

# 离轴高斯涡旋光束的深聚焦特性\*

王慧 丁攀峰† 蒲继雄

(华侨大学信息科学与工程学院, 厦门 361021)

(2014年4月20日收到; 2014年5月20日收到修改稿)

基于德拜矢量衍射积分理论, 对离轴高斯涡旋光束经过大数值孔径透镜后聚焦场的特性进行了研究, 获得了离轴高斯涡旋光束深聚焦后复振幅分布函数, 在此基础上对离轴高斯涡旋光束深聚焦场的光强和相位分别进行了分析. 数值模拟结果表明: 离轴距离的改变对高斯涡旋光束在焦平面上的光强分布和相位分布会产生影响, 离轴距离的增加会加剧聚焦场光强在  $y$  轴方向上分布的差异, 而离轴距离的符号决定了光强集中区域的方向. 另一方面, 与一阶离轴涡旋光束不同, 高阶离轴涡旋光束经过深聚焦后会发生暗核分裂现象, 出现多个相位奇点, 奇点个数等于原始光束对应的拓扑荷数, 且分裂后的奇点具有明显的对称性. 研究表明, 这种暗核分裂现象由大数值孔径透镜深聚焦引起.

**关键词:** 深聚焦, 暗核分裂, 德拜矢量积分, 离轴高斯涡旋光束

**PACS:** 42.25.-p, 42.25.Bs, 42.25.Hz

**DOI:** 10.7498/aps.63.214202

## 1 引言

激光光束经过大数值孔径透镜的聚焦 ( $NA \geq 0.7$ ), 能产生大小达到亚波长量级的光斑和轴向分量, 这个特殊的性质可以有效地提高聚焦成像系统的空间分辨率, 因而激光光束的深聚焦广泛应用于高密度光数据存储、显微技术、粒子数囚禁等领域<sup>[1-7]</sup>. 近年来, 许多研究者对各类光束的深聚焦特性做了大量的研究, Zhan 研究了圆偏振涡旋光束的深聚焦特性, 分析了相关参数对聚焦光强的影响<sup>[8]</sup>; Chen 等研究了具有不同偏振态的超短光脉冲涡旋光束的深聚焦特性<sup>[9,10]</sup>. 通常情况下, 可以采用合成的方法获得涡旋光束<sup>[11]</sup>, 也可以利用计算全息、螺旋相位板产生涡旋光束<sup>[12]</sup>, 在使用螺旋相位板时, 由于对准误差的存在, 都会存在一定程度的离轴, 研究离轴涡旋光束的深聚焦特性, 相对于研究理想涡旋光束的深聚焦特性而言, 具有更加实际的意义. 本文基于德拜矢量积分理论, 研究离轴高斯涡旋光束经过大数值孔径透镜聚焦后的深聚焦特性, 并通过数值计算分析离轴距离及拓扑

荷数的改变对聚焦场光强分布和相位分布产生的影响.

## 2 理论分析

不失普遍性, 考虑入射背景场为线偏振高斯场 (沿  $x$  方向偏振), 光学涡旋嵌于高斯光束中, 位于点  $(a, 0)$ , 拓扑荷数为  $m$ , 此时入射光束为高斯离轴涡旋光束, 其电场可以表示为

$$A(r, \varphi) = \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right) [r \exp(i\varphi) - a]^m, \quad (1)$$

$r$  和  $\varphi$  分别为源平面上场源的径向与角向坐标,  $w$  为光斑尺寸,  $a$  为光涡旋离轴距离, 大数值孔径聚焦示意图如图 1 所示. 根据德拜矢量衍射积分理论, 离轴高斯涡旋光束经过大数值孔径透镜深聚焦后, 聚焦区域内的电场表示为<sup>[13]</sup>

$$E(\rho, \psi, z) = \frac{i}{\lambda} \int_0^{2\pi} \int_0^\alpha A(r, \varphi) K(\rho, \psi, z, \theta, \varphi) d\theta d\varphi, \quad (2)$$

\* 国家自然科学基金 (批准号: 61307001, 61178015) 和福建省自然科学基金 (批准号: 2013J05094) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: dingpanfeng@163.com

