  表示随深度变化的水体密度;  $\delta_{mn}$  为狄拉克函数. 因此,

理想情况下, 各阶模态的采样 (模态矩阵的各列) 之间满足 [19]

$$\sum_{i=1}^N \frac{\Psi_m(z_i)\Psi_n(z_i)}{\rho(z)} \approx \int_0^H \frac{\Psi_m(z)\Psi_n(z)}{\rho(z)} = \delta_{mn}, \quad (4)$$

进一步根据 (4) 式可知, 当整个波导的水体密度均匀, 即  $\rho(z) = \rho$  时, 各阶模态采样之间是近似正交的, 即

$$\sum_{i=1}^N \Psi_m(z_i)\Psi_n(z_i) \approx \rho \cdot \delta_{mn}, \quad (5)$$

此时, 模态相关矩阵  $\Psi^T\Psi$  (考虑各阶传播模态函数为实函数) 近似为对角线元素相等的对角阵, 且该矩阵的各阶特征值相等.

然而, 实际采样时, 使用的水听器阵列孔径一般都小于模态覆盖的深度, 这将导致阵列对模态信息采样不完备. 当 MSD 较小时 (例如,  $\text{MSD} < 0.8$ ), 某几阶模态采样可由其余模态采样近似线性表示, 这将导致模态相关矩阵呈现出一定的病态特征, 此时, 该矩阵特征值中将出现一部分非常接近于 0 的小特征值 [7,14].

## 2.2 海洋波导中简谐声源的声场信息观测

根据简正波理论, 海洋波导中  $(r, z)$  处的声场传递函数可以表示为 [1]

$$G(r, z) = \frac{\sqrt{2\pi}e^{i\pi/4}}{\rho(z_s)} \sum_{m=1}^M \Psi_m(z)\Psi_m(z_s) \times \frac{e^{ik_{rm}r}}{\sqrt{k_{rm}r}}, \quad (6)$$

其中,  $k_{rm}$  表示第  $m$  阶模态对应的水平波数,  $z_s$  表示声源所在深度,  $\rho(z_s)$  表示声源所在深度的水体密度. 根据水声信道传播理论, 对于给定的简谐声源, 结合 (6) 式给出的声场传递函数, 可以得到空间任意位置处的声场分布, 通过水听器采样即可得到水听器所在位置的声源辐射声压信号. 因此, 与声源水平距离为  $r_s$  的  $N$  元 VLA 的接收信号时域快拍可以表示为 (离散形式)

$$\mathbf{x}(n) = \mathbf{G}s(n) + \mathbf{w}(n), \quad (7)$$

其中,  $\mathbf{x}(n) = [x_1(n), x_2(n), \dots, x_N(n)]$  表示  $n$  时刻阵列接收信号的时域快拍,  $x_i(n)$  表示第  $i$  号阵元在  $n$  时刻的采样值;  $s(n) = Ae^{-j(2\pi f_0 n + \varphi)}$  为简

谐声源辐射声信号的离散形式, 其中,  $A, f_0, \varphi$  分别表示信号幅度、声源归一化频率以及初相位;  $\mathbf{w}(n) = [w_1(n), w_2(n), \dots, w_N(n)]^T$  表示  $n$  时刻的噪声信号时域快拍,  $w_i(n)$  表示第  $i$  号阵元在  $n$  时刻的噪声采样值;  $\mathbf{G}$  由 VLA 各阵元位置处的声场传递函数  $G_i$  构成, 即  $\mathbf{G} = [G_1, G_2, \dots, G_N]^T$ , 由简正波模型可得,  $\mathbf{G} = \Psi\mathbf{a}$ , 其中,  $\mathbf{a}$  称为模态系数向量, 定义为

$$\mathbf{a} \triangleq (a_1(r_s, z_s), a_2(r_s, z_s), \dots, a_M(r_s, z_s))^T,$$

其中

$$a_m(r_s, z_s) = \frac{\sqrt{2\pi}e^{i\pi/4}}{\rho(z_s)} \frac{e^{ik_{rm}r_s}}{\sqrt{k_{rm}r_s}} \Psi_m(z_s). \quad (8)$$

将  $s(n)$  和  $\mathbf{G}$  的表达式代入 (7) 式, 简单计算可得

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(n) &= (\Psi e^{-j2\pi f_0 n}) \cdot (\mathbf{a}Ae^{-j\varphi}) + \mathbf{w}(n) \\ &= \Phi(n) \cdot \boldsymbol{\xi} + \mathbf{w}(n), \end{aligned} \quad (9)$$

其中,  $\Phi(n) \triangleq \Psi e^{-j2\pi f_0 n}$ ,  $\boldsymbol{\xi} \triangleq \mathbf{a}Ae^{-j\varphi}$ , 分别包含了 VLA 对各阶传播模态的采样信息以及声源位置和声源辐射声信号的幅度、相位等信息.

假设对简谐声源进行了  $N_t$  次观测, 即有  $N_t$  个接收信号时域快拍, 按照时间顺序将其排列成一个列向量  $\mathbf{X}$

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \begin{pmatrix} \mathbf{x}(0) \\ \mathbf{x}(1) \\ \vdots \\ \mathbf{x}(N_t - 1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \Phi(0) \\ \Phi(1) \\ \vdots \\ \Phi(N_t - 1) \end{pmatrix} \boldsymbol{\xi} + \begin{pmatrix} \mathbf{w}(0) \\ \mathbf{w}(1) \\ \vdots \\ \mathbf{w}(N_t - 1) \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{E}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{W}, \end{aligned} \quad (10)$$

其中,  $\mathbf{E}$  为  $NN_t \times M$  维的矩阵, 定义为

$$(\Phi^T(0) \ \Phi^T(1) \ \dots \ \Phi^T(N_t - 1))^T,$$

该矩阵称为观测矩阵. (10) 式给出了海洋波导中 VLA 对简谐声源辐射声场的观测模型, 它是一个线性的空时联合的观测模型. 基于此, 可以建立海洋波导中简谐声源的检测模型, 并给出相应的 GLRT 检测器及其理论检测性能.

### 3 模态信息非完备采样对简谐声源 GLRT 检测器的影响及改进方法

#### 3.1 位置未知简谐声源的 GLRT 检测器及其理论检测性能

假设位置未知的待检测简谐声源的辐射声信号频率已知, 幅度与初相位未知. 结合 (10) 式给出

$$\begin{cases} p(\mathbf{X}|\mathcal{H}_0) = \frac{1}{\pi^{NN_t}\sigma^{2NN_t}} \exp\left(-\frac{\mathbf{X}^H\mathbf{X}}{\sigma^2}\right), \\ p(\mathbf{X}|\mathcal{H}_1, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{\pi^{NN_t}\sigma^{2NN_t}} \exp\left[-\frac{1}{\sigma^2}(\mathbf{X} - \mathbf{E}\boldsymbol{\xi})^H(\mathbf{X} - \mathbf{E}\boldsymbol{\xi})\right]. \end{cases} \quad (12)$$

由于参数向量  $\boldsymbol{\xi}$  包含了声源的位置信息及其辐射声信号的幅度和相位信息, 因此, 该向量是未知的. 利用其最大似然估计  $\hat{\boldsymbol{\xi}}_{\text{MLE}}$ <sup>[18]</sup>

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\xi}}_{\text{MLE}} &= (\mathbf{E}^H\mathbf{E})^{-1}\mathbf{E}^H\mathbf{X} \\ &= \frac{1}{N_t}(\boldsymbol{\Psi}^T\boldsymbol{\Psi})^{-1}\mathbf{E}^H\mathbf{X} \end{aligned} \quad (13)$$

来代替似然函数中的原参数向量  $\boldsymbol{\xi}$ , 可以构建如下 GLRT 检测器,

$$\begin{aligned} T(\mathbf{X}) &= 2 \ln \frac{p(\mathbf{X}|\mathcal{H}_1, \hat{\boldsymbol{\xi}}_{\text{MLE}})}{p(\mathbf{X}|\mathcal{H}_0)} \\ &= \frac{\hat{\boldsymbol{\xi}}_{\text{MLE}}^H(\mathbf{E}^H\mathbf{E})\hat{\boldsymbol{\xi}}_{\text{MLE}}}{\sigma^2/2} \\ &= \frac{\hat{\mathbf{X}}^H\hat{\mathbf{X}}}{\sigma^2/2}, \end{aligned} \quad (14)$$

