

# 基于能量转换原理的磁电层合材料 低频磁电响应分析\*

代显智†

(西华师范大学物理与电子信息学院, 南充 637009)

(2014年4月9日收到; 2014年6月13日收到修改稿)

提出了一种基于能量转换原理的磁致伸缩/压电层合材料低频磁电响应模型, 并对不同层合结构的磁电响应特性进行了对比研究. 该模型假定层合材料层间能量传递通过层间剪切力来实现, 利用应力函数法分析了磁致伸缩层和压电层的应力与应变, 求出了磁致伸缩层的应变能和存储磁场能以及压电层的应变能和电场能; 利用 Hamilton 最小能量原理求出了层间剪切力的大小, 获得了开路状态下层合材料的低频磁电响应模型. 发现磁电电压系数与磁致伸缩材料的磁导率、泊松比、磁机耦合系数以及压电材料的泊松比、机电耦合系数等有关, 并对这些参数的影响进行了分析. 同时对两层和三层结构的层合材料磁电特性进行了对比研究, 发现层合结构不同则获得的磁电系数公式不同, 用相应的公式计算得到的误差才会最小. 研究结果表明, 本文的理论误差小于 6.5%, 与其他方法相比, 本文的理论模型能更好地描述磁电层合材料的低频磁电响应特性.

**关键词:** 磁电层合材料, 磁电响应, 能量转换原理, 剪切应力

**PACS:** 75.85.+t, 75.80.+q, 85.70.Ec, 85.80.Jm

**DOI:** 10.7498/aps.63.207501

## 1 引言

磁电层合材料是由磁致伸缩材料和压电材料层合而成, 它具有良好的磁电效应, 其磁电效应远高于单相材料的磁电效应<sup>[1]</sup>, 在磁场检测<sup>[2,3]</sup>、能量采集<sup>[4]</sup>、能量传输<sup>[5]</sup>等领域具有潜在的应用价值<sup>[6]</sup>. 影响磁电层合材料磁电效应的因素很多<sup>[7,8]</sup>, 很难建立一套完善的理论模型描述其磁电响应特性. 目前, 磁电层合材料理论分析方法主要有弹性力学法<sup>[9]</sup>、Green 函数法<sup>[10,11]</sup>、等效电路法<sup>[12,13]</sup>、有限元法<sup>[14]</sup>等. 弹性力学方法一般假设材料具有立方对称性且各处应力应变相等, 利用材料的力学本构方程及力学平衡方程, 建立层合材料的磁电响应模型. Harshe 等<sup>[15]</sup>利用弹性力学法推导了层合材料的磁电系数, 但他们仅考虑了界面理想结合的情况. Nan<sup>[10]</sup>利用 Green 函数法建立了磁电层合

材料的磁电响应模型, 他们也只考虑了界面理想结合的情况, 且其计算过于复杂. Dong 等<sup>[12]</sup>在弹性力学方法的基础上, 引入材料的运动学方程, 得到了层合材料等效电路. 等效电路法考虑了压电材料的机电耦合效率, 而且可以讨论夹持方式的影响. 但这些方法用于研究磁电层合材料的低频磁电响应时, 获得的理论值与实验值有较大的差异.

为了修正这种理论差异, 文献<sup>[16, 17]</sup>考虑退磁场的影响, 他们在等效电路法的基础上引入了退磁因子, 考虑退磁场的影响. 但在低频情况下, 考虑退磁场影响的理论结果仍与实验结果有一定的差异. Bichurin 等<sup>[18]</sup>认为磁致伸缩层与压电层不是理想粘接, 存在层间滑移, 他们在弹性力学方法的基础上引入界面耦合系数  $k$  来修正. 虽然这种方法能更好地关联理论与实验数据, 但层间滑移不大可能发生在粘接层较薄且连续粘合的接口处, 即这种差异不可能完全由粘接层引起. Chang 和

\* 国家自然科学基金(批准号: 61074177)、四川省教育厅科研基金(批准号: 11ZA037, 12ZB148)、西华师范大学科研启动基金(批准号: 11B006)和西华师范大学创新团队基金资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: daixianzhi@sina.com

Carman<sup>[19]</sup>提出了考虑层间剪切应力和退磁场影响的模型,他们提出的理论能很好地解释实验结果,但他们没有给出磁电系数的显示表达式,不便于分析与结果的引用,且无法讨论磁导率、泊松比、磁机耦合系数带来的影响.

实验研究表明,两层的磁致伸缩/压电(MP)和三层的磁致伸缩/压电/磁致伸缩(MPM)结构的磁电系数不同,两者实验值相差很大.但是,等效电路法以及Harshe等<sup>[15]</sup>提出的弹性力学法无法描述这种不同,因为他们的理论推导前提都假设层合材料所有层为等应力等应变,导致两层和三层结构的理论结果相同.Chang等提出的模型能够描述这种不同,但他们的模型无法讨论磁导率、泊松比、磁机耦合系数带来的影响.

为了解决这些问题,有必要对现有理论进行改进.本文提出了一种基于能量转换原理的磁电层合材料低频磁电响应模型,该模型考虑了剪切应力和磁致伸缩层存储磁场能的影响.当考虑剪切应力影响时,磁致伸缩层和压电层的应变为非等长应变,可使计算结果更接近实验结果.而等效电路法、Harshe等提出的弹性力学法把层合材料视为等长应变<sup>[15,20,21]</sup>,会导致外加磁场能量更多地传递到压电层,使计算值远大于实验值.因此基于能量转换原理建立的磁电响应模型,可以使理论结果更符合实验结果,且能讨论更多参数对磁电系数的影响,如可以讨论磁致伸缩材料的磁导率、泊松比、磁机耦合系数以及压电材料的泊松比等参数的影响,还可研究不同层合结构对磁电输出特性的影响.

## 2 理论分析

### 2.1 工作模式

本文对MP层合结构进行详细讨论.MP层合结构的模型如图1所示,图1中坐标原点建立在压电层的中心点处.层合材料的长和宽分别为 $l$ 和 $w$ ,磁致伸缩和压电层的厚度分别为 $t_m$ 和 $t_p$ ,且 $l \gg t_m, t_p$ .磁致伸缩层沿长度方向磁化( $L$ ),压电层沿厚度方向极化( $T$ ),外加磁场 $H$ 沿长度方向作用于层合材料,层合材料工作在 $L-T$ 模式.在交变磁场作用下,磁致伸缩层沿长度方向振动,内部产生应力和应变,磁致伸缩层的振动通过胶层传递到压电层,使压电层与磁致伸缩层一起振动,压电层内部也产生应力和应变,在应力的作用下,压电层将在厚度方向产生电输出.

