

疾病传播与级联失效相互作用的研究: 度不相关网络中疾病扩散条件的分析*

欧阳博 金心宇[†] 夏永祥 蒋路茸 吴端坡

(浙江大学电子电路与信息系统研究所, 杭州 310027)

(2014年5月14日收到; 2014年6月15日收到修改稿)

在网络科学中, 对疾病传播和级联失效的研究分属两个独立的领域, 但在实际中存在许多两个过程相互耦合的情况. 比如在通信网络中, 病毒传播会对数据传输造成影响, 导致网络中负载变化, 进而可能引发级联失效. 这个现象已被观察到. 通过建立两个动态过程相互作用的模型及针对该模型的分析, 本文给出了计入节点的负载和容量时疾病爆发的条件. 这一条件是由描述疾病传播速率的传播概率与描述节点容量大小的冗余系数共同决定的. 进一步探讨表明, 当疾病传播速率一定而冗余系数变化时, 疾病恰好开始传播的临界点附近未感染且未失效的节点的数量是最大的, 即在此点上网络处于最佳工作状态. 因此给出疾病爆发的临界条件具有重要意义.

关键词: 复杂网络, 疾病传播, 级联失效

PACS: 89.75.-k, 05.70.Jk, 05.10.-a

DOI: 10.7498/aps.63.218902

1 引言

疾病传播的研究已经有一段很长的历史, 学术界先后提出了许多模型并在此基础上开展了诸多研究, 典型的比如 SIR^[1]、SIS 模型^[2] 等. 对网络上疾病传播的研究是最近十几年来随着网络科学的发展而兴起的^[3-7], 一方面, 个体并非如传统疾病传播研究中所假定的那样与任何其他个体都有均等的接触机会, 它们只会与少量的个体有接触, 另一方面, 人们对计算机病毒^[8]、社会舆论的传播^[9] 等相似但又不能直接应用已有模型来分析的现象的日益重视, 促进了对网络上疾病传播的研究. 这一研究产生了许多影响深远的工作, 其中最引人瞩目的当属疾病传播的阈值理论, 此理论的结论之一是: 存在一个仅由网络拓扑结构决定的阈值, 只有当疾病传染率高于此阈值的时候, 疾病才能在网络中扩散开来^[10].

级联失效是另一被广泛研究的课题. 在电力^[11, 12]、通信^[13]、经济^[14] 和生物网络^[15] 中都能发生级联失效. 学术界提出了许多模型来揭示其机理, 比如基于介数的模型^[16, 17]、沙堆模型^[18, 19] 和纤维束模型^[20, 21] 等. 在大多数这样的模型中, 节点失效的原因都是它的负载超出了它的容量. 节点失效会引发负载的重新分配, 导致更多的节点失效, 产生级联效应. 在沙堆或者纤维束模型中, 失效规模存在临界性^[20, 22]: 容量低于(或者负载高于)某一阈值的时候, 网络中才会出现显著的级联失效现象. 相比于基于介数的失效模型, 针对这两类模型的理论分析也往往更容易进行. 比如, 文献^[18, 22] 通过理论分析指出, 若在 Erdős-Rényi(ER) 网络^[23] 上发生沙堆失效过程, 失效规模将呈幂率分布, 若在 Barabási-Albert(BA) 网络^[24] 上发生沙堆失效, 且节点的容量正比于其度数, 则失效规模亦呈幂率分布.

近年来, 在疾病传播的研究中, 研究人员除

* 国家自然科学基金(批准号: 61174153)资助的课题.

[†] 通讯作者. E-mail: jinxy@zju.edu.cn

了对网络拓扑与其上传播过程的相互作用给予了关注, 比如对自适应网络上^[25, 26]和互连网络上^[27, 28]的疾病传播进行了研究等, 对疾病传播动态过程本身的复杂性—而非网络拓扑所带来的复杂性—也给予了特别关注. 比如研究网络上同时存在多种疾病传播的情况^[29]; 舆论传播与疾病传播的相互作用^[30, 31]: 关于疾病的舆论传播会对人们的行为造成一定的影响, 进而影响疾病的传播; 人们对于避免被感染的决策过程与疾病传播的相互作用^[32–35]; 网络上的疾病传播与交通流过程的相互作用^[36, 37], 人们经航空工具做跨越国界的迁移会极大地加速传染病在国别之间的传播等. 我们受此启发, 开展了疾病传播与级联失效的相互作用研究.

在网络科学中, 对疾病传播和级联失效的研究分属两个独立的领域, 当研究其中一个过程的时候, 常常不会考虑另外一个过程的影响. 但是在实际中存在很多这两个动态过程相互作用, 且其中任何一个的效应都不能忽略的情形. 比如, 若一个被病毒感染的路由器不能正常的发送数据, 就会使得网络中发生负载的重新分配, 这就有可能引起级联失效, 反过来, 级联失效也会影响疾病的传播, 因为失效的路由器将无法转发数据, 特别是无法传播病毒, 因为计算机病毒实际上也是数据. 在2001年9月, 研究者在因特网中观察到了我们这里所描述的情况^[38]. 在我们的研究开展之前, 我们无法知道当计入了节点的负载与容量等因素时, 疾病传播过程会与传统研究中的情形存在什么不同.

在文献^[39, 40]中, 我们已经对上述场景建立了模型, 并得到了一些初步的结果. 为了说明这些结果, 需要引入两个参数, 一个是与疾病传播相关的疾病传播概率, 描述疾病传播的速率, 另外一个是与级联失效相关的描述节点容量大小的冗余系数. 在文献^[39]中, 我们观察到当两个动态过程都结束时, 网络中未被感染且未失效的节点只在疾病传播概率与冗余系数满足特定条件才能形成连通簇, 我们给出了ER网络中的这一条件. 在^[40]中, 我们进一步给出了在度不相关的网络中稳态时因感染而被移除和失效的节点所占比例. 在这个基础上, 本文给出了疾病在网络中大规模扩散开来的条件, 并指出, 若疾病传播速率一定而冗余系数可变, 在冗余系数使得该条件恰好满足时, 稳态的未感染且未失效的节点的数量是最大的, 即此时网络

处于最佳状态. 因而得到该条件的显式形式有重要意义.