其中,  $\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{E}\hat{\boldsymbol{\xi}}_{\text{MLE}}$ . 为了使 (13) 式中对矩阵  $\mathbf{E}^H\mathbf{E}$  的求逆是成立的, 必须要求  $N \geq M$ <sup>[3-9]</sup>. (14) 式描述的检测器是一个估计-能量检测器, 它首先对接收数据中的信号成分进行估计, 得到  $\hat{\mathbf{X}}$ , 然后将估计信号的能量与噪声功率之比作为最终的检验统计量, 其统计分布为<sup>[18]</sup>

$$\begin{cases} T(\mathbf{X})|\mathcal{H}_0 \sim \chi_{2M}^2, \\ T(\mathbf{X})|\mathcal{H}_1 \sim \chi_{2M}^2(\beta). \end{cases} \quad (15)$$

(15) 式表明, 在  $\mathcal{H}_0$  假设条件下, 检验统计量  $T(\mathbf{X})$  服从自由度为  $2M$  的中心化卡方分布; 在  $\mathcal{H}_1$  假设条件下, 检验统计量  $T(\mathbf{X})$  服从自由度为  $2M$ 、非中心参量为  $\beta$  的非中心化卡方分布, 且  $\beta$  的表达式为<sup>[18]</sup>

$$\beta = \frac{\boldsymbol{\xi}^H(\mathbf{E}^H\mathbf{E})\boldsymbol{\xi}}{\sigma^2/2}$$

的声场观测模型, 可以建立检测模型如下,

$$\mathcal{H}_0 : \mathbf{X} = \mathbf{W}, \quad \mathcal{H}_1 : \mathbf{X} = \mathbf{E}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{W}, \quad (11)$$

其中,  $\mathbf{W}$  表示均值为 0、方差为  $\sigma^2$  的空时复高斯白噪声. (11) 式描述的检测问题是一个二元假设检验问题, 零假设  $\mathcal{H}_0$  表示海洋波导中不存在目标, 备选假设  $\mathcal{H}_1$  表示存在目标. 可以写出两种不同假设条件下的似然函数分别为<sup>[18]</sup>

$$\begin{aligned} &= \frac{N_t A^2 \|\mathbf{G}\|_2^2}{\sigma^2/2} \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{N_t A^2 |G_i|^2}{\sigma^2/2}. \end{aligned} \quad (16)$$

由 (16) 式可知, 非中心参量  $\beta$  即为阵列输出端的能量信噪比, 它等于所有阵元上的能量信噪比之和.  $\|\mathbf{G}\|_2^2$  表示 GLRT 检测器对输入信号的空间处理增益, 它由波导中的声场分布以及阵列布放位置决定.

根据信号检测理论<sup>[18]</sup>, 结合 (15) 式可以确定 GLRT 检测器的虚警概率  $P_{\text{FA}}$  与检测概率  $P_{\text{D}}$  分别为

$$\begin{cases} P_{\text{FA}} = \int_{\gamma}^{+\infty} p(T|\mathcal{H}_0) dT = Q_{\chi_{2M}^2}(\gamma), \\ P_{\text{D}} = \int_{\gamma}^{+\infty} p(T|\mathcal{H}_1) dT = Q_{\chi_{2M}^2(\beta)}(\gamma), \end{cases} \quad (17)$$

其中,  $\gamma$  表示与虚警概率  $P_{\text{FA}}$  相对应的检测门限. (17) 式给出的检测性能表明, 当虚警概率给定时, GLRT 检测器的检测概率由输出端能量信噪比 (非中心参量  $\beta$ ) 和波导中传播模态的个数共同决定. 并且, 由统计信号处理的相关知识可知, 当虚警概率给定时,  $T(\mathbf{X})$  对应的检测概率与  $\beta$  成正比而与  $M$  成反比<sup>[18,20]</sup>. 因此, 当波导中传播模态个数给定时, 提高阵列输出端能量信噪比可以提高检测概率; 当输出端能量信噪比给定时, 检测概率随波导中传播模态个数的减小而增大.

### 3.2 模态信息非完备采样对 GLRT 检测器的影响

由 2.1 节的分析可知, 当模态信息采样不完备时, 模态相关矩阵  $\Psi^T \Psi$  是病态的, 此时, 该矩阵所有特征值中存在一部分非常接近于 0 的小特征值, 这将对 GLRT 检测器产生重要影响.

将 (13) 式代入到 (14) 式, 可得 GLRT 检测器为

$$T(\mathbf{X}) = \frac{\mathbf{X}^H \mathbf{E} (\Psi^T \Psi)^{-1} \mathbf{E}^H \mathbf{X}}{N_t \sigma^2 / 2}. \quad (18)$$

对模态相关矩阵  $\Psi^T \Psi$  做特征值分解<sup>[21]</sup>, 有

$$\Psi^T \Psi = \sum_{i=1}^M \lambda_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T, \quad (19)$$

其中,  $\lambda_i$  为模态相关矩阵  $\Psi^T \Psi$  的第  $i$  阶特征值,  $\mathbf{u}_i$  是其对应的特征向量,  $i = 1, 2, \dots, M$ . 将 (19) 式代入 (18) 式, 可得 GLRT 检测器的谱分解表达式为

$$\begin{aligned} T(\mathbf{X}) &= \sum_{i=1}^M T_i \\ &= \sum_{i=1}^M \frac{\mathbf{X}^H \mathbf{E} \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T \mathbf{E}^H \mathbf{X}}{\lambda_i N_t \sigma^2 / 2}, \end{aligned} \quad (20)$$

其中,  $T_i$  称为 GLRT 检测器的第  $i$  阶谱成分, 它对应了模态相关矩阵的第  $i$  阶特征值. 且特征值由大到小排列, 即谱成分  $T_1$  对应了最大特征值  $\lambda_1$ . 本文证明了各阶谱成分服从以下统计分布 (证明过程详见附录):

$$\begin{cases} T_i | \mathcal{H}_0 = \frac{\mathbf{X}^H \mathbf{E} \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T \mathbf{E}^H \mathbf{X}}{\lambda_i N_t \sigma^2 / 2} \sim \chi_2^2, \\ T_i | \mathcal{H}_1 \sim \chi_2^2(\beta_i), \end{cases} \quad (21)$$

并且, 各阶谱成分之间是统计独立的.  $\beta_i$  表示  $\mathcal{H}_1$  假设条件下各阶谱成分服从非中心化卡方分布的非中心参量, 表达式为 (推导过程详见附录):

$$\beta_i = \frac{A^2 N_t \lambda_i \|\mathbf{a}^H \mathbf{u}_i\|_2^2}{\sigma^2 / 2}. \quad (22)$$

(20) 和 (21) 式表明, 通过特征值分解可以将 GLRT 检测系统分解成  $M$  阶相互独立的谱成分, 各阶谱成分对输入信号具有各自的空间处理增益. 根据 (22) 式, 可以确定第  $i$  阶谱成分对输入信号的空间处理增益 (spatial gain, SG) 为

$$\text{SG}_i = \lambda_i \|\mathbf{a}^H \mathbf{u}_i\|_2^2, \quad (23)$$

其大小与谱成分对应的特征值成正比, 即  $\text{SG}_i \propto \lambda_i$ . 并且, 所有谱成分对输入信号空间处理增益之

和等于 GLRT 检测系统对输入信号总的空间处理增益, 即

$$\sum_{i=1}^M \text{SG}_i = \sum_{i=1}^M \lambda_i \|\mathbf{a}^H \mathbf{u}_i\|_2^2 = \|\mathbf{G}\|_2^2, \quad (24)$$