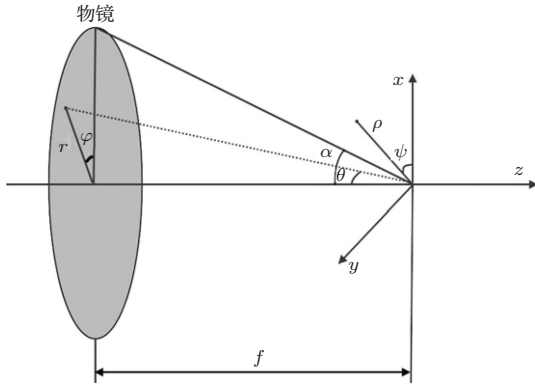


图1 大数值孔径聚焦示意图

其中

$$\begin{aligned}
 & K(\rho, \psi, z, \theta, \varphi) \\
 &= \exp[-ik\rho \sin \theta \cos(\varphi - \psi)] \exp[-ikz \cos \theta] \sin \theta \\
 &\quad \times \cos^{1/2} \theta \{ [\cos \theta + \sin^2 \varphi (1 - \cos \theta)] \mathbf{i} \\
 &\quad + [\cos \varphi \sin \varphi (\cos \theta - 1)] \mathbf{j} \\
 &\quad + (\cos \varphi \sin \theta) \mathbf{k} \}, \quad (3)
 \end{aligned}$$

$\theta$ 为孔径角,  $A(r, \varphi)$ 为入射离轴高斯涡旋光束,  $\lambda$ 为入射光的波长,  $k = 2\pi/\lambda$ 为波数,  $\alpha = \arcsin(\text{NA})$ 为透镜的最大会聚角,  $\rho, \psi, z$ 为焦点附近场点的柱坐标,  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 为直角坐标系三个方向上的单位矢量. 由(1)–(3)式, 结合正弦条件, 并利用如下公式:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{2\pi} \cos(n\varphi) \exp[ia \cos(\varphi - \psi)] d\varphi \\
 &= 2\pi i^n J_n(a) \cos(n\psi), \\
 & \int_0^{2\pi} \sin(n\varphi) \exp[ia \cos(\varphi - \psi)] d\varphi \\
 &= 2\pi i^n J_n(a) \sin(n\psi), \quad (4)
 \end{aligned}$$

可以得到聚焦区域内电场  $x, y, z$  三个方向上的分量表达式, 其中  $J_n(a)$  为第一类 Bessel 函数. 由于聚焦区域内电场的表达式与拓扑荷数  $m$  有关, 以下仅列出  $m = 1$  时对应的结果:

$$\begin{aligned}
 & E_x(\rho, \psi, z) \\
 &= ik \int_0^\alpha P(\theta) \left\{ -\frac{1}{2} a (1 + \cos \theta) J_0(k\rho \sin \theta) \right. \\
 &\quad - \frac{i}{2} f \sin \theta (1 + \cos \theta) J_1(k\rho \sin \theta) \exp(i\psi) \\
 &\quad + \frac{1}{2} a (\cos \theta - 1) J_2(k\rho \sin \theta) \cos 2\psi \\
 &\quad - \frac{i}{4} f \sin \theta (\cos \theta - 1) [J_1(k\rho \sin \theta) \exp(-i\psi) \\
 &\quad \left. - J_3(k\rho \sin \theta) \exp(i3\psi)] \right\} d\theta, \\
 & E_y(\rho, \psi, z)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= ik \int_0^\alpha P(\theta) \left\{ \frac{1}{4} f \sin \theta (\cos \theta - 1) \right. \\
 &\quad \times [J_1(k\rho \sin \theta) \exp(-i\psi) + J_3(k\rho \sin \theta) \exp(i3\psi)] \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} a (\cos \theta - 1) J_2(k\rho \sin \theta) \sin 2\psi \right\} d\theta, \\
 & E_z(\rho, \psi, z) \\
 &= ik \int_0^\alpha P(\theta) \left\{ \frac{1}{2} f \sin^2 \theta [J_0(k\rho \sin \theta) \right. \\
 &\quad - J_2(k\rho \sin \theta) \exp(i2\psi)] \\
 &\quad \left. - ia \sin \theta J_1(k\rho \sin \theta) \cos \psi \right\} d\theta, \quad (5)
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 P(\theta) &= \exp\left(-\frac{f^2 \sin^2 \theta}{w^2}\right) \exp[-ikz \cos \theta] \\
 &\quad \times \sin \theta \cos^{1/2} \theta,
 \end{aligned}$$

由(5)式可以看出, 线偏振离轴高斯涡旋光束经过大数值孔径透镜聚焦后, 聚焦场中光电场的三个分量均不为零. 研究表明, 光束经过大数值孔径透镜聚焦时, 聚焦场中光电场  $x$  分量的光强对总光强的贡献最大, 而  $y, z$  分量对总光强的贡献很小<sup>[14]</sup>, 因此本文只研究光电场  $x$  方向上的光强和相位分布.