2 模型

根据上文所述应用背景, 我们基于SIR疾病传播^[1]以及局域负载分担的级联失效构建了一个模型^[39], 后文中我们称之为相互作用模型, 同时, 在必要时, 我们把仅考虑级联失效的模型称为单级联失效模型, 把仅考虑疾病传播的模型称为单疾病传播模型, 以示区分.

在标准SIR模型中, 个体总是处于易感(susceptible, S)、感染(infected, I)和移除(recovered/removed, R)三种状态之一, 其中移除对应于永久免疫或者死亡. 我们分别称之为S态、I态和R态. 在每一时间步, S态的节点以概率 λ 被它的每一个I态的邻居感染为I态; 同时, I态的节点以概率 μ 变为R态. 为便于分析, 常设 $\mu = 1$.

在我们的模型中, R态节点是因感染疾病而最终被移除的节点, 它们不能处理它们承载的流或负载, 比如, 在计算机网络中, 受病毒感染的路由器不能正常处理来自其他路由器的数据. 这样, 节点进入R态会导致网络中负载的重新分配, 换言之, 疾病传播会导致负载重新分配, 从而有引发级联失效的可能. 此外, 我们认为失效的节点—后文称失效的节点为F态(failed)的节点—也不能正常工作, 特别是无法感染其他节点或者被其他节点感染. 我们把R态和F态的节点统称为失活(inactive)节点, 因为这两种状态的节点在后续过程中都不再与其他节点有相互作用. 相应地, 我们把处于其他状态的节点称为活跃(active)节点, 在不会引发歧义的情况下, 我们把活跃节点变成失活节点这个过程也称为失活(deactivate).

受相关研究启发^[41, 42], 我们假定负载的重新分配机理如下: 当一个节点失活以后, 它的每一个活跃邻居的负载将增加一个固定的常量, 我们用 Δ 表示. 过载节点是那些负载超出了其容量的节点. 我们假定节点的容量正比于其初始负载^[16, 43], 即对某一节点 v , 认为其容量为

$$C_v = (1 + \alpha)L_v, \quad (1)$$

其中, L_v 是节点的初始负载, 常数 α 表示冗余系数(tolerance parameter). 节点的初始负载按照某

一分布随机产生, 为简单计, 我们考察初始负载在 $[L_{\min}, L_{\max}]$ 均匀分布的情况^[41, 42]. 不失一般性, 设 $L_{\min} = 0$ 及 $L_{\max} = 1$, 于是初始负载的累计分布函数为

$$P\{L_v < l\} \triangleq \theta(l) = \begin{cases} 0, & l \leq 0, \\ l, & 0 < l \leq 1, \\ 1, & l > 1. \end{cases} \quad (2)$$

为了更清晰地描述相互作用模型, 我们把用于该模型的仿真的步骤详述如下:

1) 生成一个含有 N 个节点的网络. 网络中每个节点的负载按照均匀分布随机地在 $[0,1]$ 上取值. 节点的容量由 (1) 式定义, 为初始负载的 $(1 + \alpha)$ 倍.

2) 在网络中随机的选择极少数的节点作为初始感染节点 (I 态的节点).

3) 对每一条连接 S 和 I 态节点的边而言, S 态的节点以概率 λ 被 I 态邻居感染为 I 态. 注意, 如果一个 S 态节点有多个 I 态的邻居, 则它将以概率 λ 被每一个这样的邻居感染. 同时, 每一个本步骤执行前就已经处于 I 态的节点以概率 1 变为 R 态.

4) 新失活的节点导致其每一个活跃邻居的负载增加 Δ , 查看所有活跃节点中是否有过载的情况, 把过载的节点变为 F 态. 重复进行这一步直至网络中不再存在过载的节点.

5) 如果网络中仍然有 I 态的节点, 跳到步骤 3) 进行新一轮的疾病传播; 否则, 相互作用模型停止, 此时网络的状态称为稳态.

注意到在上述过程中, 我们假定了级联失效过程发生的时间尺度是远远小于疾病传播的时间尺度的, 即在步骤 4) 中, 网络中可能的失效会一直进行, 至没有过载节点为止, 然后再进行下一步疾病传播, 即步骤 3). 现实生活中, 级联失效发生的势头往往是非常迅猛的, 因此这样的假设符合实际情况.

3 度不相关网络中疾病扩散条件的分析

3.1 稳态时 R 态节点和 F 态节点的比例

易知稳态时网络中只存在 S, R, F 三种状态的节点, 本节中我们将介绍在疾病未大规模扩散开来的情况下, 稳态时网络中 R 态和 F 态节点的比例的

计算^[40]. 我们把疾病传播看作一个边渗流 (bond percolation) 过程^[44], 把级联失效看作一个点渗流 (site percolation) 过程, 并假设那些在点渗流过程中被占用, 同时连接到它们的某条或某些边也在边渗流过程中被占用了的节点最终是变为了 F 态, 而不是 R 态. 因为虽然级联失效是由疾病传播触发的, 但是在疾病未扩散开的情况下, 级联失效的爆发规模将远大于疾病的爆发规模.

为了避免冗长的表述, 我们称在点渗流过程中被占用的节点为准失效节点, 其连边中至少有一条在边渗流过程中被“占用”的节点为准感染节点. 设度为 k 的节点为准失效节点的概率为 s_k , 为准感染节点的概率为 b_k , 设最终该节点最终变为 F 态的概率即为 f_k , 而变为 R 态的概率为 r_k , 根据上文假设我们有

$$f_k = s_k, \quad (3)$$

$$r_k = (1 - s_k)b_k. \quad (4)$$

下面我们就来计算 f_k 和 r_k .

