

## 光束分离器算符的分解特性与纠缠功能\*

贾芳<sup>1)2)</sup> 徐学翔<sup>2)</sup> 刘寸金<sup>2)</sup> 黄接辉<sup>2)</sup> 胡利云<sup>2)†</sup> 范洪义<sup>1)</sup>

1) (中国科学技术大学材料科学与工程系, 合肥 230026)

2) (江西师范大学, 光电子与通信重点实验室, 南昌 330022)

(2014年5月22日收到; 2014年7月4日收到修改稿)

光束分离器是量子光学中的基本线性器件之一, 它在量子纠缠态的制备与测量上起着重要作用. 基于光束分离器 (BS) 对算符的矩阵变换关系, 本文导出了 BS 算符在若干表象中的自然表示. 利用这个自然表示 (而非 SU(2) 李代数关系) 及有序算符内的积分技术, 可直接导出 BS 算符的正规乘积、紧指数表示及多种分解形式. 此外, 可直接导出一种纠缠态表象及其 Schmidt 分解. 这对于讨论连续变量量子隐形传输是十分方便的.

**关键词:** 光束分离器算符, 纠缠态表象, 有序算符内的积分技术, Schmidt 分解

**PACS:** 03.65.-w, 03.65.Ud

**DOI:** 10.7498/aps.63.220301

## 1 引言

在量子力学、量子光学理论中, 量子力学表象起着重要的作用<sup>[1]</sup>. 正如狄拉克所说<sup>[2]</sup>: 在量子力学中, 当我们需要解决一个特定的问题时, 使用一个合适的表象往往可以起到事半功倍的效果. 例如, 两粒子的质心坐标  $Q_1 + Q_2$  和相对动量  $P_1 - P_2$  是可对易算符, 其共同本征态就是一类纠缠态表象  $|\eta\rangle$ <sup>[3]</sup>. 该表象已在量子隐形传输<sup>[4]</sup>、量子密集编码<sup>[5]</sup>、经典光学与量子光学的对应研究中起着重要的作用<sup>[6]</sup>. 近年来, 越来越多的研究者致力于寻找纠缠态表象的更多新的潜在的应用<sup>[7-10]</sup>.

目前, 对于理论和实验物理学家而言, 如何构建一个完备的、有用的量子力学纠缠表象仍然是一个充满挑战的课题. 光束分离器 (beamsplitter, BS) 作为一类线性器件, 被认为是产生纠缠态的最简单的工具, 它在理解一些量子力学和量子光学的基本问题中也起着关键作用. 众所周知, 当单模压缩真空态入射到光束分离器上, 会产生双模纠缠态<sup>[11]</sup>. 将两个单模压缩真空态入射到光束分离器

上获得的双模纠缠态作为纠缠通道, 实验上可实现任意相干态的连续变量量子隐形传输<sup>[12]</sup>. 另一方面, 从表象的观点, Einstein-Podolsky-Rosen (EPR) 纠缠态表象以及参数化的纠缠态表象已被构造, 并利用表象方法实现了量子态的隐形传输<sup>[3,4]</sup>, 导出了若干算符恒等式<sup>[13]</sup>; 利用非对称的光束分离器和参量下转换过程, 提出了连续变量的三模纠缠态表象<sup>[14]</sup>. 此外, 将一系列光束分离器算符  $B_{n-1,n}(\pi/4)B_{n-2,n-1}(\cos^{-1} 1/\sqrt{3}) \cdots B_{1,2}(\cos^{-1} 1/\sqrt{n})$  作用于动量态、坐标态或真空态上, 我们可以获得多模 EPR 纠缠态和多模相干纠缠态<sup>[15]</sup>. 利用有序算符内的积分技术, 这些量子态被证明是完备的量子力学表象.