从非中心参量的角度可以表示为

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^M \beta_i &= \frac{A^2 N_t}{\sigma^2 / 2} \sum_{i=1}^M \lambda_i \|\mathbf{a}^H \mathbf{u}_i\|_2^2 \\ &= \frac{A^2 N_t \|\mathbf{G}\|_2^2}{\sigma^2 / 2} = \beta. \end{aligned} \quad (25)$$

当模态信息采样不完备时, 某几阶模态采样可以由其余模态采样近似线性表示, 此时, 模态相关矩阵的特征值中将出现一部分非常接近于 0 的小特征值. 根据 (23) 式可知, 这部分特征值对应的谱成分对输入信号的空间处理增益与某些大特征值对应的谱成分相比非常小, 对总增益的贡献可以忽略. 本文将接近于 0 的小特征值对应的谱成分称为无效谱成分, 将大特征值对应的谱成分称为有效谱成分. 由于有效谱成分对输入信号处理增益之和远大于无效谱成分对输入信号处理增益之和, 因此, 当目标存在时, GLRT 检测器输出中的目标信号成分主要来自于有效谱成分, 而无效谱成分的输出相比有效谱成分则包含了极少的信号成分和非常多的噪声成分, 在此意义下, 可以将有效谱成分和无效谱成分分别看作 GLRT 检测器的信号谱成分和噪声谱成分. 可见, 模态信息非完备采样对 GLRT 检测器的影响主要体现在对其各阶谱成分处理增益的影响上: 它将使 GLRT 检测器对输入信号的处理增益集中在与模态相关矩阵大特征值相对应的谱成分上.

### 3.3 有效谱检测器

根据 3.2 节的分析, 由于模态信息非完备采样将使 GLRT 检测器中出现有效谱成分与无效谱成分, 而两者分别对应了 GLRT 检测器输出中的信号谱成分与噪声谱成分, 因此, 舍去无效谱成分后得到的检测器

$$T_r(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^d \frac{\mathbf{X}^H \mathbf{E} \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T \mathbf{E}^H \mathbf{X}}{\lambda_i N_t \sigma^2 / 2} \quad (26)$$

将在保持其输出中目标信号成分与 GLRT 检测器基本相同的基础上有效减少输出中的噪声成分, 从而使得该检测器的检测性能优于 GLRT 检测器, 其中  $d$  表示有效谱成分的个数.

$T_r(\mathbf{X})$  即根据模态信息非完备采样对 GLRT 检测器各阶谱成分的影响, 对 GLRT 检测器进行针对性的改进而得到的检测器, 本文将其称为有效谱检测器 (effective spectrum detector, ESD). 根据 (21) 和 (26) 式, 可以确定 ESD 的统计分布为

$$\begin{cases} T_r(\mathbf{X})|\mathcal{H}_1 \sim \chi_{2d}^2(\beta_r), \\ T_r(\mathbf{X})|\mathcal{H}_0 \sim \chi_{2d}^2, \end{cases} \quad (27)$$

其中,  $\beta_r$  表示  $\mathcal{H}_1$  假设条件下 ESD 对应的非中心参量. 由于在模态信息非完备采样条件下, GLRT 检测器对输入信号的空间处理增益主要来源于有效谱成分, 即

$$\|\mathbf{G}\|_2^2 \approx \sum_{i=1}^d SG_i = \sum_{i=1}^d \lambda_i \|\mathbf{a}^H \mathbf{u}_i\|_2^2, \quad (28)$$

因此,

$$\begin{aligned} \beta_r &= \sum_{i=1}^d \beta_i \\ &= \frac{A^2 N_t}{\sigma^2/2} \sum_{i=1}^d \lambda_i \|\mathbf{a}^H \mathbf{u}_i\|_2^2 \\ &\approx \frac{A^2 N_t \|\mathbf{G}\|_2^2}{\sigma^2/2} \\ &= \beta. \end{aligned} \quad (29)$$

从统计处理的角度来看, ESD 在获得与 GLRT 检测器对输入信号近似相同的空间处理增益, 即对应的非中心参量近似相等 ( $\beta_r \approx \beta$ ) 的同时, 有效地降低了检验统计量的统计自由度 (由  $2M$  降为  $2d$ , 相当于减少了噪声成分). 结合 3.1 节中关于 GLRT 检测器检测性能的分析可知, 当模态信息采样不完备时, ESD 的检测性能将优于 GLRT 检测器, 即相同信噪比下, ESD 对目标的检测概率要高于 GLRT 检测器.

#### 4 仿真实验及结果

本节在典型的浅海波导环境中, 对不同模态信息采样度下 GLRT 检测器的检测性能及各阶谱成分对应的检测性能进行计算机仿真, 探究模态信息非完备采样对 GLRT 检测器的影响; 对 ESD 的检测性能进行仿真研究, 并将其与 GLRT 检测器的检测性能进行对比, 以验证 ESD 的有效性.

仿真环境采用典型的分层浅海波导环境, 如图 1 所示: 水深为 120 m, 底质层为 6 m, 以下为半空间, 各层中声速随深度线性变化, 具体取值如图

中所示. 仿真中, 简谐声源距离垂直线列阵 8 km, 距离水面 50 m, 设定 VLA 距离水面 1 m 处向下布放, 阵元间隔为 1 m (阵元间隔小, 保证对各阶模态都满足空间采样定理), 阵列孔径由具体仿真中选取的 MSD 值确定.

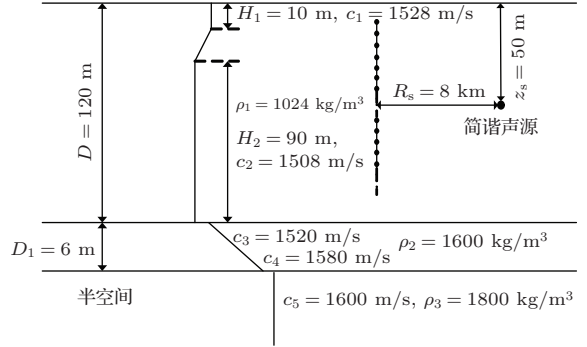


图 1 波导环境、声源位置和阵列布放仿真示意图

仿真中目标信号为 200 Hz 的复信号, 背景噪声为均值为 0、方差  $\sigma^2$  为 1 的空时复高斯白噪声. 取单个数据快拍进行处理, 采样频率为 1 kHz, 信噪比 (signal-to-noise ratio, SNR) 定义为阵列输出端的能量信噪比, 表达式为  $10 \log_{10}(2A^2 N_t \|\mathbf{G}\|_2^2 / \sigma^2)$  (即  $10 \log_{10}(\beta)$ ), 仿真中通过改变目标信号幅度来调整信噪比, 每一信噪比取值下的蒙特卡罗实验次数为 100000 次. 各仿真实验中, 虚警概率均设定为 0.1.

#### 4.1 模态信息非完备采样对 GLRT 检测器谱成分的影响

将图 1 所示的波导环境参数输入到 KRAKEN<sup>[22]</sup> 声场计算软件中, 计算可得该波导中 200 Hz 窄带声源的辐射声场分布, 以及该声源可以激发出 11 阶模态. 图 2 和图 3 分别给出了具体的声场分布和模态随深度的变化关系 ( $m$  表示模态的阶数).