从能量转换的角度看,外部磁场能将被转换为磁致伸缩层的应变能、机械动能、存储磁场能以及压电层的应变能、机械动能和电场能.其中,应变能指磁致伸缩层和压电层产生形变具有的形变势能,该能量的大小可通过应力和应变来计算;存储磁场能指磁致伸缩层放置在外部磁场中,内部仍然存在磁场,该磁场具有的能量即为存储磁场能.下面将对这些能量展开讨论,并求出层合材料的磁电响应特性.

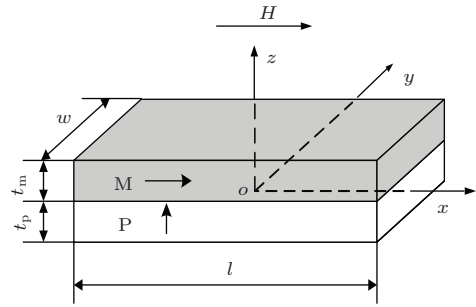


图1 层合材料结构示意图

### 2.2 应力与能量分析

由于层合材料的结构对称,以中心截面 $x = 0$ 为分界面,左右两部分结构的应力完全对称.故层合材料的应力分析可按右半部分来分析.分析时做出如下假设:1)假定磁致伸缩层和压电层通过胶层理想地粘合在一起;2)忽略胶层厚度以及横向磁场的影晌;3)磁致伸缩层与压电层完全通过剪切力来传递应变,剪切力 $q$ 是一个沿 $x$ 轴方向均匀分布的剪切力.磁致伸缩层和压电层的受力分析如图2所示.图中, $\sigma_{px}, \sigma_{pz}$ 分别为压电层 $x, z$ 方向的应力; $\tau_{pxz}, \tau_{pzx}$ 分别为压电层左右侧面和上下面的切应力; $\sigma_{mx}, \sigma_{mz}$ 分别为磁致伸缩层 $x, z$ 方向的应力; $\tau_{mxz}, \tau_{mzx}$ 分别为磁致伸缩层左右侧面和上下面的切应力.根据切应力互等定理<sup>[22]</sup>有: $\tau_{pxz} = \tau_{pzx}, \tau_{mxz} = \tau_{mzx}$ .

由弹性力学相关知识知,层合材料的应力问题为平面应力问题.压电层的应力分析可采用应力函数法来分析,具体求解方法见弹性力学<sup>[22]</sup>和附录A.压电层的应力为

$$\sigma_{px} = \frac{q(l - 2x)(6z + t_p)}{2t_p^2}, \quad (1)$$

$$\sigma_{pz} = 0, \quad (2)$$

$$\tau_{pxz} = \frac{q(6z - t_p)(2z + t_p)}{4t_p^2}. \quad (3)$$

压电层的本构方程为

$$S_{px} = s_{11}^E \sigma_{px} + d_{31,p} E, \quad (4)$$

$$D = d_{31,p} \sigma_{px} + \varepsilon_{33}^T E, \quad (5)$$

式中,  $E$ ,  $D$  分别是为压电层沿厚度方向的电位移和电场强度;  $S_{px}$  为压电层  $x$  方向的应变;  $s_{11}^E$ ,  $d_{31,p}$ ,  $\varepsilon_{33}^T$  分别是压电材料的柔顺系数、压电系数以及介电常数.

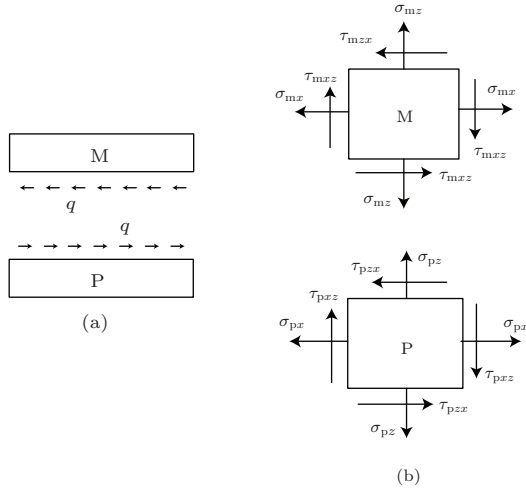


图2 (a) 层合材料外部受力分析示意图; (b) M 层和 P 层内部各取一微元的受力分析示意图

在开路状态下,  $D = 0$ , 由 (5) 式可求出开路时的电场强度为

$$E = -d_{31,p} \sigma_{px} / \varepsilon_{33}^T. \quad (6)$$

由 (1) 和 (4) 式, 可求出开路状态时压电层的应变  $S_{px}$  为

$$S_{px} = \frac{q(s_{11}^E \varepsilon_{33}^T - d_{31,p}^2)(l - 2x)(6z + t_p)}{2\varepsilon_{33}^T t_p^2}. \quad (7)$$

压电层的切应变  $\gamma_{pxz}$  为

$$\begin{aligned} \gamma_{pxz} &= 2s_{11}^E(1 + \mu_p)\tau_{pxz} \\ &= \frac{qs_{11}^E(1 + \mu_p)(6z - t_p)(2z + t_p)}{2t_p^2}, \end{aligned} \quad (8)$$

式中,  $\mu_p$  为压电材料的泊松比.

压电层的应变能  $U_p$  为

$$U_p = \frac{1}{s_{11}^E(1 + \mu_p)}$$

$$\begin{aligned} &\times \int_{-t_p/2}^{t_p/2} \int_{-w/2}^{w/2} \int_0^{l/2} \left( \frac{1 - \mu_p}{1 - 2\mu_p} \right. \\ &\left. S_{px}^2 + \frac{1}{2} \gamma_{pxz}^2 \right) dx dy dz \\ &= \frac{wl^3 q^2 (1 - \mu_m)(d_{31,p}^2 - s_{11}^E \varepsilon_{33}^T)^2}{6s_{11}^E (\varepsilon_{33}^T)^2 (1 - 2\mu_m)(1 + \mu_p)t_p} \\ &\quad + \frac{2}{15} wlq^2 s_{11}^E (1 + \mu_p)t_p. \end{aligned} \quad (9)$$