在以往的量子态或表象的制备过程中, 经常使用光束分离器算符的变换关系 (本文中 (8) 式). 但此表达式在获取量子力学表象、纠缠态 (特别是多模纠缠态表象) 的 Schmidt 分解等方面仍旧不够直接有效. 借鉴压缩算符在坐标表象的自然表示的思想<sup>[16]</sup>, 本文从表象的观点导出 BS 算符在若干表象中的自然表示. 基于此, 我们无须利用 SU(2) 李代数关系, 可直接导出 BS 算符的正规乘积、紧指数表

\* 国家自然科学基金 (批准号: 11264018)、江西省学位与研究生教育教学改革研究项目 (批准号: JXYJG-2013-027) 和江西省自然科学基金 (批准号: 20132BAB212006) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: hlyun2008@126.com

示及多种分解形式. 同时, 可直接导出若干纠缠态表象及其Schmidt分解. 这对于讨论连续变量量子隐形传输是十分方便的.

本文结构安排如下: 第二部分简要回顾量子力学中的两个基本表象及其具体表示; 第三部分, 利用BS对算符的矩阵变换关系, 导出BS算符在算符 $Q$ 和 $P$ 表象中的自然表示; 第四部分考察BS算符的表象表示的若干应用, 如直接推导BS算符的正规乘积、多种分解形式, 推导纠缠态表象的Schmidt分解等; 最后为总结部分.

## 2 量子力学 $Q, P$ 表象

算符 $Q, P$ 代表单模光场的两个正交分量, 它与量子光场的电场分量密切相关, 不是通常的坐标和动量. 有时为了方便, 文中将 $Q, P$ 称为坐标、动量算符. 为了获得光束分离器算符在表象中的表示, 我们简要回顾一下坐标与动量本征态的明显形式. 对于量子光学系统, 可引入光子的产生算符 $a^+$ 和湮灭算符 $a$ 来描述系统, 有 $a|0\rangle = 0$ . 注意到湮灭算符与正交算符 $Q, P, [Q, P] = i$ 的变换关系(为方便取 $\hbar = 1$ )

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\sqrt{2}}(Q + iP), \\ a^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(Q - iP), \quad [a, a^+] = 1. \end{aligned} \quad (1)$$

为了获得算符 $Q, P$ 的本征态, 我们利用有序算符内的积分技术<sup>[16]</sup>, 构建积分等式

$$1 = : \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dq \exp\{-(q - Q)^2\} :. \quad (2)$$

注意到, 这里符号 $:$ 表示正规乘积, 在正规乘积内, 算符是可对易的, 即 $a^+a = :aa^+ :$ . 利用(1)式可将(2)式改写为

$$\begin{aligned} 1 &= : \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dq \exp\{-(q - Q)^2\} : \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} : \int_{-\infty}^{\infty} dq \exp\left\{-q^2 + \sqrt{2}qa^+ + \sqrt{2}qa - \frac{a^+2}{2} - \frac{a^2}{2} - a^+a\right\} : \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} : \int_{-\infty}^{\infty} dq \exp\left\{-\frac{q^2}{2} + \sqrt{2}qa^+ - \frac{a^+2}{2}\right\} : e^{-a^+a} : \\ &\quad \times \exp\left\{-\frac{q^2}{2} + \sqrt{2}qa - \frac{a^2}{2}\right\} \end{aligned}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dq |q\rangle \langle q|, \quad (3)$$

其中, 我们利用到了真空投影算符的正规乘积表示 $|0\rangle\langle 0| =: \exp\{-a^+a\} :$ . 由(3)式可得

$$|q\rangle = \pi^{-1/4} \exp\left\{-\frac{1}{2}q^2 + \sqrt{2}qa^+ - \frac{a^+2}{2}\right\} |0\rangle. \quad (4)$$

可以证明, 态矢量 $|q\rangle$ 就是算符 $Q$ 的本征态, 即注意到

$$\begin{aligned} a|q\rangle &= \pi^{-1/4} a \exp\left\{-\frac{1}{2}q^2 + \sqrt{2}qa^+ - \frac{a^+2}{2}\right\} |0\rangle \\ &= \pi^{-1/4} [a, \exp\left\{-\frac{1}{2}q^2 + \sqrt{2}qa^+ - \frac{a^+2}{2}\right\}] |0\rangle \\ &= (\sqrt{2}q - a^+) |q\rangle, \end{aligned} \quad (5)$$

则有 $Q|q\rangle = q|q\rangle$ .