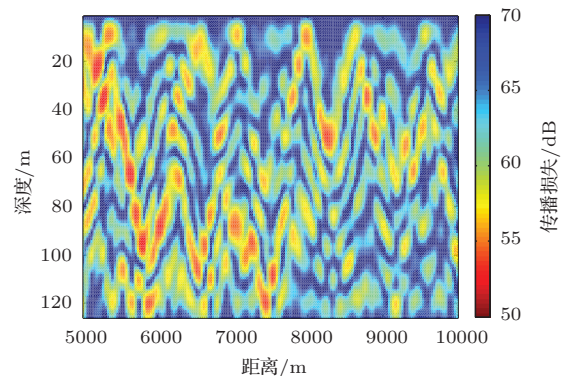


图 2 (网刊彩色) 200 Hz 简谐声源辐射声场分布

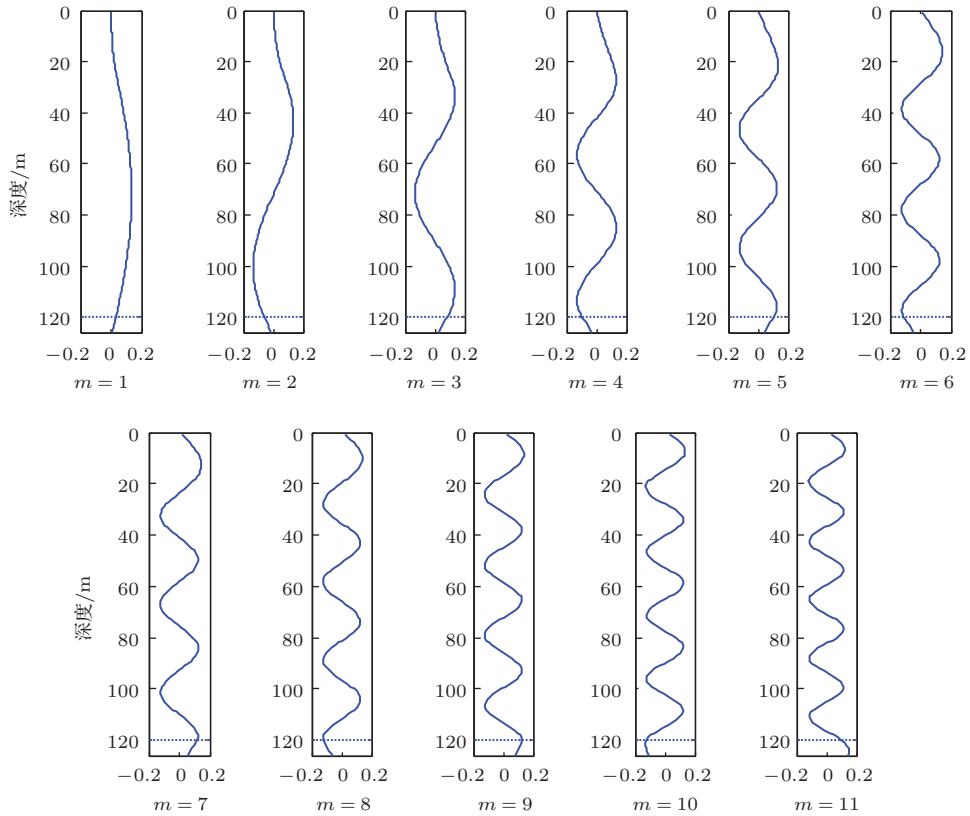


图3 200 Hz 简谐声源激发的模态函数

对比图3中120 m深度以下的各阶模态成分可知: 在大于120 m的深度上, 模态函数并没有衰减至0, 且高阶模态相对低阶模态拥有更丰富的信息. 这是由于海底并非理想刚性, 模态将进一步渗透到底质层中, 并且, 高阶模态对应的垂直波数相比低阶模态更小, 在底质层以及半空间中的衰减更慢所导致的<sup>[1]</sup>. 可见, 即使使用孔径为120 m的垂直阵, 即覆盖整个水深, 也很难采样到各阶模态(特别是高阶模态)的完整信息. 而实际当中, 使用的水听器阵列很少能够覆盖整个水深, 因此, 阵列对各阶模态信息的采样是不完整的, 这将使得某几阶模态采样可以用其余模态采样近似线性表示, 进而导致模态相关矩阵病态.

为了便于衡量MSD的具体取值, 这里给定  $H = 126$  m, 即仅关注水体以及底质层中模态信息的非完备采样情况(后续仿真与此相同).

假设阵列孔径在11—120 m范围内变化, 相应地, MSD在0.08—0.95之间变化. 我们计算了不同MSD下模态相关矩阵的条件数, 结果在图4中给出.

由图4可知, 随着MSD的减小, 模态相关矩阵的条件数总体呈上升趋势. 通常情况下, 认为模态

相关矩阵的条件数大于 $10^3$ 时, 模态相关矩阵是病态的<sup>[14]</sup>. 因此, 可以估计出, 当MSD小于0.82时, 模态相关矩阵是病态的. 可见, 模态信息非完备采样导致模态相关矩阵病态在实际中是较为容易且普遍的.

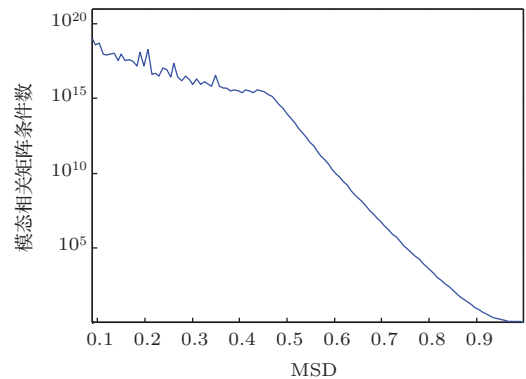


图4 MSD与模态相关矩阵条件数之间的关系

选取  $MSD = 0.95$  以及  $MSD = 0.51$  两种模态信息采样情况, 对应的阵列孔径分别为120和65 m, 仿真研究模态信息非完备采样对GLRT检测器各阶谱成分的影响. 图5分别给出了这两种情况下模态相关矩阵的特征值分布以及GLRT检测器各阶谱成分对输入信号的空间处理增益.

对比图 5(a) 与 (b) 可知: 当各阶模态信息采样均较为完整时 ( $MSD = 0.95$ ), 模态相关矩阵的特征值分布比较集中, 各阶谱成分对输入信号的处理增益均不为 0, 且相差不大; 然而, 当  $MSD = 0.51$  时, 模态相关矩阵的特征值呈“阶梯型”分布, 其中, 受近似为 0 的特征值的影响,  $\lambda_7 - \lambda_{11}$  所对应的谱成分对输入信号的空间处理增益近似为 0, 远小于其余谱成分. 可见, 模态信息非完备采样将使 GLRT 检测器中的一部分谱成分对输入信号的处理增益远小于其余谱成分, 我们将受小特征值影响而对输入信号处理增益较小的谱成分称为无效谱成分, 而将其余谱成分称为有效谱成分.

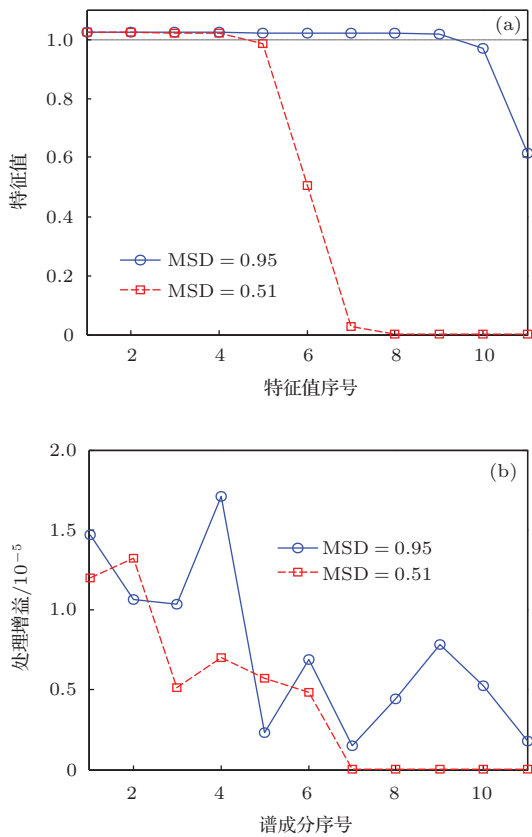


图 5 不同 MSD 下模态相关矩阵的特征值分布以及各阶谱成分对应的空间处理增益 (a) 模态相关矩阵特征值分布; (b) 谱成分空间处理增益

图 6 给出了  $MSD = 0.51$  时, GLRT 检测器的各阶谱成分在不同信噪比下对目标的检测概率, 图中强度代表检测概率.