为了表述方便, 在我们所提的模型中, 称: 1) 一个节点为 m 脆弱节点, 如果它恰有 m 个邻居是准失效节点或者准感染节点, 且当这 m 个邻居都失效时, 它也失效; 2) 一个节点为脆弱节点, 如果该节点为 m 脆弱节点 ($m \geq 0$). 我们认为脆弱节点是最终变为了 F 态的节点.

设度为 k 的节点是 m 脆弱节点的概率为 $f_k^{(m)}$, 度为 k 的节点为脆弱节点的概率就是 f_k . 由 2) 我们有

$$f_k = \sum_{m=0}^k f_k^{(m)}. \quad (5)$$

考虑一度为 k 的节点 v , 其邻居的度为 j 的概率是 $\frac{j p_j}{\sum_i i p_i} = \frac{j p_j}{\langle k \rangle}$, 它为准失效节点或者准感染节点的概率是

$$1 - (1 - s_j)(1 - b_j) = s_j + (1 - s_j)b_j = f_j + r_j,$$

因此 v 的任意邻居是准失效节点或者准感染节点的概率为

$$\sum_j \frac{j p_j (f_j + r_j)}{\langle k \rangle} = \phi + \rho, \quad (6)$$

其中,

$$\phi \triangleq \sum_j \frac{j p_j f_j}{\langle k \rangle}, \quad (7)$$

$$\rho \triangleq \sum_j \frac{j p_j r_j}{\langle k \rangle}, \quad (8)$$

分别表示稳态时, 在网络中随机选择一个节点, 其邻居为F态和R态的概率.

根据(6)式, v 的 k 个邻居中恰有 m 个准失效节点或准感染节点的概率为

$$\binom{k}{m} (\phi + \rho)^m (1 - \phi - \rho)^{k-m}. \quad (9)$$

这 m 个邻居无论最终变为F态还是R态, 它们都会分担负载给 v , 使得 v 以概率

$$P\{L_v + m\Delta > (1 + \alpha)L_v\} = \theta \left(\frac{m\Delta}{\alpha} \right)$$

发生失效. 因而 v 为 m 脆弱节点的概率为

$$f_k^{(m)} = \binom{k}{m} (\phi + \rho)^m (1 - \phi - \rho)^{k-m} \times \theta \left(\frac{m\Delta}{\alpha} \right). \quad (10)$$

代入(5)式中可得

$$f_k = \begin{cases} \frac{k(\phi + \rho)\Delta}{\alpha}, & \text{若 } k \leq [\alpha/\Delta], \\ 1 - \sum_{m=0}^{[\alpha/\Delta]} \binom{k}{m} (\phi + \rho)^m \times (1 - \phi - \rho)^{k-m} \left(1 - \frac{m\Delta}{\alpha} \right), & \text{若 } k > [\alpha/\Delta], \end{cases} \quad (11)$$

其中方括号表示取整.

接下来我们计算 r_k . 首先我们知道度等于 k 的节点在稳态时为S态的概率为

$$(1 - s_k)(1 - b_k) = 1 - s_k - (1 - s_k)b_k = 1 - f_k - r_k.$$

从另外一个角度来看, 一个节点是否准失效或准感染节点可由其邻居节点是否准失效、准感染节点确定, 有下述两种可能:

1) 该节点的邻居是准失效节点, 或者是准感染节点但未使得它成为准感染节点, 发生此情况的概率为

$$\begin{aligned} & \sum_j \frac{j p_j (s_j + (1 - s_j)b_j(1 - \lambda))}{\langle k \rangle} \\ &= \sum_j \frac{j p_j (f_j + r_j(1 - \lambda))}{\langle k \rangle} = \phi + (1 - \lambda)\rho. \end{aligned}$$

2) 该节点的邻居既不是准失效节点亦不是准感染节点, 发生此情况的概率是

$$\begin{aligned} & \sum_j \frac{j p_j (1 - s_j)(1 - b_j)}{\langle k \rangle} \\ &= \sum_j \frac{j p_j (1 - f_j - r_j)}{\langle k \rangle} = 1 - \phi - \rho. \end{aligned}$$

当一个节点的邻居为第一种情况时, 它可能因邻居节点的失活而失效(因为邻居节点的失活会导致节点的负载增加), 第二种情况不会. 于是我们可以根据邻居节点的情况写出一个度为 k 的节点既非失效、亦非感染节点的概率

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} (\phi + (1 - \lambda)\rho)^m (1 - \phi - \rho)^{k-m} \left(1 - \theta \left(\frac{m\Delta}{\alpha} \right) \right) \\ &= \begin{cases} (1 - \lambda\rho)^k - \frac{k(\phi + (1 - \lambda)\rho)\Delta}{\alpha} (1 - \lambda\rho)^{k-1}, & \text{若 } k \leq [\alpha/\Delta], \\ \sum_{m=0}^{[\alpha/\Delta]} \binom{k}{m} (\phi + (1 - \lambda)\rho)^m (1 - \phi - \rho)^{k-m} \left(1 - \frac{m\Delta}{\alpha} \right), & \text{若 } k > [\alpha/\Delta]. \end{cases} \end{aligned} \quad (12)$$

上面第一行和式中最后一个因式表示当度为 k 的节点邻居中有 m 个为上面提到的情况1时, 节点 v 自身不发生失效的概率. 根据前文的讨论, 上式等于 $1 - f_k - r_k$, 再结合(11)式, 我们可以得到

$$r_k = \begin{cases} 1 - \frac{k(\phi + \rho)\Delta}{\alpha} - (1 - \lambda\rho)^k + \frac{k(\phi + (1 - \lambda)\rho)\Delta}{\alpha} (1 - \lambda\rho)^{k-1}, & \text{若 } k \leq [\alpha/\Delta], \\ \sum_{m=0}^{[\alpha/\Delta]} \binom{k}{m} ((\phi + \rho)^m - (\phi + (1 - \lambda)\rho)^m) (1 - \phi - \rho)^{k-m} \left(1 - \frac{m\Delta}{\alpha} \right), & \text{若 } k > [\alpha/\Delta]. \end{cases} \quad (13)$$

至此, 我们已经完成了 f_k 与 r_k 的推导, 稳态时网络中节点为F态和R态的概率可联立(7), (8), (11)和(13)式来计算. 这四个方程是彼此依赖的, 我们可以通过迭代方法求解.