同理, 利用有序算符内的积分技术, 可以引入积分关系

$$\begin{aligned} 1 &= : \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dp \exp\{-(p - P)^2\} : \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dp |p\rangle \langle p|, \end{aligned} \quad (6)$$

由此可得算符 $P$ 的本征态为<sup>[16]</sup>

$$|p\rangle = \pi^{-1/4} \exp\left\{-\frac{1}{2}p^2 + i\sqrt{2}pa^+ + \frac{a^+2}{2}\right\} |0\rangle, \quad P|p\rangle = p|p\rangle. \quad (7)$$

应该指出的是, 通过正规乘积内的积分技术, 我们构建的积分关系式(2)(或(6))实际上对应于坐标(动量)态的完备性, 这是作为量子力学表象所必须具备的性质. 因此, 有序算符内积分技术也可寻找完备的量子力学表象提供一种新的途径.

## 3 光束分离器算符的 $Q, P$ 表象表示

无损失光束分离器是一个线性的四端口器件, 如图1所示.  $a, b$ 表示输入模,  $c, d$ 表示输出模. 光束分离器的输入输出关系为

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (8)$$

其中,  $M$  是一个幺正变换矩阵. 为了方便, 这里忽略了位相因子项, 因为位相项可以通过对输入输出模位相的重新定义来消去<sup>[17]</sup>.  $r = \sin^2 \theta$ ,  $t = \cos^2 \theta$ , 分别为光束分离器的反射和投射率,  $r + t = 1$  保证了能量守恒.

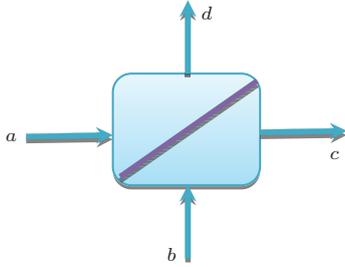


图1 光束分离器的示意结构

注意到变换关系(8)式, 我们可引入幺正算符  $B$  使得存在如下变换

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} B^+ = M \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad (9)$$

则在 Schrodinger 绘景中态矢量  $|\psi\rangle$  的变换则为

$$|\psi\rangle_{\text{out}} = B^+ |\psi\rangle_{\text{in}}, \quad (10)$$

相应的模算符保持不变. 这可以用图2形象地描述.

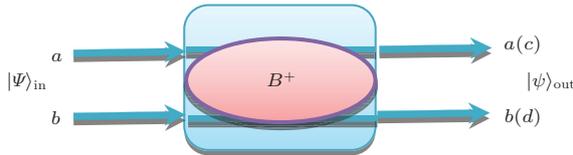


图2 Schrodinger 绘景下光束分离器对态矢量的演化

利用(19)式可得

$$B(\theta) \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} B^+(\theta) = M \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

其中  $Q_1, Q_2$  分别定义为  $a, b$  模的坐标算符  $Q_1 = (a + a^+)/\sqrt{2}$ ,  $Q_2 = (b + b^+)/\sqrt{2}$ . 将(11)式从左作用于态矢量  $B|q_1\rangle|q_2\rangle$  上,  $|q_1\rangle, |q_2\rangle$  为  $a, b$  模的坐标算符本征态, 则有

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} B|q_1\rangle|q_2\rangle = M \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} B|q_1\rangle|q_2\rangle, \quad (12)$$

即

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} \{B|q_1\rangle|q_2\rangle\} \\ &= M^{-1} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \{B|q_1\rangle|q_2\rangle\}. \end{aligned} \quad (13)$$

可见,  $B|q_1\rangle|q_2\rangle$  是算符  $Q_1, Q_2$  的共同本征态, 本征值分别为  $q'_1, q'_2$ , 即

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} q'_1 \\ q'_2 \end{pmatrix} &= M^{-1} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \equiv N \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}, \\ N &= M^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (14)$$

故而  $B|q_1\rangle|q_2\rangle$  可表示成

$$B|q_1\rangle|q_2\rangle = \left| N \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \right\rangle. \quad (15)$$

这里  $\left| \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \right\rangle \equiv |q_1\rangle|q_2\rangle$  定义为双模坐标态.