压电层存储的电场能  $M_p$  为

$$\begin{aligned} M_p &= \varepsilon_{33}^T \int_{-t_p/2}^{t_p/2} \int_{-w/2}^{w/2} \int_0^{l/2} E^2 \\ &\quad \times dx dy dz \\ &= \frac{l^3 q^2 w d_{31,p}^2}{6\varepsilon_{33}^T t_p}. \end{aligned} \quad (10)$$

磁致伸缩层的应力可采用下述方法求解: 应力由特解和补充解两部分组成, 特解部分可由磁弹性位移势函数  $\psi$  求出, 补充解可由应力函数法求出 [22]. 具体求解方法见附录 B. 磁致伸缩层的应力为

$$\sigma_{mx} = \frac{q(l - 2x)}{2t_m^2} (6z - 4t_m - 3t_p), \quad (11)$$

$$\sigma_{mz} = 0, \quad (12)$$

$$\tau_{mxz} = \frac{q(6z - 2t_m - 3t_p)(2z - 2t_m - t_p)}{4t_m^2}. \quad (13)$$

磁致伸缩层的本构方程为

$$S_{mx} = s_{33}^H \sigma_{mx} + d_{33,m} H, \quad (14)$$

$$B = d_{33,m} \sigma_{mx} + \mu_{33}^T H, \quad (15)$$

式中,  $H$  为外加磁场的磁场强度;  $B$ ,  $S_{mx}$  分别是磁致伸缩层的磁感应强度和  $x$  方向的应变;  $s_{33}^H$ ,  $d_{33,m}$ ,  $\mu_{33}^T$  分别是磁致伸缩材料的柔顺系数、压磁系数以及磁导率.

将 (11) 式代入 (14) 式, 得到磁致伸缩层应变  $S_{mx}$  为

$$\begin{aligned} S_{mx} &= d_{33,m} H \\ &\quad + \frac{qs_{33}^H(l - 2x)(6z - 4t_m - 3t_p)}{2t_m^2}. \end{aligned} \quad (16)$$

磁致伸缩层的切应变  $\gamma_{mxz}$  为

$$\gamma_{mxz} = 2s_{33}^H(1 + \mu_m)\tau_{mxz} = \frac{2qs_{33}^H(1 + \mu_m)(6z - 2t_m - 3t_p)(2z - 2t_m - t_p)}{4t_m^2}, \quad (17)$$

式中,  $\mu_m$  为磁致伸缩材料的泊松比.

磁致伸缩层的应变能  $U_M$  为

$$U_M = \frac{1}{s_{33}^H(1 + \mu_m)} \int_{t_p/2}^{t_m+t_p/2} \int_{-w/2}^{w/2} \int_0^{l/2} \left( \frac{1 - \mu_m}{1 - 2\mu_m} S_{mx}^2 + \frac{1}{2} \gamma_{mzx}^2 \right) dx dy dz$$

$$= \frac{lw \left\{ \begin{aligned} &30H^2 d_{33,m}^2 t_m^2 (1 - \mu_m) - 15Hlq s_{33}^H d_{33,m} t_m (1 - \mu_m) \\ &+ 2q^2 (s_{33}^H)^2 [5l^2 (1 - \mu_m) + 4t_m^2 (1 + \mu_m)^2 (1 - 2\mu_m)] \end{aligned} \right\}}{60s_{33}^H (1 - \mu_m - 2\mu_m^2)}. \quad (18)$$

磁致伸缩层在外界磁场的作用下, 将一部分外界磁场能转化为存储磁场能  $M_M$ , 其值为

$$M_M = \frac{1}{\mu_{33}^T} \int_{t_p/2}^{t_m+t_p/2} \int_{-w/2}^{w/2} \int_0^{l/2} B^2 dx dy dz$$

$$= \frac{1}{12} lw \left( \frac{2l^2 q^2 d_{33,m}^2}{\mu_{33}^T t_m} + 6H^2 \mu_{33}^T t_m - 3Hlq d_{33,m} \right). \quad (19)$$

### 2.3 磁电响应分析

从上面的分析可看出, 磁致伸缩层和压电层的应力以及能量都与剪切力  $q$  有关.  $q$  的大小可由 Hamilton 最小能量原理求出. 根据 Hamilton 最小能量原理, 对一个动态系统, 在满足变形连续条件的所有可能位移中, 只有真实位移使得系统总能量达到最小值<sup>[22]</sup>. 在低频或静态时, 层合材料的机械动能忽略不计, 由 Hamilton 原理得

$$\delta(U_P + M_P + U_M + M_M) = 0, \quad (20)$$

式中,  $\delta$  为变分操作.

由于  $U_P, M_P, U_M, M_M$  都与惟一的未知数  $q$  相关, 求解 (20) 式相当于在求函数  $U_P + M_P + U_M + M_M$  取最小值时对应的  $q$  值, 即求解 (20) 式归结于求  $\frac{\partial(U_P + M_P + U_M + M_M)}{\partial q} = 0$ . 将 (9), (10), (18), (19) 式代入 (20) 式, 利用  $d_{31,p}^2 = k_{31,p}^2 \varepsilon_{33}^T s_{11}^E$  (其中,  $k_{31,p}$  为压电材料的机电耦合系数), 结合数学软件 Mathematica 求解, 可得到  $q$  的值为

$$q = \frac{15H(1 - \mu_m - \mu_m^2)(1 + \mu_p)\mu_{33}^T d_{33,m} t_m t_p l}{\left\{ \begin{aligned} &10(1 + \mu_p)t_p l^2 [(1 - \mu_m)\mu_{33}^T s_{33}^H + (1 - \mu_m - 2\mu_m^2)d_{33,m}^2] \\ &+ 8(1 + \mu_m)^2 (1 - 2\mu_m)(1 + \mu_p)\mu_{33}^T s_{33}^H t_m^2 t_p \\ &+ 2(1 + \mu_m)\mu_{33}^T s_{11}^E t_m [-5l^2 k_{31,p}^2 (1 - \mu_p + 2\mu_m \mu_p)] \\ &+ 5l^2 k_{31,p}^4 (1 - \mu_m) + 5l^2 (1 - \mu_m) + 4(1 - 2\mu_m)(1 + \mu_p)^2 t_p^2 \end{aligned} \right\}}. \quad (21)$$

由 (1) 和 (6) 式知, 压电层的电场强度  $E$  是一个关于  $x$  和  $z$  的变量, 其平均值为

$$\bar{E} = \frac{\int_{-t_p/2}^{t_p/2} \int_0^{l/2} (-d_{31,p} \sigma_{px} / \varepsilon_{33}^T) dx dz}{t_p l / 2}. \quad (22)$$