3.2 疾病扩散条件的分析

虽然根据上述几个方程, 我们能够对其中的未知量进行求解, 但是我们最终还是希望可以得到疾病传播条件的显式形式. 为此, 我们根据动力系统理论对这几个方程做进一步探讨.

$$\phi = \frac{(\phi + \rho) \Delta}{\alpha} \sum_{j \leq [\alpha/\Delta]} \frac{j^2 p_j}{\langle k \rangle} + \sum_{j > [\alpha/\Delta]} \frac{j p_j}{\langle k \rangle} \left(1 - \sum_{m=0}^{[\alpha/\Delta]} \binom{j}{m} (\phi + \rho)^m (1 - \phi - \rho)^{j-m} \left(1 - \frac{m\Delta}{\alpha} \right) \right), \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \rho = & \sum_{j \leq [\alpha/\Delta]} \left(\frac{j p_j (1 - (1 - \lambda\rho)^j)}{\langle k \rangle} - \frac{j^2 p_j (1 - (1 - \lambda\rho)^{j-1}) (\phi + \rho) \Delta}{\langle k \rangle \alpha} - \frac{j^2 p_j (1 - \lambda\rho)^{j-1} \lambda\rho\Delta}{\langle k \rangle \alpha} \right) \\ & + \sum_{j > [\alpha/\Delta]} \frac{j p_j}{\langle k \rangle} \sum_{m=0}^{[\alpha/\Delta]} \binom{j}{m} ((\phi + \rho)^m - (\phi + (1 - \lambda)\rho)^m) (1 - \phi - \rho)^{j-m} \left(1 - \frac{m\Delta}{\alpha} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

不难说明

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{[\alpha/\Delta]} \binom{j}{m} (\phi + \rho)^m (1 - \phi - \rho)^{j-m} \\ & \times \left(1 - \frac{m\Delta}{\alpha} \right). \end{aligned} \quad (16)$$

当 j 趋于无穷大时是趋于 0 的, 并且随着 j 的增大衰减得非常快(衰减速度介于 j 的负幂率函数和负指数函数之间). 据此, 我们将之近似为 0, 对 (14) 式作如下近似:

$$\phi \approx \frac{(\phi + \rho) \Delta}{\alpha} \sum_{j \leq [\alpha/\Delta]} \frac{j^2 p_j}{\langle k \rangle} + \sum_{j > [\alpha/\Delta]} \frac{j p_j}{\langle k \rangle}, \quad (17)$$

同时, 我们注意到 (15) 式右边第二项中含有一个比 (16) 式更小的因子, 但是我们却不能忽略它. 其理由在于大小是相对的. 我们的目的是考虑疾病恰好能够扩散开来的条件. 在疾病刚刚能够扩散开来时, R 态节点的相对数量刚刚从 0 变为一个非 0 的小量, 因此 ρ 也很小, 我们不能随意忽略构成它的每一项. 同时, ϕ 是较大的, 我们对此解释如下: 在疾病传播概率较小时, 疾病是扩散不开的, 这种情况无需多言, 单疾病传播模型中已经给出了非常详尽的说明. 在疾病传播概率较大时, 疾病不能扩散开是因为受到了级联失效的阻碍, 因此, 在疾病恰好能够扩散开来时, F 态节点的相对数量是较多的, ϕ 也较大.

我们把 (17) 和 (15) 式右边的式子分别记为 $F_1(\phi, \rho)$ 和 $F_2(\phi, \rho)$, 于是可将这两个式子用矩阵

首先, 注意到 (7), (8), (11) 和 (13) 式给出了关于 ϕ , ρ , f_k 和 r_k 的几个方程, 后两者实际上各代表了一组方程, 因为在网络中节点的度 k 一般可以取不同值. 方程数量较多会对理论分析造成困难. 因此, 我们把 f_k 和 r_k 代入 ϕ , ρ , 即把 (11) 和 (13) 式分别代入 (7) 和 (8) 式, 将方程数量就缩减到两个:

的形式表示

$$\begin{bmatrix} \phi \\ \rho \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(\phi, \rho) \\ F_2(\phi, \rho) \end{bmatrix} \triangleq \mathbf{F}(\phi, \rho). \quad (18)$$

不难看出, $\rho = 0$ 是 (15) 式的一个解. 把 $\rho = 0$ 代入 (17) 式, 我们可以得到 F 的一个不动点

$$\mathbf{p} \triangleq \begin{bmatrix} \phi_{\mathbf{p}} \\ \rho_{\mathbf{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sum_{j > [\alpha/\Delta]} j p_j}{\langle k \rangle - \frac{\Delta}{\alpha} \sum_{j \leq [\alpha/\Delta]} j^2 p_j} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (19)$$

而 $\rho = 0$ 正是疾病未传播开时的情况, 而在疾病传播开时 $\rho > 0$, 迭代方程并没有收敛到 \mathbf{p} . 这表明在疾病未传播开时, \mathbf{p} 是稳定不动点, 疾病传播开时, \mathbf{p} 是不稳定不动点. 其稳定性发生了变化.

关于不动点 \mathbf{p} , 另外几点需要说明的是:

- 1) 当 $\alpha < k_{\min} \Delta$ 时, $\mathbf{p} = [1 \ 0]^T$, 此不动点处 $\phi = 1$, 表明该情况下所有节点都发生了失效;
- 2) 当 $\alpha \rightarrow \infty$ 时, \mathbf{p} 的第一个分量的极限

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \phi_{\mathbf{p}} &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j > [\alpha/\Delta]} j p_j}{\langle k \rangle - \frac{\Delta}{\alpha} \sum_{j \leq [\alpha/\Delta]} j^2 p_j} \\ &= 0, \end{aligned} \quad (20)$$

即不动点此时为 $\mathbf{p} = [0 \ 0]^T$, 在这一点处 $\phi = 0$, 表明所有节点都没有发生失效.