由图 6 可知, 当信噪比在 0—30 dB 范围内变化时, 无效谱成分 ( $T_7 - T_{11}$ ) 对目标的检测概率近似为 0.1, 约等于虚警概率. 这表明, 在此信噪比范围内, 无效谱成分的输出中基本上仅含有噪声成分; 然而, 在相同信噪比范围内, 有效谱成分 ( $T_1 - T_6$ )

对目标的检测概率随着信噪比的增大而逐渐增大, 这表明有效谱成分输出中的信号成分随着信噪比的增大越来越显著. 因此, 可以将无效谱成分与有效谱成分分别视作 GLRT 检测器的噪声谱成分与信号谱成分. 这是由于无效谱成分对输入信号的处理增益远小于有效谱成分导致的. 需要指出的是, 无效谱成分的输出中不是仅含有噪声, 随着信噪比的增大, 信号成分会越来越显著, 但相比有效谱成分而言, 无效谱成分含有更多的噪声成分以及极少的信号成分.

综上所述, 模态信息非完备采样很容易导致模态相关矩阵病态, 从而造成 GLRT 检测器中出现无效谱成分和有效谱成分, 两者分别对应了 GLRT 检测器的噪声谱成分以及信号谱成分.

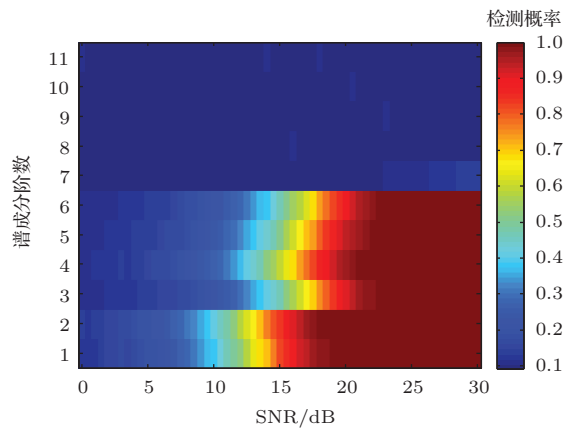


图 6 (网刊彩色) GLRT 检测器各阶谱成分检测性能

### 4.2 模态信息非完备采样对 GLRT 检测器检测性能的影响

分别在模态信息采样度为 0.95, 0.51, 0.238, 0.158 的情况下, 对 GLRT 检测器的检测性能进行计算机仿真, 并将其与 GLRT 检测器的理论检测性能进行对比, 对比结果在图 7 中给出.

由图 7 可知, 当  $MSD = 0.95$  时, 阵列对模态信息的采样较为完整, 此时, GLRT 检测器的仿真检测性能与其理论检测性能基本相同, 如图 7(a) 所示, 忽略蒙特卡罗实验次数不足带来的统计误差, 可认为二者是完全相同的. 由图 4 可知, 图 7(b), (c), (d) 对应的 3 种模态信息采样度都将使对应的模态相关矩阵病态. 当  $MSD = 0.51$  时, GLRT 检测器的实际检测性能与其理论检测性能相同, 这是因为模态信息非完备采样并没有改变 GLRT 检测器的统计特性 (由 3.2 节的理论分析可知), 因此,



GLRT 检测器的仿真检测性能与其理论检测性能应当相同. 然而, 随着 MSD 的减小, 模态相关矩阵的最小特征值越来越逼近于 0, 具体地, 图 7(b), (c), (d) 对应的模态相关矩阵的最小特征值分别达到了  $10^{-14}$ ,  $10^{-17}$ ,  $10^{-19}$  的量级, 此时, 要精确计算这类小特征值对应的谱成分需要非常高的计算精度 [6,13]. 然而, 对于一个实际处理系统而言, 其计算精度是有限的: 当处理系统的计算精度满足要求时, 该系统能够精确计算各阶谱成分的值, GLRT 检测器的仿真检测性能与其理论检测性能相同, 如图 7(b) 所示; 然而, 当 MSD 为 0.238 和 0.158 时, 其最小特征值分别达到了  $10^{-17}$ ,  $10^{-19}$  的量级, 此时, 本文所采用的处理系统并不能精确地计算这部分小特征值对应的谱成分, 计算上的数值误差将导致 GLRT 检测器的仿真检测性能与其理论检测性能不同, 如图 7(c), (d) 所示.

通过以上分析可知, 模态信息非完备采样将可能导致 GLRT 检测器的仿真检测性能与其理论检测性能之间存在一定的差异. 这是由处理系统计算精度不满足要求导致的, 并非由模态信息非完备采样直接造成. ESD 不仅可以获得比 GLRT 检测器更好的检测性能, 而且还可以很好地克服 GLRT 检

测器数值计算的不稳定性, 从而解决在模态信息非完备采样程度较为严重的情况下, 检测器理论检测性能与实际检测性能不符的问题.

### 4.3 ESD 与 GLRT 检测器检测性能对比仿真分析

将与模态相关矩阵最大特征值的比值小于  $10^{-3}$  的特征值所对应的谱成分均视作无效谱成分, 其余谱成分即为有效谱成分, 则图 8 中 4 种模态信息采样度对应的有效谱个数  $d$  分别为 11, 7, 3, 2. 需要说明的是, 虽然根据 4.1 节的仿真分析可知, 当  $MSD = 0.51$  时, GLRT 检测器中应含有 6 个有效谱成分, 而根据本节给出的按照特征值大小对谱成分进行分类的方法, 有效谱个数为 7, 两者存在一定的差异, 但由于该差异非常小, 对 ESD 与 GLRT 检测器检测性能的对比不会产生明显的影响, 并且按照特征值的大小来确定 GLRT 检测器中的有效谱成分相比 4.1 节中的方法更为简单、直接、易实现. 因此, 本节选择采用该方法来确定 GLRT 检测器中的有效谱成分. 图 8 给出了这 4 种检测环境下 ESD 的仿真检测性能及其与 GLRT 检测器检测性能的对比.

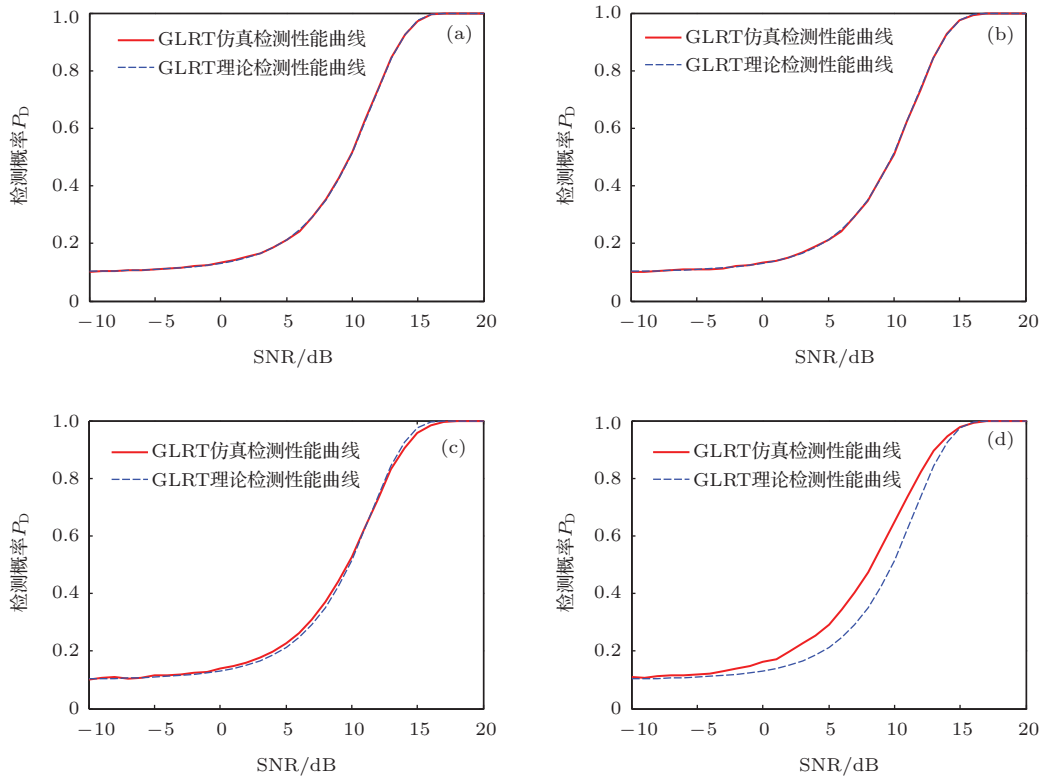


图 7 (网刊彩色) 不同 MSD 下 GLRT 检测器仿真检测性能与理论检测性能对比 (a)  $L = 120$  m,  $MSD = 0.95$ ; (b)  $L = 65$  m,  $MSD = 0.51$ ; (c)  $L = 30$  m,  $MSD = 0.238$ ; (d)  $L = 20$  m,  $MSD = 0.158$