### 3 数值计算及分析

为了详细了解离轴高斯涡旋光束经大数值孔径透镜后聚焦场的光强和相位分布情况, 我们进行了数值计算. 模拟计算中, 波长  $\lambda$  取 632.8 nm, 光斑尺寸  $w$  取 2 mm, 透镜的焦距  $f$  取 2 mm, 数值孔径 NA 取 0.9, 依此分析离轴涡旋光束在深聚焦场的光强和相位分布特性.

#### 3.1 一阶离轴涡旋光束深聚焦

图2为一阶离轴高斯涡旋光束在焦平面上  $x$  分量的光强分布, 图2(a)中离轴距离为零(理想非离轴的情形), 聚焦场光强的分布关于坐标轴对称, 暗核位于坐标原点, 当离轴距离为  $0.1w$  时, 聚焦场光强的分布仅关于  $y$  轴对称, 下半区较强, 上半区较弱, 暗核偏离坐标原点, 位于  $y$  轴正半轴; 当离轴距离增加到  $0.2w$  时, 聚焦场光强的分布仍关于  $y$  轴对称, 但上下不对称性更加强烈, 暗核仍位于  $y$  轴正半轴, 偏离坐标原点的距离明显有所增加; 离轴距离为  $-0.1w$  时, 聚焦场光强分布与图2(b)刚好相反, 上半区较强, 下半区较弱, 暗核位于  $y$  轴负半轴, 暗核偏离坐标原点. 由此可见, 离轴距离的大小会加剧聚焦场光强在  $y$  轴方向上分布的差异, 而离轴距离的符号决定了光强集中区域的方向.

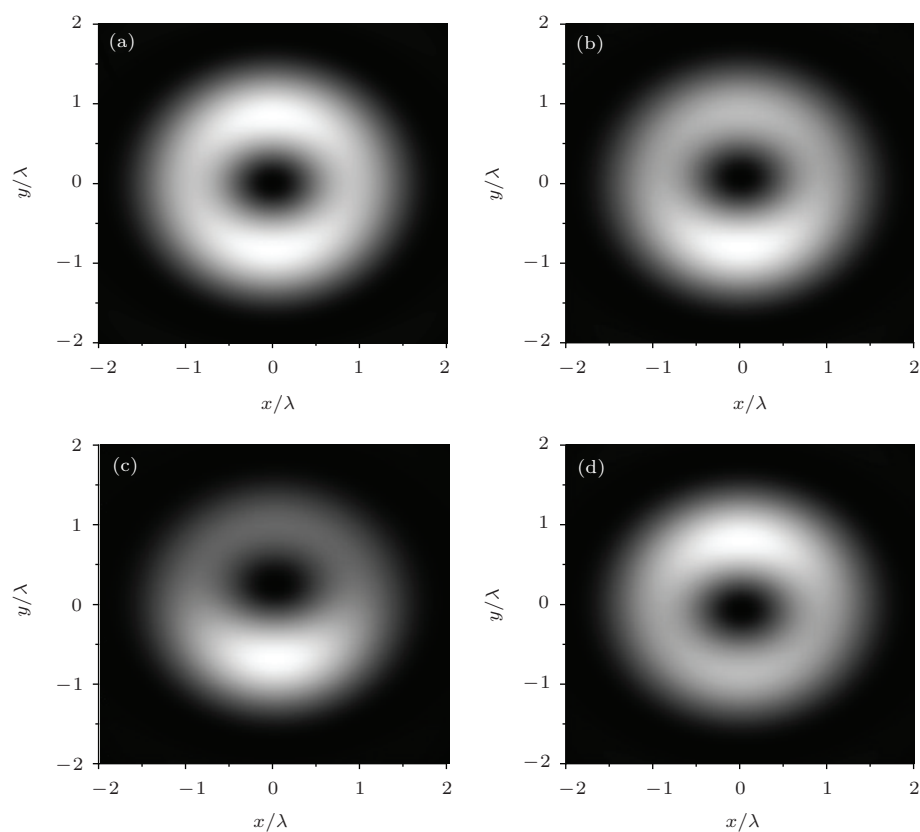


图2 焦平面上  $x$  分量的光强分布 (a)  $a = 0$ ; (b)  $a = 0.1w$ ; (c)  $a = 0.2w$ ; (d)  $a = -0.1w$