在上面两种情况下, 相互依赖模型退化为单个的级联失效或者疾病传播模型, 它们都是我们已经

比较熟悉的情况,我们在此不另作探讨,所以在下面的讨论中,我们限定 $\alpha \geq k_{\min}\Delta$.

根据动力系统的相关理论, (18) 式在不动点 \mathbf{p} 处的稳定性可由 F 的雅克比矩阵的特征值与 1 的大小关系确定. F 在 \mathbf{p} 点的雅克比矩阵为

$$\mathbf{J}_F(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \phi}(\mathbf{p}) & \frac{\partial F_1}{\partial \rho}(\mathbf{p}) \\ \frac{\partial F_2}{\partial \phi}(\mathbf{p}) & \frac{\partial F_2}{\partial \rho}(\mathbf{p}) \end{bmatrix}, \quad (21)$$

其中,

$$\frac{\partial F_1}{\partial \phi}(\mathbf{p}) = \frac{\Delta}{\alpha} \sum_{j \leq [\alpha/\Delta]} \frac{j^2 p_j}{\langle k \rangle}, \quad (22)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial \rho}(\mathbf{p}) = \frac{\Delta}{\alpha} \sum_{j \leq [\alpha/\Delta]} \frac{j^2 p_j}{\langle k \rangle}, \quad (23)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \phi}(\mathbf{p}) = 0, \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_2}{\partial \rho}(\mathbf{p}) = & \lambda \sum_{j \leq [\alpha/\Delta]} \left(\left(1 - \frac{\Delta}{\alpha}\right) \frac{j^2 p_j}{\langle k \rangle} \right. \\ & \left. - \frac{\Delta j^2(j-1)p_j}{\alpha \langle k \rangle} \phi_{\mathbf{p}} \right) \\ & + \lambda \sum_{j > [\alpha/\Delta]} \frac{j p_j}{\langle k \rangle} \sum_{m=0}^{[\alpha/\Delta]} \binom{j}{m} \phi_{\mathbf{p}}^{m-1} \\ & \times (1 - \phi_{\mathbf{p}})^{j-m} \left(m - \frac{m^2 \Delta}{\alpha} \right). \end{aligned} \quad (25)$$

我们可以得到 $\mathbf{J}_F(\mathbf{p})$ 的两个特征值

$$\eta_1 = \frac{\Delta}{\alpha} \sum_{j \leq [\alpha/\Delta]} \frac{j^2 p_j}{\langle k \rangle}, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \eta_2 = & \lambda \sum_{j \leq [\alpha/\Delta]} \left(\left(1 - \frac{\Delta}{\alpha}\right) \frac{j^2 p_j}{\langle k \rangle} - \frac{\Delta j^2(j-1)p_j}{\alpha \langle k \rangle} \phi_{\mathbf{p}} \right) \\ & + \lambda \sum_{j > [\alpha/\Delta]} \frac{j p_j}{\langle k \rangle} \sum_{m=0}^{[\alpha/\Delta]} \binom{j}{m} \phi_{\mathbf{p}}^{m-1} (1 - \phi_{\mathbf{p}})^{j-m} \\ & \times \left(m - \frac{m^2 \Delta}{\alpha} \right). \end{aligned} \quad (27)$$

欲使动力系统 (18) 在不动点沿 ρ 方向附近不稳定,我们只需要 $\eta_2 > 1$, 即

$$\begin{aligned} & \lambda \sum_{j \leq [\alpha/\Delta]} \left(\left(1 - \frac{\Delta}{\alpha}\right) \frac{j^2 p_j}{\langle k \rangle} - \frac{j^2(j-1)p_j \phi_{\mathbf{p}} \Delta}{\langle k \rangle \alpha} \right) \\ & + \lambda \sum_{j > [\alpha/\Delta]} \frac{j p_j}{\langle k \rangle} \sum_{m=0}^{[\alpha/\Delta]} \binom{j}{m} \phi_{\mathbf{p}}^{m-1} (1 - \phi_{\mathbf{p}})^{j-m} \\ & \times \left(m - \frac{m^2 \Delta}{\alpha} \right) > 1, \end{aligned} \quad (28)$$

其中, $\phi_{\mathbf{p}}$ 由 (19) 式确定. 这就是疾病能够扩散开来的条件.

作为对该结果的初步验证,我们考察 $\alpha \rightarrow \infty$ 时该条件的形式,我们知道在此极限情况下网络中不会有级联失效发生,因此,该条件应该跟单疾病传播模型中一致. 下面我们来验证这一点. 当 $\alpha \rightarrow \infty$ 时, (28) 式左边第二项趋于 0, 为了计算第一项的极限值,我们首先需要计算 $\phi_{\mathbf{p}}$ 的极限值

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \phi_{\mathbf{p}} = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j > [\alpha/\Delta]} j p_j}{\langle k \rangle - \frac{\Delta}{\alpha} \sum_{j \leq [\alpha/\Delta]} j^2 p_j} = 0, \quad (29)$$

第二个等号的原因是 $\sum_{j > [\alpha/\Delta]} j p_j$ 趋于 0, 而 $\langle k \rangle - \frac{\Delta}{\alpha} \sum_{j \leq [\alpha/\Delta]} j^2 p_j$ 趋向于非 0 值. 至此,我们可写出 (28) 式在 $\alpha \rightarrow \infty$ 的极限形式

$$\lambda \sum_j \frac{j^2 p_j}{\langle k \rangle} = \lambda \frac{\langle k^2 \rangle}{\langle k \rangle} > 1, \quad (30)$$

而这恰好就是单疾病传播模型中的情况 [45].