由图 8 可知: 1) 当 MSD 为 0.95 时, ESD 的检测性能与 GLRT 检测器的检测性能相同, 这是因为此时 GLRT 检测器的各阶谱成分都是有效谱成分 ( $d = 11$ ), 所以, GLRT 检测器与 ESD 是相同的, 两者的检测性能也理应相同; 2) 当模态信息采样不完备时, ESD 的检测性能要优于 GLRT 检测器的理论检测性能, 如图 8 (b), (c), (d) 所示; 并且, 随着 MSD 的减小, ESD 的检测性能相对 GLRT 检测器理论检测性能的提高也逐渐增大, 图 8 (b), (c), (d) 对应的检测环境中检测性能的提高量分别近似为 0.5, 1.5 以及 2 dB; 3) 根据 4.2 节的仿真分析可知, 实际处理中, 随着模态信息非完备采样程度的增加, 要精确计算 GLRT 检验统计量需要很高的计算

精度. 当计算精度满足要求时, GLRT 检测器的实际检测性能与其理论检测性能相同, 此时, ESD 的检测性能要优于 GLRT 检测器的实际检测性能, 如图 8 (b) 所示; 当计算精度不满足要求时, GLRT 检测器的实际检测性能与其理论检测性能之间存在一定的偏差, 但对于计算精度较高的处理系统而言, 这样的偏差与 ESD 的检测性能相对 GLRT 检测器检测性能的提升相比还是较小, 因此, ESD 的检测性能总体上仍然要优于 GLRT 检测器的实际检测性能, 如图 8 (c), (d) 所示.

此外, 在 MSD 为 0.238 和 0.158 的情况下, 将 ESD 的仿真检测性能与其理论检测性能 ((27) 和 (29) 式) 进行对比, 结果如图 9 所示.

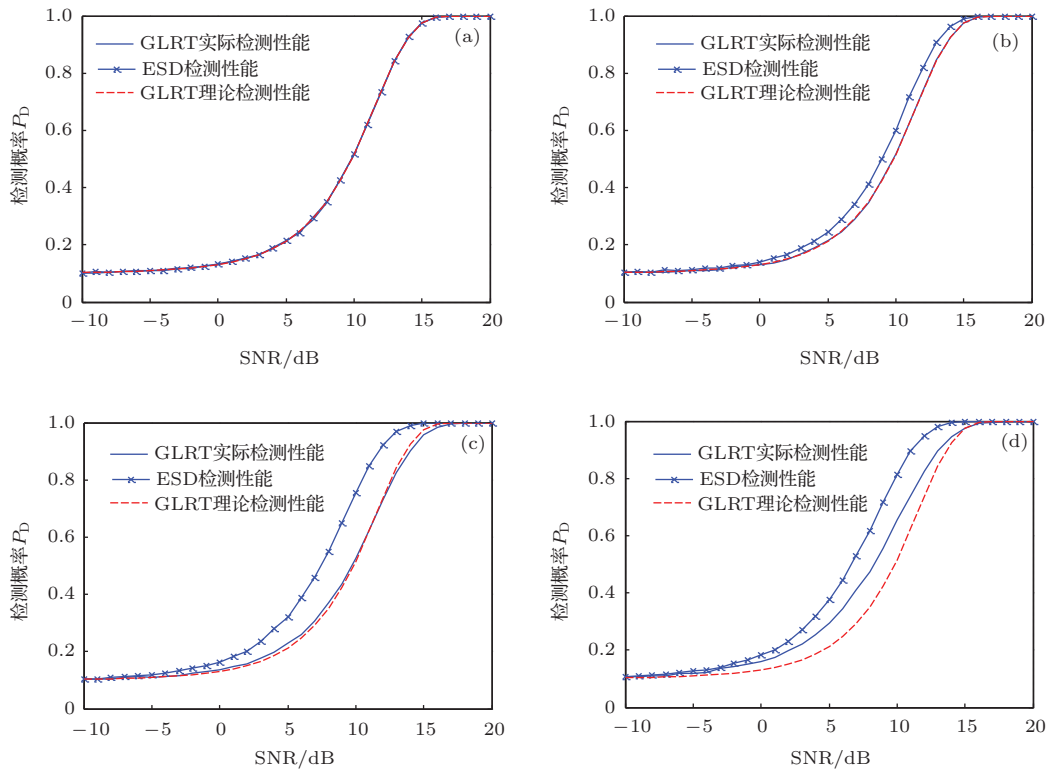


图 8 (网刊彩色) 不同 MSD 下 ESD 与 GLRT 检测器检测性能对比 ( $d$  为有效谱个数) (a) MSD = 0.95 ( $d = 11$ ); (b) MSD = 0.51 ( $d = 7$ ); (c) MSD = 0.238 ( $d = 3$ ); (d) MSD = 0.158 ( $d = 2$ )

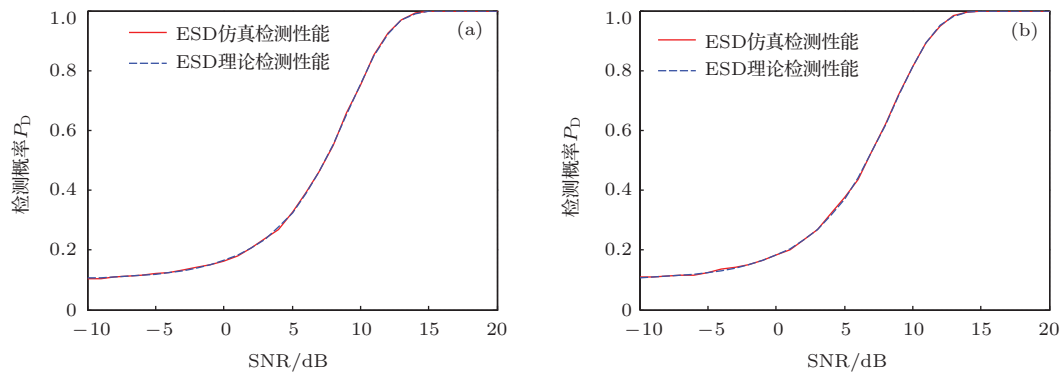


图 9 (网刊彩色) 不同 MSD 下 ESD 仿真检测性能与理论检测性能对比 (a) MSD = 0.238; (b) MSD = 0.158

由图 9 可知, 在模态信息非完备采样程度比较严重的情况下, ESD 的仿真检测性能与其理论检测性能是相同的, 并没有出现图 7(c), (d) 所示的 GLRT 检测器仿真检测性能与理论检测性能不同的现象. 这是因为 ESD 舍去的无效谱成分均是小特征值对应的谱成分, 因此避免了处理系统计算精度不足导致实际检测性能与理论检测性能不相符合的现象. 此外, 仿真结果也表明了文中给出的 ESD 的理论检测性能是正确的.

上述仿真分析说明, 当模态信息采样不完备时, ESD 的检测性能要优于 GLRT 检测器, 并且在数值计算层面上也比 GLRT 检测器要稳健.

## 5 结 论

本文研究了模态信息非完备采样对海洋波导中位置未知简谐声源 GLRT 检测器的影响, 得到了如下结论.

1) 位置未知简谐声源的 GLRT 检测器对目标的检测概率由波导中传播模态的个数以及阵列输出端的能量信噪比所决定.