由 (1), (21), (22) 式和  $g_{31,p} = d_{31,p} / \varepsilon_{33}^T$  (其中,  $g_{31,p}$  为压电材料的横向压电电压系数), 可求出 MP 磁电层合材料的磁电系数  $\alpha_{E31\_MP}$  为

$$\alpha_{E31\_MP} = |d\bar{E}/dH|$$

$$= \frac{\frac{15}{8}(1 - \mu_m - \mu_m^2)(1 + \mu_p)\mu_{33}^T d_{33,m} g_{31,p} t_m l^2}{\left\{ \begin{aligned} &5(1 + \mu_p)t_p l^2 [(1 - \mu_m)\mu_{33}^T s_{33}^H + (1 - \mu_m - 2\mu_m^2)d_{33,m}^2] \\ &+ 4(1 + \mu_m)^2 (1 - 2\mu_m)(1 + \mu_p)\mu_{33}^T s_{33}^H t_m^2 t_p \\ &+ (1 + \mu_m)\mu_{33}^T s_{11}^E t_m [-5(1 - \mu_p + 2\mu_m \mu_p)l^2 k_{31,p}^2] \\ &+ 5(1 - \mu_m)l^2 k_{31,p}^4 + 5(1 - \mu_m)l^2 + 4(1 - 2\mu_m)(1 + \mu_p)^2 t_p^2 \end{aligned} \right\}}. \quad (23)$$

由于有  $l \gg t_m, t_p$ , 略去上式中的两项小项, 上式可简化为

$$\alpha_{E31\_MP} = \frac{\frac{3}{8} \lambda_3 \mu_{33}^T d_{33,m} g_{31,p} t_m}{\lambda_1 (1 - \lambda_2 k_{31,p}^2 + k_{31,p}^4) s_{11}^E \mu_{33}^T t_m + (\mu_{33}^T s_{33}^H + \lambda_4 d_{33,m}^2) t_p}, \quad (24)$$

式中,  $\lambda_1 = (1 + \mu_m)/(1 + \mu_p)$ ,  $\lambda_2 = (1 - \mu_p + 2\mu_m \mu_p)/(1 - \mu_m)$ ,  $\lambda_3 = (1 - \mu_m - \mu_m^2)/(1 - \mu_m)$ ,  $\lambda_4 = (1 - \mu_m - 2\mu_m^2)/(1 - \mu_m)$ .

令  $n = t_m/t_c$ ,  $t_c = t_m + t_p$ ,  $n$  为磁致伸缩材料的层合比,  $t_c$  为层合材料的总厚度, 并利用  $d_{33,m}^2 = k_{33,m}^2 \mu_{33}^T s_{33}^H$  (其中,  $k_{33,m}$  为磁致伸缩材料的磁机耦合系数), (24) 式变为

$$\alpha_{E31\_MP} = \frac{3}{8} \times \frac{n \lambda_3 d_{33,m} g_{31,p}}{n \lambda_1 (1 - \lambda_2 k_{31,p}^2 + k_{31,p}^4) s_{11}^E + (1 - n) (1 + \lambda_4 k_{33,m}^2) s_{33}^H}. \quad (25)$$

层合材料的磁电电压系数  $\alpha_{V31\_MP}$  的定义为  $\alpha_{V31\_MP} = |dV/dH|$ , 利用  $V = \bar{E} t_p$  和 (25) 式可求出  $\alpha_{V31\_MP}$  为

$$\alpha_{V31\_MP} = \frac{3}{8} \times \frac{n(1-n) \lambda_3 d_{33,m} g_{31,p} t_c}{n \lambda_1 (1 - \lambda_2 k_{31,p}^2 + k_{31,p}^4) s_{11}^E + (1-n) (1 + \lambda_4 k_{33,m}^2) s_{33}^H}. \quad (26)$$

为了比较, 这里也给出等效电路法的公式<sup>[23]</sup>:

$$\alpha'_{V31} = \frac{n(1-n) d_{33,m} g_{31,p} t_c}{n(1 - k_{31,p}^2) s_{11}^E + (1-n) s_{33}^H}. \quad (27)$$

比较上述两式, 最大差异为: 本文推导的公式还与磁致伸缩材料的泊松比、磁机耦合系数以及压电材料的泊松比有关, 且整个表达式多了  $3/8$  这个系数. 这使得本文结果与实验结果更接近.

按同样的方法可推导出 MPM 结构在  $L$ - $T$  模式下的磁电系数和磁电电压系数<sup>[24]</sup>, 分别为

$$\alpha_{E31\_MPM} = \frac{3}{2} \times \frac{n \lambda_3 d_{33,m} g_{31,p}}{n \lambda_1 (1 - \lambda_2 k_{31,p}^2 + k_{31,p}^4) s_{11}^E + 4(1-n) (1 + \lambda_4 k_{33,m}^2) s_{33}^H}, \quad (28)$$

$$\alpha_{V31\_MPM} = \frac{3}{2} \times \frac{n(1-n) \lambda_3 d_{33,m} g_{31,p} t_c}{n \lambda_1 (1 - \lambda_2 k_{31,p}^2 + k_{31,p}^4) s_{11}^E + 4(1-n) (1 + \lambda_4 k_{33,m}^2) s_{33}^H}. \quad (29)$$

MP 与 MPM 结构的磁电系数公式的不同在于: 整个表达式的系数不同; 分母中机电耦合系数所在项的系数不同. 因此不能用 MPM 结构的公式研究 MP 的磁电特性, 否则会带来较大的误差. 反之亦然.

### 3 数据分析与讨论

下面以 Terfenol-D/PZT 磁电层合材料构成的 MP 和 MPM 结构, 讨论其磁电响应特性. 实验和理论讨论的 Terfenol-D 和 PZT 的相关参数为<sup>[25,26]</sup>:

$$d_{33,m} = 1.1 \times 10^{-8} \text{ m/A},$$

$$s_{33}^H = 4 \times 10^{-11} \text{ m}^2/\text{N},$$

$\mu_r = 5$  ( $\mu_r$  为磁致伸缩材料的相对磁导率),  $\mu_m = 0.328$ ,  $d_{31,p} = -275 \text{ pC/N}$ ,  $s_{11}^E = 16.7 \times 10^{-12} \text{ m}^2/\text{N}$ ,  $k_{31,p} = 0.4$ ,  $\varepsilon_{33}^T/\varepsilon_0 = 3200$  ( $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ ),  $\mu_p = 0.34$ .