利用坐标态的完备性关系(3)立即可得

$$\begin{aligned} B(\theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} dq_1 dq_2 \left| \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \right\rangle \left\langle \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \right|, \end{aligned} \quad (16)$$

此即光束分离器算符在坐标  $Q$  表象中的表示.

类似地,  $B(\theta)$  在动量  $P$  表象中的表示为

$$\begin{aligned} B(\theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} dp_1 dp_2 \left| \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \right\rangle \left\langle \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \right|, \end{aligned} \quad (17)$$

其中,  $\left| \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \right\rangle \equiv |p_1\rangle|p_2\rangle$  为双模动量算符本征态,  $P_i|p_i\rangle = p_i|p_i\rangle, i = 1, 2$ .

#### 4 光束分离器算符的 $Q, P$ 表象表示的应用

下面, 我们将考察光束分离器算符的  $Q(P)$  表象表示的若干应用, 如直接推导 BS 算符的正规乘

积、多种分解形式, 推导纠缠态表象的Schmidt分解等.

### 4.1 BS算符的正规乘积与紧指数表示

有了光束分离器算符的表象表示, 结合有序算符内的积分(IWOP)技术, 可方便有效地获得算符的正规乘积形式, 而不是利用SU(2)李代数方法.

注意坐标态的表达式(4), 以及真空投影算符的正规乘积表示 $|00\rangle\langle 00| =: e^{-a^+a-b^+b} :$ , 利用IWOP技术积分(16)式可得

$$\begin{aligned}
 B(\theta) &= \frac{1}{\pi} : \int_{-\infty}^{\infty} dq_1 dq_2 \exp \left\{ -q_1^2 \right. \\
 &\quad + \sqrt{2}q_1(a^+ \cos \theta + b^+ \sin \theta + a) \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2}(a + a^+)^2 \right\} \\
 &\quad \times \exp \left\{ -q_2^2 + \sqrt{2}q_2(b^+ \cos \theta \right. \\
 &\quad \left. - a^+ \sin \theta + b) - \frac{1}{2}(b + b^+)^2 \right\} : \\
 &= : \exp \{ (\cos \theta - 1)(a^+a + b^+b) \\
 &\quad + (ab^+ - a^+b) \sin \theta \} :, \quad (18)
 \end{aligned}$$

此即BS算符的正规乘积形式. 显然,

$$B^+(\theta)|00\rangle = |00\rangle. \quad (19)$$

利用(18)式对参数 $\theta$ 求导可得

$$\begin{aligned}
 &\frac{\partial}{\partial \theta} B(\theta) \\
 &= : -a^+aN_B \sin \theta : - : b^+bN_B \sin \theta : \\
 &\quad + : ab^+N_B \cos \theta : - : a^+bN_B \cos \theta : \\
 &= -a^+ \sin \theta : N_B : a - b^+ \sin \theta : N_B : b \\
 &\quad + b^+ \cos \theta : N_B : a - a^+ \cos \theta : N_B : b \\
 &= -a^+ \sin \theta Ba - b^+ \sin \theta Bb \\
 &\quad + b^+ \cos \theta Ba - a^+ \cos \theta Bb \\
 &= [(-a^+ \sin \theta + b^+ \cos \theta)\{BaB^+\} \\
 &\quad - (b^+ \sin \theta + a^+ \cos \theta)\{BbB^+\}]B, \quad (20)
 \end{aligned}$$

其中,  $N_B$  为  $B(\theta)$  的正规乘积表示. 进一步利用(9)式可得

$$\frac{\partial}{\partial \theta} B(\theta) = (ab^+ - a^+b)B(\theta). \quad (21)$$

由此可得BS算符的紧致表示形式为

$$B(\theta) = \exp[\theta(ab^+ - a^+b)]. \quad (22)$$

### 4.2 BS算符的若干分解

下面, 我们进一步考察BS算符的若干分解, 以便深入理解BS算符. 注意到, 当 $\theta \neq \pi/2$ , 即非完全透射情况, 矩阵 $N$ 可分解成<sup>[18]</sup>

$$\begin{aligned}
 N &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \tan \theta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 \\ 0 & \sec \theta \end{pmatrix} \\
 &\quad \times \begin{pmatrix} 1 - \tan \theta & \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv N_1 N_2 N_3. \quad (23)
 \end{aligned}$$