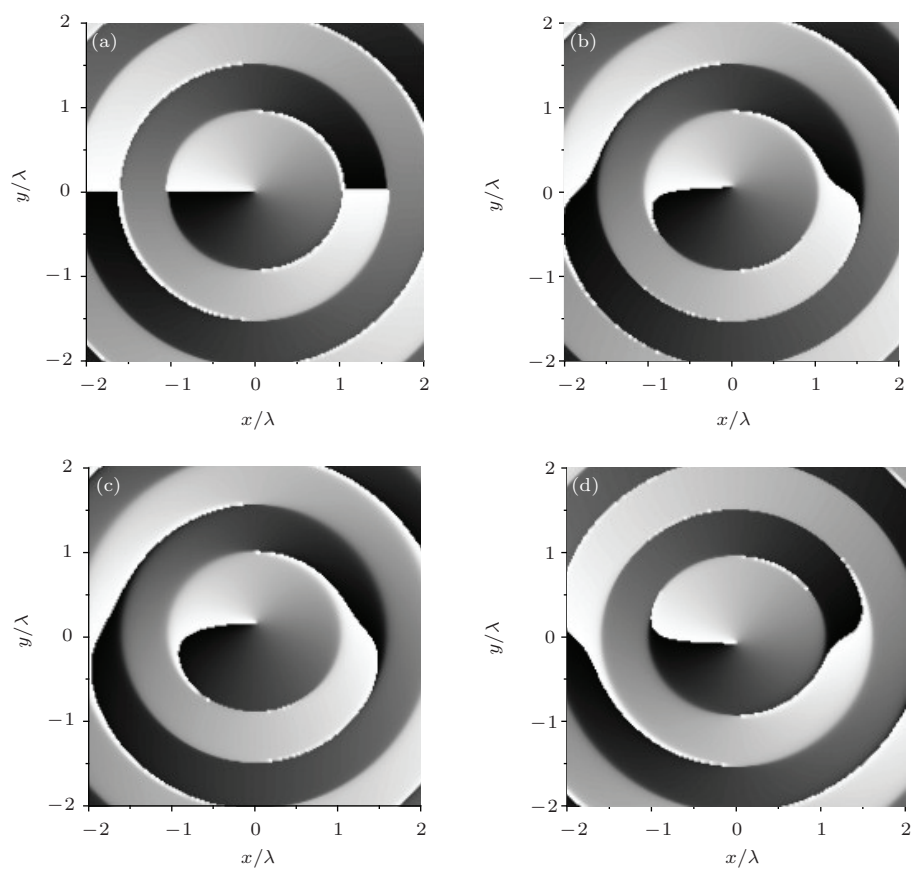


图3 焦平面上  $x$  分量的相位分布 (a)  $a = 0$ ; (b)  $a = 0.1w$ ; (c)  $a = 0.2w$ ; (d)  $a = -0.1w$

图3为一阶离轴高斯涡旋光束在焦平面上 $x$ 分量的相位分布,在相位分布图中,可以观察到等相位线(需要将图形放大,观察则比较清晰),在靠近相位分布图中中间的区域中,很多条等相位线(从0到 $2\pi$ )的交点就是相位奇点.图3(a)中离轴距离为零,聚焦场的相位奇点只有一个,位于坐标原点;当离轴距离为 $0.1w$ 时,由于选取的离轴参数较小,相位奇点发生微小移动,偏离坐标原点,此时奇点的坐标为 $(0,0.08\lambda)$ ,位于 $y$ 轴正半轴;当离轴距离为 $0.2w$ 时,奇点坐标为 $(0,0.16\lambda)$ ,此时奇点偏离坐标原点的距离是图3(b)的两倍,与两图中离轴距离的两倍关系对应;当离轴距离为 $-0.1w$ 时,相位奇点的位置刚好与图(b)相反,此时奇点的坐标为 $(0,-0.08\lambda)$ ,位于 $y$ 轴负半轴.由此可知,离轴距离的大小会影响相位奇点在 $y$ 轴方向上偏离坐标原点的距离,当离轴距离的符号为正时,奇点位于 $y$ 轴的正半轴;离轴距离的符号为负时,奇点位于 $y$ 轴的负半轴.奇点位置分布这一特性,和图2光强分布中暗核的位置分布情况正好对应.