由 (23) 式知, 层合材料的磁电系数与层合材料的长度相关. 利用 (23) 式做出 MP 结构的磁电系数与  $l/t_m$  的关系曲线, 如图 3 所示. 从图 3 可看出,  $l/t_m$  比值大于 5 以后, 层合材料的长度对磁电系数几乎无影响.

在理论推导过程中, 对磁电系数 (23) 式进行了化简, 获得 (24) 式. 利用上述 Terfenol-D 和 PZT 的参数求得简化公式误差为 0.53%, 可见简化公式带来的误差很小, 可忽略不计.

实验中制作了多个 MP、MPM 结构的磁电换能器, 换能器中的 Terfenol-D 和 PZT 厚度为  $t_p = t_m = 1 \text{ mm}$ . 即有 MP 结构的总厚度  $t_c = 2 \text{ mm}$ , MPM 结构的总厚度为  $t_c = 3 \text{ mm}$ . 实验测得的 MP 结构最大磁电电压系数为  $39.26 \text{ mV/Oe}$  (或  $0.3926 \text{ V}/(\text{cm}\cdot\text{Oe})$ ), MPM 结构最大磁电电压系数为  $86.85 \text{ mV/Oe}$  (或  $0.8685 \text{ V}/(\text{cm}\cdot\text{Oe})$ ). 利用 (26) 和 (29) 式, 计算 MP 结构的磁电电压系数为  $41.78 \text{ mV/Oe}$ , MPM 结构的磁电电压系数



为 89.54 mV/Oe. MP 和 MPM 结构的理论误差分别为 6.42% 和 3.10%. 采用等效电路法计算 MP 和 MPM 结构的理论值分别为 153.01 mV/Oe 和 229.52 mV/Oe, 它们分别是实验值的 3.897 和 2.646 倍. 由此可见本文提出的理论能很好地解释不同层合结构的实验结果.

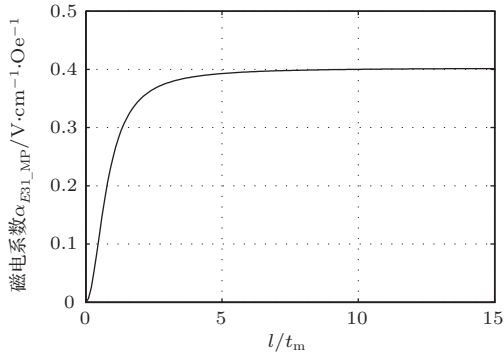


图3 磁电系数  $\alpha_{E31\_MP}$  与  $l/t_m$  的关系

当 MP 和 MPM 结构的总厚度相同  $t_c = 3 \text{ mm}$  时, 利用 (26) 和 (29) 式, 可计算出 MP 和 MPM 结构的磁电电压系数与层合比  $n$  的关系, 如图 4 所示. 为了比较, 图中也给出了等效电路法的结果, 以 ECM 表示. 从图 4 可看出: 1) 等效电路法的结果大于本文 MP 和 MPM 结构的结果, 多数情况为 2—3 倍; 2) MP 结构的磁电电压系数小于 MPM 结构的磁电电压系数, 它们的磁电电压系数分别为 62.64 和 86.85 mV/Oe, 且 MP 和 MPM 结构的最佳层合比不相同, 它们的最佳层合比分别为 0.66 和 0.795. 因此 MP 和 MPM 结构无法用一个相同的公式来计算, 否则会产生差异. 例如, 层合比  $n = 0.667$  时, MP 和 MPM 结构的磁电电压系数分别为 66.94 和 89.54 mV/Oe, 若用 MPM 结构来计算 MP 结构的磁电电压系数会产生 33.76% 的误差.

利用 (26) 和 (29) 式还可以讨论压电材料泊松比  $\mu_p$ 、磁致伸缩材料泊松比  $\mu_m$  和相对磁导率  $\mu_r$  对磁电电压系数的影响. 由于这些参数对 MP 和 MPM 结构具有相同的影响规律, 下面仅讨论这些参数对 MP 结构磁电电压系数的影响. 当保持  $t_m = 1 \text{ mm}$ ,  $t_p = 1 \text{ mm}$  不变时, MP 结构的磁电电压系数随  $\mu_p$  和  $\mu_m$  变化的规律如图 5 所示. 从图 5 可看出: 1) 磁致伸缩材料泊松比  $\mu_m$  对磁电电压系数的影响较大, 如保持  $\mu_p = 0.3$  不变,  $\mu_m$  从 0.2 变化到 0.4, 磁电电压系数由 42.94 mV/Oe 变为 37.19 mV/Oe, 减少 13.39%; 2) 压电材料泊松比  $\mu_p$  对磁电电压系数影响较小, 如保持  $\mu_m = 0.35$  不变,

$\mu_p$  从 0.4 变化到 0.2, 磁电电压系数由 40.30 mV/Oe 变为 38.70 mV/Oe, 减少 3.97%. 磁致伸缩材料泊松比对磁电电压系数影响较大的原因可能在于: 泊松比大会使更多的能量转化为横向弹性势能, 使得传递到压电层的能量减小, 从而使磁电电压系数减小. 为了提高磁电输出, 应尽量选择低泊松比的磁致伸缩材料和高泊松比的压电材料.