4 仿 真

首先验证我们对稳态时 F 态、R 态节点的比例的推导结果,为此,我们在 BA 网络上进行了仿真,并考虑疾病传播概率不同 ($\lambda = 0.65, 1$)、网络平均度不同的多种情况. 每一次仿真结束,即网络进入稳态后,我们统计网络中处于 F 态和 R 态的节点的比例(分别记作 f 和 r),然后把它们与参数 α 的关系用曲线作出(见图 1 中实心标记标出的曲线). 对于它们的理论值,我们首先对 (7), (8), (11) 和 (13) 式迭代以计算出 f_k 和 r_k , 然后代入

$$f = \sum_k p_k f_k, \quad r = \sum_k p_k r_k \quad (31)$$

得到. 在图 1 中,理论计算结果用空心标记标出的曲线画出.

我们可以看到,在 α 较小时,理论和仿真的结果是非常吻合的,体现在两个方面: 1) 在 r 为 0 的这一段上,对 f 和 r 的理论计算是与仿真结果相吻合的; 2) r 从 0 变为非 0 的临界 α 也是吻合的. 在 r 非 0 的这一段上,两者之间出现了较大偏差,这是由我们在理论推导时认为那些既发生了点渗流,且连接到它们的某些边也发生了边渗流的节点最终是 F 态节点而不是 R 态节点导致的,事实上,这样的节点最终既有可能变为 F 态也有可能变为 R 态. 认为它们都是 F 态,这只在疾病没有大规模扩散即

R态节点非常少时才成立. 进一步, 我们可知, 根据这一假设推导得到的F态节点的比例应该是偏大的, R态节点的比例应该是偏小的. 从图1我们可以看到, 在 r 大于0的这一段上, 确实是这样情况.

其次, 我们对疾病大规模扩散的条件进行了验证. 在图2中, 横坐标上大号实心图标标记的是由(28)式算得的疾病传播的临界冗余系数不同平均度的情况下, 理论计算得到的疾病恰好能够传播

开时的临界冗余系数. 其值是根据(28)式按如下算法得到的:

- 1) 给 α 赋初值为 $k_{\min}\Delta$;
- 2) 代入(28)式, 检查该不等式是否成立, 如果不成立, 将 α 增加STEP(STEP为一预先设定的常数, 用以调节预测精度), 然后重复此步. 如果成立, 运算结束. α 的当前值即为疾病恰好能够传播开时的冗余系数.

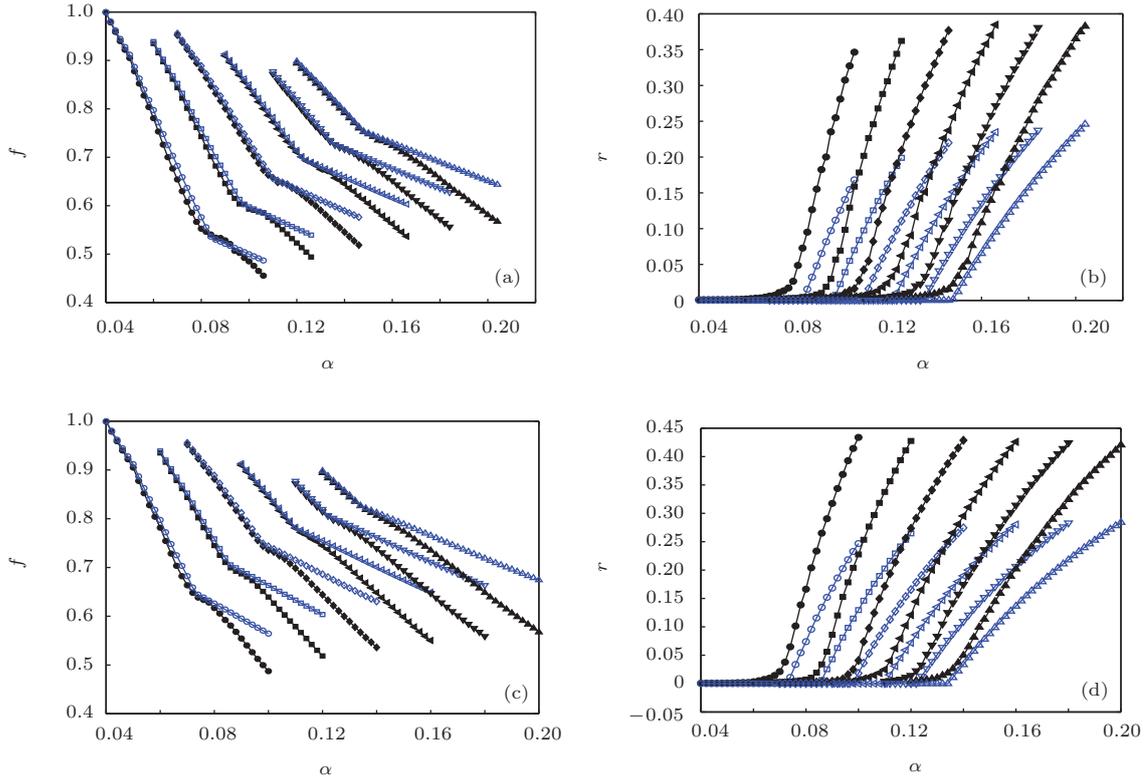


图1 (网刊彩色) BA网络中稳态时F态和R态节点所占比例的验证(横坐标是冗余系数. 不同的曲线分别表示网络平均度不同的情况: $\langle k \rangle = 8$ (圆形), 10 (正方形), 12 (菱形), 14 (朝左三角形), 16 (朝下三角形), 18 (朝上三角形). 在具有相同形状图标的两条曲线中, 实心图标标记的曲线是仿真的结果, 由50次独立仿真求平均得到, 空心图标标记的曲线是由(7), (8), (11)和(13)式迭代得到. 在每次仿真中, 网络的规模为5000, $\Delta = 0.01$) (a) $\lambda = 0.65$; (b) $\lambda = 0.65$; (c) $\lambda = 1.00$; (d) $\lambda = 1.00$