### 3.2 高阶离轴涡旋光束深聚焦

图4为高阶离轴高斯涡旋光束在焦平面上 $x$ 分量的光强分布,当离轴距离 $a = 0.1w$ 、拓扑荷数 $m = 2$ 时,聚焦场光强分布关于 $y$ 轴对称,下半区较强,上半区较弱,空心区域中心偏离坐标原点,位于 $y$ 轴正半轴;当离轴距离保持不变,拓扑荷数 $m = 3$ 时,聚焦场光强分布依然关于 $y$ 轴对称,但空心区域增大,光斑展宽明显,空心区域中心位于 $y$ 轴正半轴,由于光斑展开,光强最大值向下偏移;当离轴距离保持不变,拓扑荷数 $m = 4$ 时,空心区域明显增大,光强最大值继续向下偏移,空心区域中心依然位于 $y$ 轴正半轴;当离轴距离 $a = -0.1w$ 、拓扑荷数 $m = 3$ 时,聚焦场光强分布与图4(b)刚好相反,上半区强,下半区弱,此时空心区域中心位于 $y$ 轴负半轴.由此可见,拓扑荷数的增大会使空心区域增大,光斑展宽,而光强集中区域的方向则由离轴距离的符号决定,这一点和前面讨论的一阶离轴涡旋光束深聚焦相似,但通过详细的计算发现,高阶

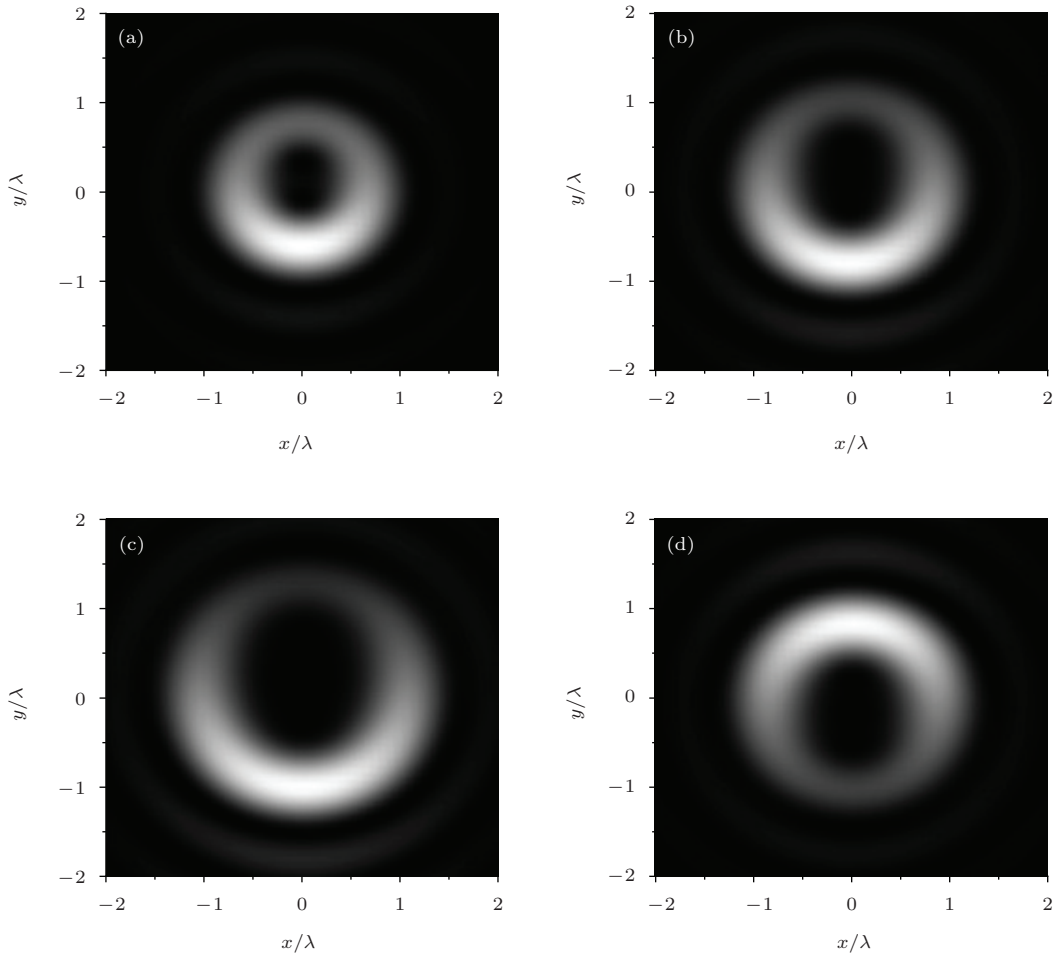


图4 焦平面上 $x$ 分量的光强分布 (a)  $m = 2, a = 0.1w$ ; (b)  $m = 3, a = 0.1w$ ; (c)  $m = 4, a = 0.1w$ ; (d)  $m = 3, a = -0.1w$



离轴涡旋光束深聚焦场并非只有一个暗核, 原始的高阶涡旋发生了分裂, 光强度分布图中难以观察, 需要相位结构图才能清楚显示.