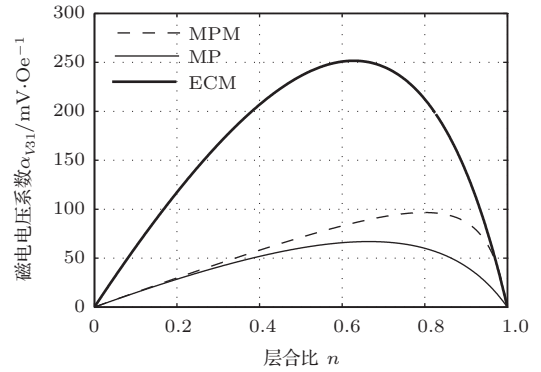


图4 磁电电压系数  $\alpha_{V31}$  与层合比  $n$  的关系

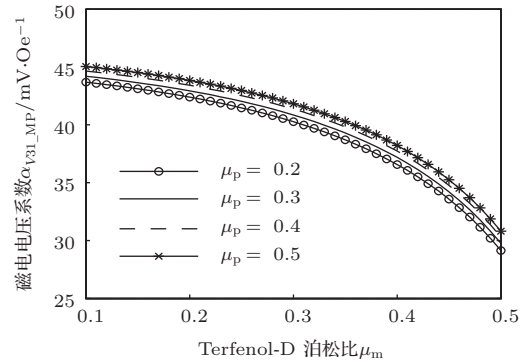


图5 磁电电压系数  $\alpha_{V31\_MP}$  与  $\mu_p, \mu_m$  的关系

当保持  $t_m = 1 \text{ mm}$ ,  $t_p = 1 \text{ mm}$  不变时, 将  $d_{33,m} = k_{33,m} \sqrt{\mu_{33}^T \epsilon_{33}^H}$  代入 (26) 式, 可求出 MP 结构的磁电电压系数随磁机耦合系数  $k_{33,m}$ 、相对磁导率  $\mu_r$  ( $\mu_r = \mu_{33}^T / \mu_0$ ,  $\mu_0$  为真空磁导率) 的变化规律如图 6 所示. 从图 6 可看出: 1) 当磁导率相同时, 磁电电压系数随磁机耦合系数的增大而增大; 2) 保持磁机耦合系数不变时, 磁电电压系数与磁导率的平方根成正比, 即随着磁导率的增大而增大. 所以对于磁机耦合系数小的材料, 若其磁导率大也能获得较大的磁电电压系数, 如  $k_{33,m} = 0.3$ ,  $\mu_r = 3000$  时的磁电系数达到 507.8 mV/(cm·Oe). Dong 等 [23] 就是利用这个特性, 使用高磁导率的 FeBSiC 磁致伸缩材料得到了较大的磁电电压系数, 低频时其值达到 345 mV/(cm·Oe).

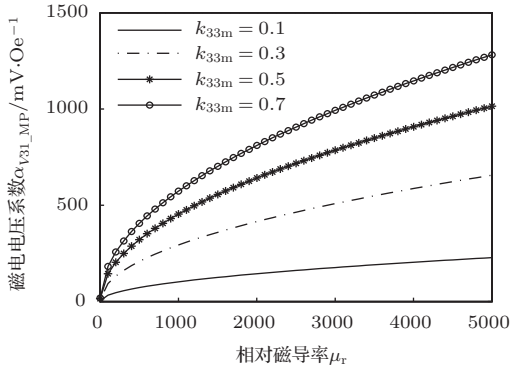


图6 MP结构的磁电电压系数  $\alpha_{V31\_MP}$  与  $\mu_r$  和  $k_{33,m}$  的关系

### 4 结 论

本文提出了一种基于能量转换原理的磁致伸缩/压电层合材料低频磁电响应模型, 该模型能很好地解释MP和MPM结构的实验结果. 理论模型显示, 层合材料的低频磁电响应特性与磁致伸缩材料的泊松比、磁导率、磁机耦合系数以及压电材料的泊松比等参数相关. 通过对这些参数的分析以及MP和MPM结构的磁电输出讨论, 可得到如下结论: 1) 磁致伸缩材料的泊松比对磁电电压系数影响较大, 而压电材料的泊松比影响较小, 为了获得高的磁电输出, 应尽量选用低泊松比的磁致伸缩材料和高泊松比的压电材料; 2) 磁致伸缩材料的磁导率和磁机耦合系数越大, 磁电电压系数就越大, 对于磁机耦合系数小、磁导率高的层合材料也可能获得高的磁电电压系数; 3) 不同层合结构的磁电特性不同, 不能用统一的公式描述不同层合结构的磁电输出; 4) 在相同的厚度和层合比下, MPM结构的磁电电压系数高于MP结构的磁电电压系数.

### 附录A 压电层应力分析

压电层的应力采用应力函数法来求解<sup>[22,24]</sup>. 设应力函数为  $\varphi_p$ , 由于层合材料无  $z$  方向载荷作用, 所以  $z$  方向纤维互不积压, 故有  $\sigma_{pz} = 0$ , 即

$$\sigma_{pz} = \frac{\partial^2 \varphi_p}{\partial x^2} = 0. \tag{A1}$$

由(A1)式可得

$$\varphi_p = x f_1(z) + f_2(z), \tag{A2}$$

式中,  $f_1(z)$ ,  $f_2(z)$  为待定的关于变量  $z$  的函数.

将(A2)代入相容方程

$$\frac{\partial^4 \varphi_p}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi_p}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 \varphi_p}{\partial z^4} = 0,$$

得到

$$x \frac{d^4 f_1(z)}{dz^4} + \frac{d^4 f_2(z)}{dz^4} = 0. \tag{A3}$$

因为对于任意的  $x$  值(A3)式都要成立, 所以有  $\frac{d^4 f_1(z)}{dz^4} = 0$  和  $\frac{d^4 f_2(z)}{dz^4} = 0$ . 由此得到

$$f_1(z) = a_{p3}z^3 + a_{p2}z^2 + a_{p1}z + a_{p0}, \tag{A4}$$

$$f_2(z) = b_{p3}z^3 + b_{p2}z^2 + b_{p1}z + b_{p0}, \tag{A5}$$

式中,  $a_{p0} \sim a_{p3}$ ,  $b_{p0} \sim b_{p3}$  为待定常数. 将(A4)和(A5)式代入(A2)式, 得

$$\varphi_p = x(a_{p3}z^3 + a_{p2}z^2 + a_{p1}z + a_{p0}) + b_{p3}z^3 + b_{p2}z^2 + b_{p1}z + b_{p0}. \tag{A6}$$

由于  $\varphi_p$  的一次项和常数项对应力分量无影响, 可令  $a_{p0} = 0$ ,  $b_{p0} = 0$ ,  $b_{p1} = 0$ . (A6)式变为

$$\varphi_p = x(a_{p3}z^3 + a_{p2}z^2 + a_{p1}z) + b_{p3}z^3 + b_{p2}z^2. \tag{A7}$$

压电层的应力为

$$\sigma_{px} = \frac{\partial^2 \varphi_p}{\partial z^2} = 6a_{p3}xz + 2a_{p2}x + 6b_{p3}z + 2b_{p2}, \tag{A8}$$

$$\sigma_{pz} = \frac{\partial^2 \varphi_p}{\partial x^2} = 0, \tag{A9}$$

$$\begin{aligned} \tau_{pxz} &= \tau_{pzx} \\ &= -\frac{\partial^2 \varphi_p}{\partial x \partial z} \\ &= -3a_{p3}z^2 - 2a_{p2}z - a_{p1}. \end{aligned} \tag{A10}$$