因此, 利用坐标态的正交关系, 有

$$\begin{aligned}
 &\int_{-\infty}^{\infty} dq_1 dq_2 \left| J J' \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \right\rangle \left\langle \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \right| \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} dq_1 dq_2 \left| J \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \right\rangle \left\langle \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \right| \\
 &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} dq'_1 dq'_2 \left| J' \begin{pmatrix} q'_1 \\ q'_2 \end{pmatrix} \right\rangle \left\langle \begin{pmatrix} q'_1 \\ q'_2 \end{pmatrix} \right|, \quad (24)
 \end{aligned}$$

则可将BS算符分解成如下形式

$$B(\theta) = B_{N_1} B_{N_2} B_{N_3}, \quad (25)$$

其中

$$\begin{aligned}
 B_{N_j} &= \int_{-\infty}^{\infty} dq_1 dq_2 \left| N_j \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \right\rangle \left\langle \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \right| \\
 &\quad (j = 1, 2, 3). \quad (26)
 \end{aligned}$$

利用坐标表象的完备性及坐标态平移算符<sup>[19]</sup>

$$\begin{aligned}
 \exp\{iyP\}|\mathbf{q}\rangle &= |\mathbf{q} - y\rangle, \\
 \exp\{-iyQ\}|p\rangle &= |p - y\rangle, \quad (27)
 \end{aligned}$$

可将 $B_{N_1}$ ,  $B_{N_3}$ 表示为

$$\begin{aligned}
 B_{N_1} &= \int_{-\infty}^{\infty} dq_1 dq_2 \exp\{-iq_1 \tan \theta P_2\} \\
 &\quad \left| \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \right\rangle \left\langle \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \right| \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} dq_1 dq_2 \exp\{-iQ_1 P_2 \tan \theta\} \\
 &\quad \left| \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \right\rangle \left\langle \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \right| \\
 &= \exp\{-iQ_1 P_2 \tan \theta\}, \quad (28)
 \end{aligned}$$

$$B_{N_3} = \exp\{iQ_2 P_1 \tan \theta\}. \quad (29)$$

不难看出,  $B_{N_1}$  和  $B_{N_3}$  是双模压缩算符.

注意到单模压缩算符在坐标表象中的自然表示<sup>[16]</sup>,

$$S(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{\sqrt{\mu}} \left| \frac{q}{\mu} \right\rangle \langle q| = \exp \left\{ \frac{\lambda}{2} (a^2 - a^{+2}) \right\} \quad \mu = e^\lambda, \quad (30)$$

可知  $B_{N_2}$  恰好就是两个单模压缩算符的直积 (压缩参数位相差  $\pi$ ), 即

$$B_{N_2} = S_a(\lambda_1) S_b(-\lambda_1) \quad \lambda_1 = \ln \sec \theta. \quad (31)$$

可见, 利用光束分离器算符的表象表示, 我们可以方便地将其分解成两个单模压缩算符和两个双模压缩算符的形式:

$$B(\theta) = \exp\{-iQ_1 P_2 \tan \theta\} S_a(\lambda_1) S_b(-\lambda_1) \times \exp\{iQ_2 P_1 \tan \theta\} \quad (\lambda_1 = \ln \sec \theta). \quad (32)$$

另一方面, 当  $\theta \neq 0$ , 即非完全反射情况, 矩阵  $N$  可分解成<sup>[18]</sup>

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \tan(\theta/2) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \sin \theta & \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \tan(\theta/2) & 1 \end{pmatrix}. \quad (33)$$

类似可得光束分离器算符的另一等价的分解形式:

$$B(\theta) = \exp\{-iQ_1 P_2 \tan(\theta/2)\} \times \exp\{-iQ_2 P_1 \sin \theta\} \times \exp\{-iQ_1 P_2 \tan(\theta/2)\}, \quad (34)$$

即三个双模压缩算符乘积. 此外, 我们还可将矩阵  $N$  分解成其他形式, 获得 BS 算符的其他分解形式.