2) 模态信息非完备采样很容易导致模态相关矩阵病态, 此时, 模态相关矩阵中存在一部分非常接近于 0 的特征值, 与这部分小特征值相对应的谱成分受到特征值的影响, 对输入信号的空间处理增益与其余某些谱成分相比非常小. 本文将与模态相关矩阵小特征值相对应的谱成分称为无效谱成分, 将模态相关矩阵的大特征值对应的谱成分称为有效谱成分. 有效谱成分对输入信号的处理增益之和远大于无效谱成分对输入信号的处理增益之和, 因此, 有效谱成分与无效谱成分分别对应了 GLRT 检测器输出中的信号谱成分与噪声谱成分.

3) 模态信息非完备采样并不会改变 GLRT 统计量的统计特性, 因此, 不会改变 GLRT 检测器的检测性能. 然而, 当模态信息非完备采样程度非常严重时, 无效谱成分将影响到实际处理系统的数值计算稳定性, 从而导致 GLRT 检测器的实际检测性能与理论检测性能不相符.

根据模态信息非完备采样对 GLRT 检测器各阶谱成分的影响, 本文通过提取与模态相关矩阵大特征值相对应的谱成分, 提出了有效谱检测器. 当模态信息采样不完备时, 该检测器比 GLRT 检测器具有更好的检测性能以及数值计算稳定性, 并且, 非完备采样的程度越严重, ESD 相对于 GLRT 检

测器检测性能的提高越显著. 仿真实验对上述结论以及有效谱检测器的有效性进行了验证.

## 附录

为描述简便(忽略下角标), 令  $\hat{\xi} = \hat{\xi}_{MLE}$ , 且令

$$\begin{aligned}\xi &= \mathbf{u} + \mathbf{jv}, \\ \hat{\xi} &= \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{j}\hat{\mathbf{v}}, \\ \boldsymbol{\eta} &= [\mathbf{u}^T \quad \mathbf{v}^T]^T, \\ \hat{\boldsymbol{\eta}} &= [\hat{\mathbf{u}}^T \quad \hat{\mathbf{v}}^T]^T.\end{aligned}$$

对于文中推导得到的 GLRT 检测器, 根据文献 [18] 可得

$$\begin{aligned}T(\mathbf{X}) &= \frac{\hat{\xi}^H (\mathbf{E}^H \mathbf{E}) \hat{\xi}}{\sigma^2/2} \\ &= 2\hat{\xi}^H \mathbf{C}_{\hat{\xi}}^{-1} \hat{\xi} \\ &= \hat{\boldsymbol{\eta}}^T \mathbf{C}_{\hat{\boldsymbol{\eta}}}^{-1} \hat{\boldsymbol{\eta}},\end{aligned}\quad (\text{A1})$$

其中,  $\mathbf{C}_{\hat{\xi}} = \sigma^2 (\mathbf{E}^H \mathbf{E})^{-1}$ , 表示复向量  $\hat{\xi}$  的协方差矩阵. 注意, 由于考虑的模态函数是实函数, 因此,  $\mathbf{C}_{\hat{\xi}}$  是实矩阵;

$$\mathbf{C}_{\hat{\boldsymbol{\eta}}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{\hat{\xi}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{\hat{\xi}} \end{pmatrix}^{[18]},$$

该矩阵表示实向量  $\hat{\boldsymbol{\eta}}$  的协方差矩阵. 对于  $\mathbf{C}_{\hat{\boldsymbol{\eta}}}^{-1}$ , 有

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_{\hat{\boldsymbol{\eta}}}^{-1} &= 2 \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{\hat{\xi}}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{\hat{\xi}}^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \frac{2}{\sigma^2} \begin{pmatrix} \mathbf{E}^H \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}^H \mathbf{E} \end{pmatrix} \\ &= \frac{2}{\sigma^2} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{U}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{U}^T \end{pmatrix},\end{aligned}\quad (\text{A2})$$

其中,  $\mathbf{E}^H \mathbf{E} = \mathbf{U} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{U}^T$  为 Hermite 矩阵  $\mathbf{E}^H \mathbf{E}$  的谱分解形式,  $\mathbf{U}$  为正交矩阵,  $\boldsymbol{\Lambda}$  为对角阵, 对角线上的元素为矩阵  $\mathbf{E}^H \mathbf{E}$  的特征值. 由于  $\mathbf{E}^H \mathbf{E}$  又为实对称矩阵, 因此, 其特征值均为非负实数 [21], 进一步可将 (A2) 式写作

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_{\hat{\boldsymbol{\eta}}}^{-1} &= \frac{2}{\sigma^2} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{U}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{U}^T \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\sigma^2}} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \boldsymbol{\Lambda}^{1/2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U} \boldsymbol{\Lambda}^{1/2} \end{pmatrix} \\ &\quad \times \sqrt{\frac{2}{\sigma^2}} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \boldsymbol{\Lambda}^{1/2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U} \boldsymbol{\Lambda}^{1/2} \end{pmatrix}^T \\ &= \mathbf{D}^T \mathbf{D},\end{aligned}\quad (\text{A3})$$

其中,  $\boldsymbol{\Lambda}^{1/2}$  表示对  $\boldsymbol{\Lambda}$  对角线上元素开平方后得到的矩阵,

$$\mathbf{D} = \sqrt{\frac{2}{\sigma^2}} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \boldsymbol{\Lambda}^{1/2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U} \boldsymbol{\Lambda}^{1/2} \end{pmatrix}^T.$$

令  $\rho = D\hat{\eta}$ , 有

$$\begin{aligned} \text{cov}(\rho) &= E\{[\rho - E(\rho)][\rho - E(\rho)]^T\} \\ &= E[D[\hat{\eta} - E(\hat{\eta})][\hat{\eta} - E(\hat{\eta})]^T D^T] \\ &= D\text{cov}(\hat{\eta})D^T \\ &= DD^{-1}(D^{-1})^T D^T \\ &= I. \end{aligned} \quad (A4)$$

由 (A4) 式可知, 向量  $\rho$  的各个分量是不相关的, 又因为它们是从高斯分布的, 所以各分量又是统计独立的, 即,  $\rho = D\hat{\eta} \sim N(D\eta, I)$ . 当不存在目标信号时,  $D\eta = 0$ .

进一步可以得到

$$\begin{aligned} (D\hat{\eta})^T D\hat{\eta} &= (D\hat{\eta})^T I \cdot D\hat{\eta} \\ &= (D\hat{\eta})^T \begin{pmatrix} I_{M \times M} & 0 \\ 0 & I_{M \times M} \end{pmatrix} D\hat{\eta} \\ &= \sum_{i=1}^M (D\hat{\eta})^T \begin{pmatrix} I_i & 0 \\ 0 & I_i \end{pmatrix} D\hat{\eta}, \end{aligned} \quad (A5)$$

其中,  $I_i$  表示仅有第  $i$  行第  $i$  列元素为 1 其余元素均为 0 的  $M$  维方阵. 对于其中的第  $i$  项, 有

$$\begin{cases} (D\hat{\eta})^T \begin{pmatrix} I_i & 0 \\ 0 & I_i \end{pmatrix} D\hat{\eta} \sim \chi_2^2(\beta_i), \\ \beta_i = (D\eta)^T \begin{pmatrix} I_i & 0 \\ 0 & I_i \end{pmatrix} D\eta, \end{cases} \quad (A6)$$