图5为高阶离轴高斯涡旋光束在焦平面上 $x$ 分量的相位分布, 图5(a)中离轴距离 $a = 0.1w$ 、拓扑荷数 $m = 2$ , 此时聚焦场出现2个相位奇点, 坐标分别为 $(0, 0.304\lambda)$ ,  $(0, -0.074\lambda)$ , 一个位于 $y$ 轴正半轴, 一个位于 $y$ 轴负半轴, 两奇点的中心位于 $y$ 轴正半轴; 当离轴距离保持不变, 拓扑荷数 $m = 3$ 时, 聚焦场相位奇点个数为3, 其坐标从上到下分别为 $(0, 0.492\lambda)$ ,  $(0, 0.152\lambda)$ ,  $(0, -0.184\lambda)$ , 中间奇点偏离坐标原点位于 $y$ 轴正半轴, 经计算上下两奇点与中间奇点的距离分别为 $0.34\lambda, 0.336\lambda$ , 存在 $0.004\lambda$ 的差别, 近似相等, 由于相位分布图采用点 $200 \times 200$ 点阵绘制, 相邻两点的距离为 $0.01\lambda$ , 观察奇点位置是存在误差, 在进行局部(相位奇点附近)数值计算时, 误差会减小, 可近似认为上下两奇点关于中间奇点位置对称; 当离轴距离保持不变, 拓扑荷数 $m = 4$ 时, 聚焦场相位奇点数为4, 其坐标从上到下依次为 $(0, 0.676\lambda)$ ,  $(0, 0.278\lambda)$ ,  $(0, 0.100\lambda)$ ,  $(0, -0.295\lambda)$ , 其中第1个奇点到第2个

奇点的距离为 $0.398\lambda$ , 第3个奇点到第4个奇点的距离为 $0.395\lambda$ , 两个距离非常接近(差别为 $0.003\lambda$ ), 可认为近似相等, 即第2,3奇点的中心位置与第1,4奇点的中心位置近似重合, 它们在一条直线上( $y$ 轴), 关于其中心位置近似对称; 当离轴距离 $a = -0.1w$ 、拓扑荷数 $m = 3$ 时, 相位分布与图5(b)正好相反, 奇点个数仍然为3, 奇点坐标从上到下依次为 $(0, 0.184\lambda)$ ,  $(0, -0.152\lambda)$ ,  $(0, -0.492\lambda)$ , 奇点都在 $y$ 轴上, 且上下两奇点关于中间奇点位置近似对称, 与图5(b)不同的是: 中间奇点的位置在 $y$ 轴负半轴. 由此可见, 高阶离轴涡旋光束经过深聚焦后, 暗核会发生分裂, 分裂出的奇点个数与聚焦前光束的拓扑荷数相等, 离轴距离的符号会影响奇点在 $y$ 轴上的位置.

由前面分析可知, 高阶涡旋在深聚焦场中会出现分裂, 分裂出的奇点个数等于对应的拓扑荷数, 为了证实这种暗核分裂现象究竟由深聚焦引起, 还是由离轴引起, 或是两种因素共同作用的结果, 我们计算了非离轴情况下高阶涡旋光束深聚焦后焦平面上 $x$ 分量的相位分布, 与图5(a), (b)进行对比.