由边界条件

$$\tau_{pzx}|_{z=t_p/2} = q, \quad \tau_{pzx}|_{z=-t_p/2} = 0, \quad \sigma_{px}|_{x=l/2} = 0,$$

近似边界条件

$$\int_{-t_p/2}^{t_p/2} \tau_{pxz}|_{x=l/2} dy = 0$$

可得到5个方程(注: 由  $\sigma_{px}|_{x=l/2} = 0$  边界条件, 对于任意  $z$  值都成立可获得2个方程), 求出(A8)~(A10)式中5个未知系数. 分别为

$$\begin{aligned} a_{p1} &= -\frac{q(2t_m + t_p)(2t_m + 3t_p)}{4t_m^2}, \\ a_{p2} &= \frac{q(4t_m + 3t_p)}{2t_m^2}, \\ a_{p3} &= -\frac{q}{t_m^2}, \\ b_{p2} &= \frac{d_{33,m}H_3}{2s_{33}^H} - \frac{ql(4t_m + 3t_p)}{4t_m^2}, \\ b_{p3} &= \frac{ql}{2t_m^2}. \end{aligned} \tag{A11}$$

将  $a_{p1}-a_{p3}$ ,  $b_{p2}-b_{p3}$  代入 (A8)–(A10) 式, 得

$$\sigma_{px} = \frac{q(l-2x)(6z+t_p)}{2t_p^2}, \quad (A12)$$

$$\sigma_{pz} = 0, \quad (A13)$$

$$\tau_{pxz} = \frac{qz(3z+t_p)}{t_p^2} - \frac{q}{4}. \quad (A14)$$

### 附录 B 磁致伸缩层应力分析

磁致伸缩层的形变由两种形变叠加而成: 一是外界磁场会使其产生形变, 另一部分是外力作用使其产生形变(外力来自于压电层与磁致伸缩层间的切力  $q$ , 见图 2). 这使得磁致伸缩层的应力求解比压电层更难. 但可采用下述方法求解: 磁致伸缩层的应力由特解和补充解两部分组成, 特解部分可由磁弹性位移势函数  $\psi$  求出, 补充解由应力函数法求出 [22,24]. 磁弹性位移势函数  $\psi$  应满足如下微分方程:

$$\nabla^2 \psi = (1 + \mu_m) d_{33,m} H. \quad (B1)$$

利用  $\psi$  可求出位移特解对应的应力分量 [22,24]:

$$\sigma'_{mx} = -\frac{1}{s_{33}^H(1 + \mu_m)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}, \quad (B2)$$

$$\sigma'_{mz} = -\frac{1}{s_{33}^H(1 + \mu_m)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \quad (B3)$$

$$\tau'_{mxz} = \frac{1}{s_{33}^H(1 + \mu_m)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z}. \quad (B4)$$

为了求出磁致伸缩层应力的一个特解, 可取

$$\psi = (1 + \mu_m) d_{33,m} H z^2 / 2.$$

该  $\psi$  不仅满足 (B1) 式, 而且求出的应力特解比较简单, 便于补充解的求解. 将  $\psi$  代入 (B2)–(B4) 式, 可求出位移特解对应的应力分量为

$$\begin{aligned} \sigma'_{mx} &= -\frac{d_{33,m} H}{s_{33}^H}, \\ \sigma'_{mz} &= 0, \quad \tau'_{mxz} = 0. \end{aligned} \quad (B5)$$

为满足边界条件, 设想在边界上施以与上述应力分量大小相同、方向相反的力, 把由此引起的应力作为补充解, 该补充解也可利用应力函数法来求解, 其分析方法与压电层分析方法相同. 设应力函数为  $\varphi_m$ , 可获得如下应力函数:

$$\begin{aligned} \varphi_m &= x(a_{m3}z^3 + a_{m2}z^2 + a_{m1}z) \\ &\quad + b_{m3}z^3 + b_{m2}z^2, \end{aligned} \quad (B6)$$

式中,  $a_{m1}-a_{m3}$ ,  $b_{m2}-b_{m3}$  为待定常数.

补充解的应力分量为

$$\begin{aligned} \sigma''_{mx} &= \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial z^2} \\ &= 6a_3xz + 2a_2x + 6b_3z + 2b_2, \end{aligned} \quad (B7)$$

$$\sigma''_{mz} = \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial x^2} = 0, \quad (B8)$$

$$\begin{aligned} \tau''_{mxz} &= \tau''_{mzx} = -\frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial x \partial z} \\ &= -3a_3z^2 - 2a_2z - a_1. \end{aligned} \quad (B9)$$

由边界条件

$$\tau''_{mzx}|_{z=t_m+t_p/2} = 0,$$

$$\tau''_{mzx}|_{z=t_p/2} = q,$$

$$\sigma''_{mx}|_{x=l/2} = \frac{d_{33,m} H}{s_{33}^H},$$

近似边界条件

$$\int_{t_p/2}^{t_m+t_p/2} \tau''_{mzx}|_{x=l/2} dz = 0$$

(注: 由  $\sigma''_{mx}|_{x=l/2} = \frac{d_{33,m} H}{s_{33}^H}$  边界条件, 对于任意  $z$  值都成立可获得 2 个方程), 求出 (B7)–(B9) 式中 5 个未知系数, 分别为

$$\begin{aligned} a_{m1} &= -q - 2q \frac{t_p}{t_m} - \frac{3qt_p^2}{4t_m^2}, \\ a_{m2} &= \frac{2q}{t_m} + \frac{3qt_p}{2t_m^2}, \\ a_{m3} &= -\frac{q}{t_m^2}, \\ b_{m2} &= \frac{1}{2} \frac{d_{33,m} H}{s_{33}^H} - \frac{l}{4t_m^2} (4qt_m + 3qt_p), \\ b_{m3} &= \frac{ql}{2t_m^2}. \end{aligned} \quad (B10)$$