### 4.3 纠缠态表象及其 Schmidt 分解

光束分离器常常用于量子测量、量子干涉以及模拟量子耗散、产生纠缠态等. 最近, 高透射、低反射的光束分离器被用于改善纠缠态的纠缠度. 理论上, BS 也成为了获得双模、多模纠缠态的主要器件. 近年来, 不少作者利用 BS 来产生有用的纠缠态表象, 有了各种不同的表象, 我们不但可以利用它推导出若干算符恒等式, 丰富算符的数理基础, 而且可使得思维方式可以多样化. 这里, 我们考虑 BS 算符的表象表示在获得纠缠态表象中的应用.

当  $a, b$  输入端输入的量子态分别坐标态和动量态, 即  $|\psi_{in}\rangle = |q\rangle_a |p\rangle_b$ . 利用变换关系式 (9), 坐标、

动量态的表达式 (3) 和 (7), 可知经过 BS 作用后输出态为

$$\begin{aligned} |\psi_{out}\rangle &= B^+ |q\rangle_a |p\rangle_b \\ &= \pi^{-1/2} B^+ \exp \left\{ -\frac{1}{2} |\eta|^2 + \sqrt{2} (qa^+ + ipb^+) - \frac{a^{+2} - b^{+2}}{2} \right\} B |00\rangle \\ &= \pi^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} |\eta|^2 + \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \theta + \sin \theta) (\eta a^+ - \eta^* b^+) + \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \theta - \sin \theta) (\eta^* a^+ + \eta b^+) + a^+ b^+ \sin 2\theta - \frac{1}{2} (a^{+2} - b^{+2}) \cos 2\theta \right\} |00\rangle, \quad (35) \end{aligned}$$

其中  $\eta = q + ip$ . 当  $\theta = \pi/4$  时, 即 50 : 50 BS 情况, 上式即 EPR 纠缠态<sup>[3]</sup>. 由 (35) 式中第三式以及有序算符内的积分技术容易证明,  $|\psi_{out}\rangle$  是正交完备的, 即

$$\begin{aligned} &\int d^2 \eta |\psi_{out}\rangle \langle \psi_{out}| \\ &= : \int \frac{d^2 \eta}{\pi} \exp \left\{ -|\eta|^2 + \frac{\cos \theta + \sin \theta}{\sqrt{2}} \times [\eta(a^+ - b) + \eta^*(a - b^+)] + \frac{\cos \theta - \sin \theta}{\sqrt{2}} [\eta(a + b^+) + \eta^*(a^+ + b)] - a^+ a - b^+ b + (a^+ b^+ + ab) \sin 2\theta - \frac{1}{2} (a^{+2} - b^{+2} + a^2 - b^2) \cos 2\theta \right\} : \\ &= : e^0 := 1, \quad (36) \end{aligned}$$

这里利用了积分公式

$$\int \frac{d^2 z}{\pi} e^{-\alpha |z|^2 + bz + cz^*} = \frac{1}{\alpha} \exp \left( \frac{bc}{\alpha} \right). \quad (37)$$

另一方面, 利用相干态的完备性关系, (35) 式中第三式和积分公式

$$\int \frac{d^2 z}{\pi^2} e^{z\alpha^* - z^*\alpha} = \delta(\alpha) \delta(\alpha^*), \quad (38)$$

以及

$$\begin{aligned} &\int \frac{d^2 \alpha}{\pi} \exp(-a|b|^2 + b\alpha + b^* \alpha^* + c\alpha^2 + c^* \alpha^{*2}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2 - 4|c|^2}} \exp \left\{ \frac{a|b|^2 + cb^{*2} + c^* b^2}{a^2 - 4|c|^2} \right\}, \quad (39) \end{aligned}$$