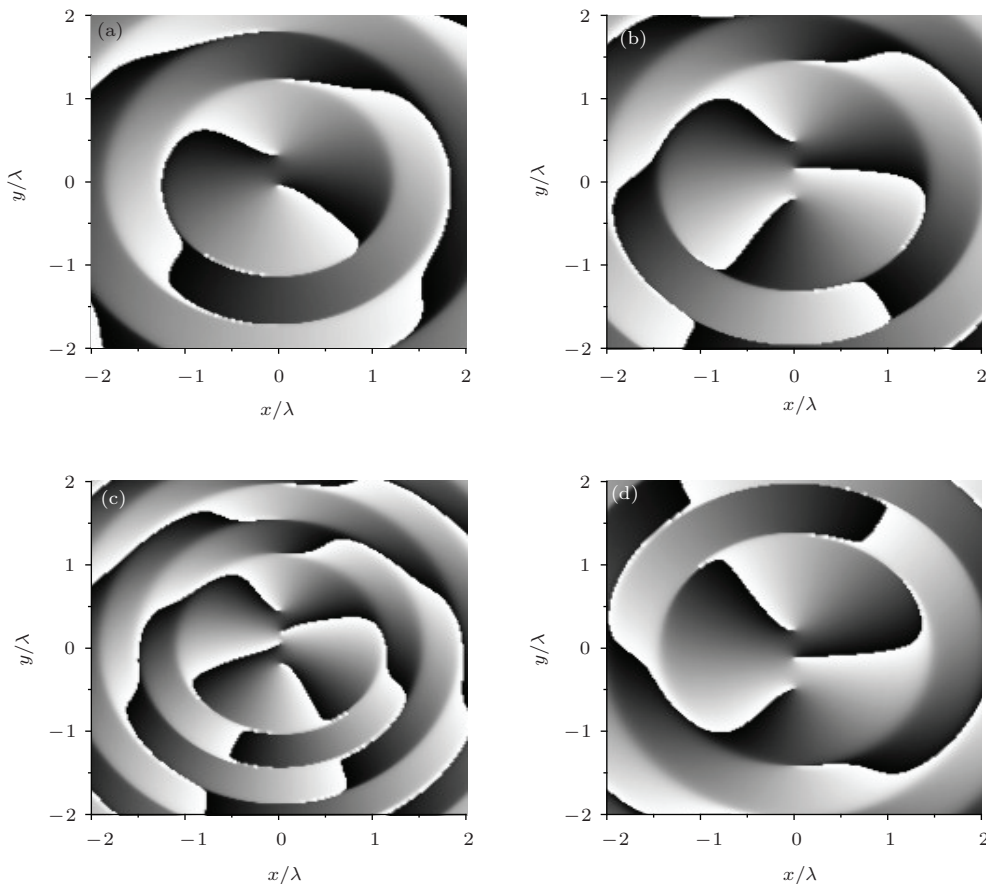
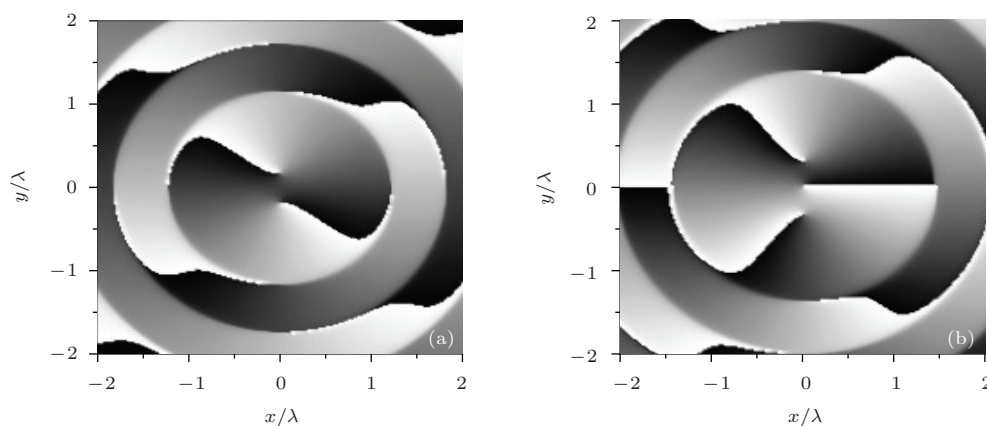


图5 焦平面上 $x$ 分量的相位分布 (a)  $m = 2, a = 0.1w$ ; (b)  $m = 3, a = 0.1w$ ; (c)  $m = 4, a = 0.1w$ ; (d)  $m = 3, a = -0.1w$

图6 焦平面上  $x$  分量的相位分布 (a)  $m = 2, a = 0$ ; (b)  $m = 3, a = 0$ 

由图6可以看出,在非离轴情况下,当拓扑荷数  $m = 2$  时,聚焦场相位分布图中出现2个奇点,位置坐标分别为  $(0, 0.188\lambda)$ ,  $(0, -0.188\lambda)$ , 都在  $y$  轴上且关于坐标原点对称;当拓扑荷数  $m = 3$  时,聚焦场相位分布图中出现3个奇点,位置坐标从上到下依次为  $(0, 0.32\lambda)$ ,  $(0, 0)$ ,  $(0, -0.32\lambda)$ , 中间奇点位于坐标原点,而上下两奇点在  $y$  轴上且关于坐标原点对称. 比较图5(a)和图6(a),可以发现,拓扑荷数  $m = 2$  时,无论是离轴还是非离轴,聚焦场都会出现2个奇点,不同的是:在非离轴情况下,两奇点在  $y$  轴上且关于坐标原点对称,它们之间的距离为  $0.378\lambda$ ,而在离轴条件下 ( $a = 0.1w$ ),两奇点在  $y$  轴上且整体向上偏移约  $0.12\lambda$ ,不再关于坐标原点对称. 对比图5(b)和图6(b),聚焦场都有3个奇点并且都在  $y$  轴上,相较于非离轴时,离轴距离 ( $a = 0.1w$ ) 的存在使奇点整体向上偏移  $0.15\lambda$ ,上下两奇点依然关于中间奇点对称. 由此可以说明这种暗核分裂现象由深聚焦引起,离轴距离的存在只会影响奇点在  $y$  轴上分布的位置. 需要指出的是,当NA减小时,类似的暗核分裂现象也会出现,但此时聚焦场的光斑尺寸会有较大程度的增加,对应的光场能量相对而言则不如深聚焦的情形时集中,会严重减弱光场与微粒的相互作用.