所以磁致伸缩层的应力为

$$\begin{aligned} \sigma_{mx} &= \sigma'_{mx} + \sigma''_{mx} \\ &= \frac{q(l-2x)}{2t_m^2} (4t_m + 3t_p - 6z), \end{aligned} \quad (B11)$$

$$\sigma_{mz} = \sigma'_{mz} + \sigma''_{mz} = 0, \quad (B12)$$

$$\begin{aligned} \tau_{mxz} &= \tau'_{mxz} + \tau''_{mxz} \\ &= \frac{qz(3z-4t_m-3t_p)}{t_m^2} \\ &\quad + \frac{q(4t_m^2 + 8t_mt_p + 3t_p^2)}{4t_m^2}. \end{aligned} \quad (B13)$$

### 参考文献

- [1] Ryu J, Carazo A V, Uchino K, Kim H E 2001 *Jpn. J. Appl. Phys.* **40** 4948
- [2] Chen L, Li P, Wen Y M, Wang D 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 067501 (in Chinese) [陈蕾, 李平, 文玉梅, 王东 2011 物理学报 **60** 067501]
- [3] Chen L, Li P, Wen Y M, Zhu Y 2013 *Chin. Phys. B* **22** 077505
- [4] Dai X Z, Wen Y M, Li P, Yang J, Jiang X F 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2137 (in Chinese) [代显智, 文玉梅, 李平, 杨进, 江小芳 2010 物理学报 **59** 2137]



- [5] Yu X J, Wu T Y, Li Z 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 058503 (in Chinese) [于歆杰, 吴天逸, 李臻 2013 物理学报 **62** 058503]
- [6] Eerenstein W, Mathur N D, Scott J F 2006 *Nature* **442** 759
- [7] Li P, Huang X, Wen Y M 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 137504 (in Chinese) [李平, 黄娴, 文玉梅 2012 物理学报 **61** 137504]
- [8] Zhou H M, Chen Q, Deng J H 2014 *Chin. Phys. B* **23** 047502
- [9] Filippov D A 2005 *Phys. Solid State* **47** 1082
- [10] Nan C W 1994 *Phys. Rev. B* **50** 6082
- [11] Nan C W, Clarke D R 2005 *J. Am. Ceram. Soc.* **80** 1333
- [12] Dong S, Li J F, Viehland D 2003 *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control.* **50** 1253
- [13] Dong S, Li J, Viehland D 2003 *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control.* **50** 1236
- [14] Zhang L, Wang B W, Li S Y, Wang Z H, Huang W M, Wong L 2010 *Chin. J. Sci. Instrum.* **31** 1528 (in Chinese) [张纳, 王博文, 李淑英, 王志华, 黄文美, 翁玲 2010 仪器仪表学报 **31** 1528]
- [15] Harshe G, Dougherty J P, Newnham R E 1993 *Int. J. Appl. Electromagn. Mater.* **4** 145
- [16] Yang J, Wen Y M, Li P, Dai X Z 2009 *Proceedings of Micro and Nanotechnology for Power Generation and Energy Conversion Applications* Washington, USA, December 1–4, 2009 p352
- [17] Cui X, Dong S 2011 *J. Appl. Phys.* **109** 083903
- [18] Bichurin M, Petrov V, Srinivasan G 2003 *Phys. Rev. B* **68** 054402
- [19] Chang C M, Carman G 2007 *Phys. Rev. B* **76** 134116
- [20] Huang Z 2006 *J. Appl. Phys.* **100** 114104
- [21] Bichurin M I, Petrov V M, Srinivasan G 2002 *J. Appl. Phys.* **92** 7681
- [22] Xu Z L 2006 *Elasticity* (Vol. 1) (4th Ed.) (Beijing: Higher Education Press) p32 (in Chinese) [徐芝纶 2006 弹性力学 (上册) (第四版) (北京: 高等教育出版社) 第32页]
- [23] Dong S, Zhai J, Xing Z, Li J, Viehland D 2007 *Appl. Phys. Lett.* **91** 022915
- [24] Dai X, Zhang Z, Wang Y, Li J, Cheng L 2014 *J. Appl. Phys.* **115** 014104
- [25] Yang F, Wen Y M, Zheng M, Li P 2006 *Chin. J. Sensor. Actuat.* **19** 2371 (in Chinese) [杨帆, 文玉梅, 郑敏, 李平 2006 传感技术学报 **19** 2371]
- [26] Zhai J, Xing Z, Dong S, Li J, Viehland D 2006 *Appl. Phys. Lett.* **88** 062510

# Low frequency magnetoelectric response analysis of magnetoelectric laminate material based on energy conversion principle\*

Dai Xian-Zhi<sup>†</sup>

(College of Physics and Electronic Information, China West Normal University, Nanchong 637009, China)

( Received 9 April 2014; revised manuscript received 13 June 2014 )

## Abstract

A low frequency magnetoelectric (ME) response model of magnetostrictive/piezoelectric laminate composite is presented based on energy conversion principle, and ME response characteristics of different laminate structures are compared in this paper. In this model it is assumed that the energy transfer between the layers of the composite laminates is achieved by the interlayer shear force. The stresses and strains of the magnetostrictive and piezoelectric layers are analyzed by the stress function method. While the strain and stored magnetic energy of magnetostrictive layers and the strain and electric field energy of piezoelectric layers are solved. Under open-circuit conditions, the interlayer shear force and the low frequency ME response model of laminate composites are obtained by using Hamilton principle of minimum energy. The theoretical results show that the ME voltage coefficient is related to the Poisson ratio, magnetic permeability, magnetomechanical coupling coefficient of magnetostrictive material, Poisson ratio, and electromechanical coupling coefficient of piezoelectric material. The influences of these parameters are analyzed. The magnetoelectric characteristics of two- and three-tier laminated structures are compared in this paper, showing that different laminated structures have different formulas for ME coefficient and calculation errors will be smaller when the corresponding ME coefficient formula is used. The experimental results show that the analytical error is smaller than 6% and the model can better describe the low frequency ME response characteristics of laminated magnetoelectric materials.

**Keywords:** magnetoelectric laminated material, magnetoelectric response, energy conversion principle, shear stress

**PACS:** 75.85.+t, 75.80.+q, 85.70.Ec, 85.80.Jm

**DOI:** [10.7498/aps.63.207501](https://doi.org/10.7498/aps.63.207501)

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61074177), the Scientific Research Foundation of the Education Department of Sichuan Province, China (Grant Nos. 11ZA037, 12ZB148), the Scientific Research Foundation of China West Normal University (Grant No. 11B006), and the Innovative Research Team Foundation of China West Normal University.

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: [daixianzhi@sina.com](mailto:daixianzhi@sina.com)