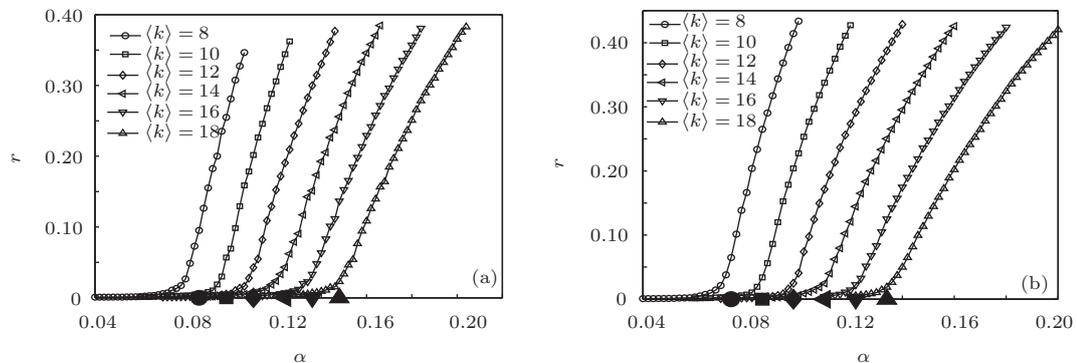


图2 BA网络发生疾病传播的条件验证(横坐标是冗余系数 α , 纵坐标是稳态时网络中R态节点的相对数量. 图中曲线上所有点都是对50次独立仿真求平均的结果. 在每次仿真中, 网络规模为5000, $\Delta = 0.01$. 横坐标上大号实心图标标记的是由(28)式算得的疾病传播的临界冗余系数) (a) $\lambda = 0.65$; (b) $\lambda = 1.00$)

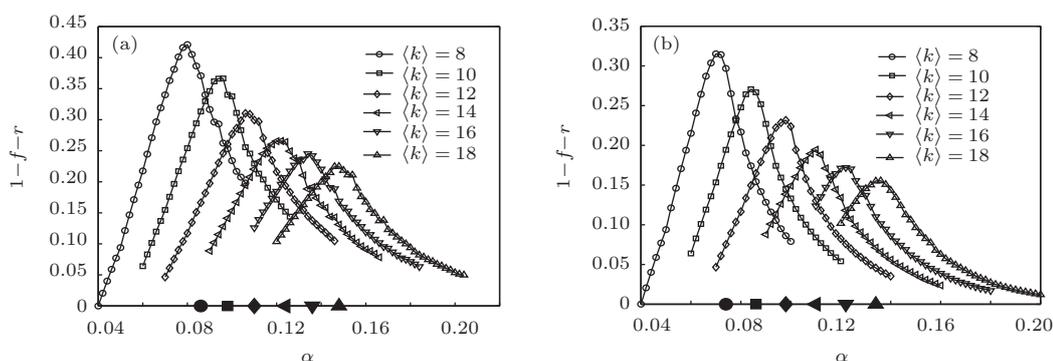


图3 BA网络稳态时活跃节点比例(横坐标是冗余系数 α ,纵坐标是稳态时活跃节点的相对数量.图中曲线上所有点都是对50次独立仿真求平均的结果.在每次仿真中,网络规模为5000, $\Delta = 0.01$.横坐标上大号实心图标标记的是由(28)式算得的疾病传播的临界冗余系数)(a) $\lambda = 0.65$; (b) $\lambda = 1.00$

可以看到,我们对疾病大规模扩散的条件的理论分析结果与仿真结果是基本吻合的.在网络平均度较高的时候,吻合度较高,在网络平均度较低的时候,存在一定的偏差(小于 Δ),理论计算的结果略微偏大.这仍然是由我们的理论推导时所做的上述假定假定导致的,我们已经说明这一假定将使得稳态时R态节点所占比例的预测值偏小,从而对使得它大于0的临界冗余系数的预测偏大.

现考虑疾病传播概率 λ 固定而冗余系数 α 从0开始逐渐增大时稳态活跃节点的相对数量将如何变化.在 α 小于上述临界冗余系数时,疾病没有扩散开来,稳态时 r 几乎为0,而失效节点的比例 f 将随 α 的增大而减小,因此剩余活跃节点的比例 $1-f-r$ 是增大的;在 α 大于上述冗余系数时,疾病开始扩散开来,稳态时 r 将随着 α 的增大而增大,而失效节点的比例 f 的变化趋势受到两个因素的影响:一, α 的增大导致 r 增大,而因感染疾病而被移除的节点会使得其邻居的负载增加,从而导致这些邻居失效的可能性增大,所以 f 有增大的趋势,二,冗余系数的增大使得节点更难失效了, f 又有减小的可能,不管怎样,不难想到, α 的增大将使得 r 以相对比较剧烈的程度增加, f 或者增加,或者以不像疾病扩散开来前那么剧烈的程度减小了,从总的效果来说,稳态时活跃节点的比例 $1-f-r$ 应该是减小的.结合这两个方面,我们可知在临界冗余系数这一点上,网络中剩余下来的活跃节点数量是最多的.图3证实了这一点.

5 结 论

本文通过对通信网络中的病毒传播与级联失效现象进行建模,研究了在计入节点负载和容量情

况下网络中爆发疾病的条件,并通过数值仿真验证了该条件.此外,定性分析和仿真结果都表明,当疾病传播速率一定而冗余系数变化时,在疾病恰好开始传播的临界点附近未感染且未失效的节点的数量是最大的,即在此点上网络处于最佳工作状态.因此给出疾病爆发的条件具有实际意义.