## 4 结 论

基于德拜矢量衍射积分理论,得到了离轴高斯涡旋光束深聚焦后光场的表达式,通过数值模拟分析了离轴距离与拓扑荷数改变对高斯涡旋光束经

过大数值孔径透镜后在聚焦场的光强和相位分布的影响. 结果表明,离轴距离的大小会加剧聚焦场光强在  $y$  轴方向上分布的差异大小,而离轴距离的符号决定了光强集中区域的方向;拓扑荷数的增大会使空心区域增大,光斑展宽;高阶暗核会发生分裂,分裂出的奇点个数等于对应的拓扑荷数,分裂后的奇点具有明显的近似对称性. 这种暗核分裂现象由深聚焦引起,离轴距离的大小和符号则会影响奇点在  $y$  轴上的位置.

## 参考文献

- [1] Liu Y D, Gao C Q, Gao M W, L F 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 854
- [2] Bokor N, Davidson N 2007 *Opt. Commun.* **279** 229
- [3] Grosjean T, Courjon D 2007 *Opt. Commun.* **272** 314
- [4] Li X, Cao Y, Gu M 2011 *Opt. Lett.* **36** 2510
- [5] Chen Z Y, Pu J X, Zhao D M 2011 *Phys. Lett. A* **375** 2958
- [6] Kim W, Park N 2007 *Opt. Rev.* **14** 236
- [7] Shimizu Y, Sasad A H 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 4713
- [8] Zhan Q 2006 *Opt. Lett.* **31** 867
- [9] Chen B, Pu J, Korotkova O 2010 *Opt. Express* **18** 10822
- [10] Hua M, Chen Z, Chen B, Pu J 2010 *Chin. Phys. B* **19** 014202
- [11] Yan H W, Cheng K, Lü D 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 5542 (in Chinese) [闫红卫, 程科, 吕百达 2008 物理学报 **57** 5542]
- [12] Li Y Y, Chen Z Y, Liu H, Pu J X 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 1740 (in Chinese) [李阳月, 陈子阳, 刘辉, 蒲继雄 2010 物理学报 **59** 1740]
- [13] Richards B, Wolf E 1959 *Proc. R. Soc. A* **253** 358
- [14] Chon J W M, Gan X S, Gu M 2002 *Phys. Lett.* **81** 1576

# Tight focusing properties of off-center Gaussian vortex beams\*

Wang Hui Ding Pan-Feng<sup>†</sup> Pu Ji-Xiong

(College of Information Science and Engineering, Huaqiao University, Xiamen 361021, China)

( Received 20 April 2014; revised manuscript received 20 May 2014 )

## Abstract

The properties of off-center Gaussian vortex beams focused by a high numerical aperture are investigated on the basis of vector Debye integral. A complex amplitude of off-center Gaussian vortex beams through a high numerical aperture objective is derived and numerical calculation is performed to analyze the intensity and phase distributions of the beams in the focal plane. It is shown that the intensity and phase distributions change significantly with the variation of off-axial distance; the intensity distribution in the focal plane is different in the direction of  $y$ -axis which is enhanced with the increase of off-axial distances; the sign of off-axial distance determines the direction in which the intensity is concentrated. On the other hand, different from the 1<sup>st</sup> order off-axial vortex beam, high-order off-axial vortex will split in the tightly focused field. Multiple phase singularities will appear and the number of singularities is equal to the topological charge of the original beam. Besides, the split singularities are symmetric, obviously. It is found that the splitting of high-order vortex is due to the tight focusing.

**Keywords:** tight focusing, split of singularity, vector Debye integral, off-center Gaussian vortex beams

**PACS:** 42.25.-p, 42.25.Bs, 42.25.Hz

**DOI:** [10.7498/aps.63.214202](https://doi.org/10.7498/aps.63.214202)

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundations of China (Grant Nos. 61307001, 61178015), and the Natural Science Foundation of Fujian Province, China (Grant No. 2013J05094).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: [dingpanfeng@163.com](mailto:dingpanfeng@163.com)