并且,  $i = 1, 2, \dots, M, j = 1, 2, \dots, M$ , 当  $i \neq j$  时,

$$(D\hat{\eta})^T \begin{pmatrix} I_i & 0 \\ 0 & I_i \end{pmatrix} D\hat{\eta}$$

与

$$(D\hat{\eta})^T \begin{pmatrix} I_j & 0 \\ 0 & I_j \end{pmatrix} D\hat{\eta}$$

统计独立. 此外,

$$\begin{aligned} &(D\hat{\eta})^T \begin{pmatrix} I_i & 0 \\ 0 & I_i \end{pmatrix} D\hat{\eta} \\ &= \frac{2}{\sigma^2} \hat{\eta}^T \begin{pmatrix} U\Lambda^{1/2} & 0 \\ 0 & U\Lambda^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_i & 0 \\ 0 & I_i \end{pmatrix} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} \Lambda^{1/2}U^T & 0 \\ 0 & \Lambda^{1/2}U^T \end{pmatrix} \hat{\eta} \\ &= \frac{2}{\sigma^2} \hat{\xi}^H U\Lambda^{1/2} I_i \Lambda^{1/2} U^T \hat{\xi} \\ &= \frac{2}{\sigma^2} X^H E (E^H E)^{-1} \\ &\quad \times U\Lambda^{1/2} I_i \Lambda^{1/2} U^T (E^H E)^{-1} E^H X \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{\sigma^2} X^H E U\Lambda^{-1} U^T U\Lambda^{1/2} I_i \Lambda^{1/2} U^T U\Lambda^{-1} U^T E^H X \\ &= \frac{2}{\sigma^2} X^H E U\Lambda^{-1/2} I_i \Lambda^{-1/2} U^T E^H X \\ &= \frac{X^H E u_i u_i^T E^H X}{N_t \lambda_i \sigma^2 / 2}, \\ &\quad (D\eta)^T \begin{pmatrix} I_i & 0 \\ 0 & I_i \end{pmatrix} D\eta \\ &= \frac{2}{\sigma^2} \eta^T \begin{pmatrix} U\Lambda^{1/2} & 0 \\ 0 & U\Lambda^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_i & 0 \\ 0 & I_i \end{pmatrix} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} \Lambda^{1/2}U^T & 0 \\ 0 & \Lambda^{1/2}U^T \end{pmatrix} \eta \\ &= \frac{2}{\sigma^2} \xi^H U\Lambda^{1/2} I_i \Lambda^{1/2} U^T \xi \\ &= \frac{N_t A^2 \lambda_i a^H u_i u_i^T a}{\sigma^2 / 2}, \end{aligned} \quad (A7)$$

其中,  $N_t \lambda_i$  表示矩阵  $E^H E$  的第  $i$  个特征值,  $\lambda_i$  表示模态相关矩阵的第  $i$  个特征值.

因此, GLRT 检测器的各阶谱成分

$$\frac{X^H E (u_i u_i^T) E^H X}{N_t \lambda_i \sigma^2 / 2}$$

的统计特性为

$$\begin{cases} \frac{X^H E (u_i u_i^T) E^H X}{N_t \lambda_i \sigma^2 / 2} \sim \chi_2^2(\beta_i), \\ \beta_i = \frac{N_t A^2 \lambda_i a^H u_i u_i^T a}{\sigma^2 / 2}, \end{cases} \quad (A8)$$

并且, 各阶谱成分是统计独立的. 当不存在目标信号时, 非中心参量  $\beta_i$  为 0, 各阶谱成分所服从的统计分布退化为自由度为 2 的中心化卡方分布.

### 参考文献

- [1] Jensen F B, Kuperman W A, Portor M B, Schmidt H 2000 *Computational Ocean Acoustics* (New York: Springer) pp258-261
- [2] Wang N, Liu J Z 2002 *Chin. Phys.* **11** 456
- [3] Shang E C 1985 *J. Acoust. Soc. Am.* **77** 1413
- [4] Shang E C, Clay C S, Wang Y Y 1985 *J. Acoust. Soc. Am.* **78** 172
- [5] Wilson G R, Koch R A, Vidmar P J 1988 *J. Acoust. Soc. Am.* **84** 310
- [6] Buck J R, Preisig J C, Wage K E 1998 *J. Acoust. Soc. Am.* **103** 1813
- [7] Yang T C 1987 *J. Acoust. Soc. Am.* **82** 1736
- [8] Collision N E, Dosso S E 2000 *J. Acoust. Soc. Am.* **107** 3089
- [9] Yi F, Sun C 2013 *Acta Acust.* **38** 35 (in Chinese) [易锋, 孙超 2013 声学学报 **38** 35]
- [10] Sha L, Nolte L W 2005 *J. Acoust. Soc. Am.* **117** 1942
- [11] Liu Z W, Sun C, Du J Y 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 064303 (in Chinese) [刘宗伟, 孙超, 杜金燕 2013 物理学报 **62** 064303]

- [12] Liu Z W 2013 *Ph. D. Dissertation* (Xi'an: Northwestern Polytechnical University) (in Chinese) [刘宗伟 2013 博士学位论文 (西安: 西北工业大学)]
- [13] Baggeroer A B, Kuperman W A, Mikhalevsky P N 1993 *IEEE J. Ocean. Eng.* **18** 401
- [14] Wang Z J 2003 *Ph. D. Dissertation* (Beijing: Graduate University of Chinese Academy of Sciences) (in Chinese) [王振杰 2003 博士学位论文 (北京: 中国科学院研究生院)]
- [15] Ou J K 2004 *Acta Geodaet. Cartograph. Sin.* **33** 283 (in Chinese) [欧吉坤 2004 测绘学报 **33** 283]
- [16] Yang W C 1989 *Geophysical Inversion and Seismic Tomography* (Beijing: Geology Press) pp78–112 (in Chinese) [杨文采 1989 地球物理反演和地震层析成像 (北京: 地质出版社) 第 78—112 页]
- [17] Xu P L 1998 *Geophys. J. Int.* **135** 505
- [18] Kay S M 1998 *Fundamentals of Statistical Signal Processing Volume II: Detection Theory* (New Jersey: Prentice Hall) pp499–501
- [19] Neilsen T B, Westwood E K 2002 *J. Acoust. Soc. Am.* **111** 748
- [20] Kay S M 2013 *IEEE Sign. Process. Lett.* **20** 619
- [21] Zhang X D 2004 *Matrix Analysis and Applications* (Beijing: Tsinghua University Press) p453 (in Chinese) [张贤达 2004 矩阵分析与应用 (北京: 清华大学出版社) 第 453 页]
- [22] Porter M B 1991 *The KRAKEN Normal Mode Program* (La Spezia, Italy: SACLANT Undersea Research Centre)

# Effects of incomplete modal sampling on the underwater target detection and performance improvement method\*

Li Ming-Yang Sun Chao<sup>†</sup> Shao Xuan

(School of Marine Science and Technology, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

( Received 7 April 2014; revised manuscript received 19 June 2014 )

## Abstract

The generalized likelihood ratio test (GLRT) detector and its theoretical detection performance for an underwater narrowband source with an unknown position are both given in this paper. Via the eigenvalue decomposition of the mode correlation matrix (MCM), the GLRT detector is decomposed into different spectrum components corresponding to the eigenvalues of the MCM. Based on the derived statistical property of each component, the spatial processing gain of each spectrum component with respect to the input signal is obtained, which is proportional to the corresponding eigenvalue. As there are several eigenvalues of the MCM approaching to zero when the modal information is incompletely sampled, the components corresponding to these small eigenvalues contribute much less spatial processing gain to the input signal than other components. By discarding the components corresponding to these small eigenvalues, the effective spectrum detector (ESD) is proposed, of which the target signal component in the output is approximately identical to that of the GLRT detector, and the noise in the ESD output is much less. Therefore, a much more robust detection performance is obtained by ESD than by the GLRT detector. Numerical simulations in a typical shallow water environment demonstrate that 1) the theoretical analyses, derivations and the effectiveness of the proposed ESD are verified; 2) the more incomplete the modal information sampling is, the more significant performance improvement of ESD over the GLRT detector can be acquired; 3) the numerical stability of the ESD is better than that of the GLRT detector.

**Keywords:** spatial processing gain, small eigenvalues, effective spectrum detector, incomplete modal information sampling

**PACS:** 43.60.Bf, 43.60.Cg, 43.60.+d, 43.30.+m

**DOI:** [10.7498/aps.63.204302](https://doi.org/10.7498/aps.63.204302)

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11274252, 51479169).

† Corresponding author. E-mail: [csun@nwpu.edu.cn](mailto:csun@nwpu.edu.cn)