参考文献

- [1] Kermack M, McKendrick A 1932 *Proc. R. Soc. Lond. A* **138** 55
- [2] Bailey N T 1975 *The Mathematical Theory of Infectious Diseases and its Applications* (High Wycombe, Bucks: Charles Griffin & Company Ltd)
- [3] Liu Z, Hu B 2005 *Europhys. Lett.* **72** 315
- [4] Del Genio C I, House T 2013 *Phys. Rev. E* **88** 040801
- [5] Guo D, Trajanovski S, Van de Bovenkamp R, Wang H, Van Mieghem P 2013 *Phys. Rev. E* **88** 042802
- [6] Hernández D G, Risau-Gusman S 2013 *Phys. Rev. E* **88** 052801
- [7] Huang B, Zhao X Y, Qi K, Tang M, Do Y 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 218902 (in Chinese) [黄斌, 赵翔宇, 齐凯, 唐明, 都永海 2013 物理学报 **62** 218902]
- [8] Pastor-Satorras R, Vespignani A 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 3200
- [9] Zhou J, Liu Z, Li B 2007 *Phys. Lett. A* **368** 458
- [10] Pastor-Satorras R, Vespignani A 2005 *Handbook of graphs and networks: from the genome to the internet* (Wiley) p111
- [11] Sachtjen M, Carreras B, Lynch V 2000 *Phys. Rev. E* **61** 4877
- [12] Kinney R, Crucitti P, Albert R, Latora V 2005 *Eur. Phys. J. B* **46** 101
- [13] Cohen R, Erez K, Ben-Avraham D, Havlin S 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 4626
- [14] Huang X, Vodenska I, Havlin S, Stanley H E 2013 *Sci. Rep.* **3** 1219
- [15] Borrvall C, Ebenman B, Jonsson T 2000 *Ecol. Lett.* **3** 131

- [16] Motter A E, Lai Y C 2002 *Phys. Rev. E* **66** 065102
- [17] Xia Y, Fan J, Hill D 2010 *Physica A* **389** 1281
- [18] Goh K I, Lee D S, Kahng B, Kim D 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 148701
- [19] Hoore M, Moghimi-Araghi S 2013 *J. Phys. A: Math. Gen.* **46** 195001
- [20] Moreno Y, Gómez J, Pacheco A 2002 *Europhys. Lett.* **58** 630
- [21] Kim D H, Kim B J, Jeong H 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 025501
- [22] Lee D S, Goh, K I, Kahng B, Kim D 2004 *Physica A* **338** 84
- [23] Erdős P, Rényi A 1960 *Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci.* **5** 17
- [24] Barabási A L, Albert R 1999 *Science* **286** 509
- [25] Gross T, D'Lima C J D, Blasius B 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 208701
- [26] Shaw L B, Schwartz I B 2008 *Phys. Rev. E* **77** 066101
- [27] Dickison M, Havlin S, Stanley H E 2012 *Phys. Rev. E* **85** 066109
- [28] Saumell-Mendiola A, Serrano M Á, Boguñá M 2012 *Phys. Rev. E* **86** 026106
- [29] Funk S, Jansen V A A 2010 *Phys. Rev. E* **81** 036118
- [30] Ni S, Weng W, Zhang H 2011 *Physica A* **390** 4528
- [31] Shang Y 2013 *Int. J. Biomath.* **6** 1350007
- [32] Hu K, Hu T, Tang Y 2010 *Chin. Phys. B* **19** 080206
- [33] Schimit P, Monteiro L 2011 *Ecol. Model.* **222** 1651
- [34] Zhang H F, Yang Z, Wu Z X, Wang B H, Zhou T 2013 *Sci. Rep.* **3** 3292
- [35] Wang Z, Zhang H, Wang Z 2014 *Chaos Soliton. Fract.* **6** 1
- [36] Meloni S, Gómez-Gardeñes J 2010 *Phys. Rev. E* **82** 056105
- [37] Morris R G, Barthelemy M 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 128703
- [38] Coffman E Jr, Ge Z, Misra V, Towsley D 2002 *Proceedings of the 40th Annual Allerton Conference on Communications, Computing and Control*, Urbana, USA, October 2–4, 2002 p1
- [39] Ouyang B, Jin X, Xia Y, Jiang L, Wu D 2014 *Europhys. Lett.* **106** 28005
- [40] Jiang L, Jin X, Xia Y, Ouyang B, Wu D 2014 arXiv:1405.3009 [physics.soc-ph]
- [41] Dobson I, Carreras B A, Newman D E 2005 *Probab. Eng. Inform. Sc.* **19** 15
- [42] Sansavini G, Hajj M, Puri I, Zio E 2009 *Europhys. Lett.* **87** 48004
- [43] Ouyang B, Jin X, Xia Y, Jiang L 2014 *Eur. Phys. J. B* **87** 1
- [44] Newman M E J 2002 *Phys. Rev. E* **66** 016128
- [45] Moreno Y, Pastor-Satorras R, Vespignani A 2002 *Eur. Phys. J. B* **26** 521

Dynamic interplay between epidemics and cascades: Epidemic outbreaks in uncorrelated networks*

Ouyang Bo Jin Xin-Yu[†] Xia Yong-Xiang Jiang Lu-Rong Wu Duan-Po

(Department of Information Science and Electronic Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

(Received 14 May 2014; revised manuscript received 15 June 2014)

Abstract

Epidemics and cascades are independently studied topics in network science, but in practice, there are cases where they interact and neither of their effects can be ignored, e.g., when a digital virus spreads in a communication network that is transferring data. We have built a model to study their interplay in previous works. Here we present the epidemic threshold criteria of this model. When the infectivity is fixed, the tolerance parameter α , in capturing the capacity of nodes, must be larger than a critical value to fulfill the criteria, and at equilibrium the fraction of nodes both uninfected and un-failed is the largest at this critical point. So the the presentation of the epidemic threshold criteria is of significance.

Keywords: complex network, epidemics, cascading failure

PACS: 89.75.-k, 05.70.Jk, 05.10.-a

DOI: [10.7498/aps.63.218902](https://doi.org/10.7498/aps.63.218902)

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61174153).

[†] Corresponding author. E-mail: jinxu@zju.edu.cn