经过较长但直接的过程我们证明了正交关系

$$\begin{aligned} & \langle \psi_{\text{out}} | \psi'_{\text{out}} \rangle \\ &= \frac{e^{-\frac{1}{2}|\eta'|^2 - \frac{1}{2}|\eta|^2}}{\pi} \int \frac{d^2 z_1}{\pi} \\ & \times \exp \left\{ -|z_1|^2 + z_1(D + z_2 \sin 2\theta) \right. \\ & \left. + z_1^*(D' + z_2^* \sin 2\theta) \right. \\ & \left. - \frac{1}{2}(z_1^2 + z_1^{*2}) \cos 2\theta \right\} \\ & \times \int \frac{d^2 z_2}{\pi} \exp \left\{ -|z_2|^2 + Az_2 + z_2^* A' \right. \\ & \left. + \frac{1}{2}(z_2^2 + z_2^{*2}) \cos 2\theta \right\} \\ &= \delta(\eta - \eta') \delta(\eta^* - \eta'^*), \end{aligned} \quad (40)$$

其中

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \theta - \sin \theta)\eta^* \\ & \quad - \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \theta + \sin \theta)\eta, \\ A' &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \theta - \sin \theta)\eta' \\ & \quad - \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \theta + \sin \theta)\eta'^*, \\ D &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \theta + \sin \theta)\eta^* \\ & \quad + \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \theta - \sin \theta)\eta, \\ D' &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \theta + \sin \theta)\eta' \\ & \quad + \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \theta - \sin \theta)\eta'^*. \end{aligned} \quad (41)$$

且  $|\psi_{\text{out}}\rangle$  为可对易算符  $Q_1 \cos \theta - Q_2 \sin \theta$ ,  $P_1 \sin \theta + P_2 \cos \theta$  的共同本征态:

$$\begin{aligned} & (Q_1 \cos \theta - Q_2 \sin \theta) |\psi_{\text{out}}\rangle \\ &= -\sqrt{2}q \sin \theta |\psi_{\text{out}}\rangle, \\ & (P_1 \sin \theta + P_2 \cos \theta) |\psi_{\text{out}}\rangle \\ &= \sqrt{2}p \cos \theta |\psi_{\text{out}}\rangle. \end{aligned} \quad (42)$$

利用BS算符的表象表示, 可得  $|\psi_{\text{out}}\rangle$  在坐标、动量空间中的Schmidt分解分别为

$$\begin{aligned} |\psi_{\text{out}}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dq_2 e^{ipq_2} |q \cos \theta \\ & \quad + q_2 \sin \theta\rangle_a |q_2 \cos \theta - q \sin \theta\rangle_b, \\ |\psi_{\text{out}}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dp_1 e^{-ip_1 q} |p_1 \cos \theta \end{aligned}$$

$$+ p \sin \theta\rangle_a |p \cos \theta - p_1 \sin \theta\rangle_b. \quad (43)$$

当  $\theta \in (0, \pi/2)$ , 态矢量总是不可分成两个独立纯态的直积. 这表明,  $|\psi_{\text{out}}\rangle$  是一类纠缠态, 即当坐标态和动量态作为BS的输入时, 输出态总是纠缠的. 当坐标态作为两端输入态时, 由(16)式可知输出态仍然是坐标态的直积态. 可见, 当两个输入态均为任意量子态, 输出态不一定总是纠缠的.

## 5 结 论

本文基于光束分离器通常的输入与输出的模间变换关系, 在坐标表象和动量表象中, 我们导出了光束分离器算符的自然表示. 利用该算符的自然表示以及有序算符内的积分技术, 而非SU(2)李代数关系, 简洁地推导出了该光束分离器算符的正规乘积形式、紧指数表示. 特别地, 利用BS算符的自然表示以及坐标或动量本征态的正交关系, 我们可以直接将BS算符进行多种形式的分解, 如BS算符可分解成三个双模压缩算符的乘积等. 这有助于输入理解BS算符的纠缠特点. 此外, BS算符的自然表示也被直接应用于推导有用的纠缠态表象及其Schmidt分解. 这对于讨论连续变量量子隐形传输是十分方便的.

## 参考文献

- [1] Louisell W H 1990 *Quantum Statistical Properties of Radiation* (New York: Wiley)
- [2] Dirac P A M 1958 *The Principle of Quantum Mechanics* (4th Ed.) (Oxford: Oxford University Press)
- [3] Fan H Y, Ye X 1995 *Phys. Rev. A* **51** 3343
- [4] Fan H Y 2002 *Phys. Lett. A* **294** 253
- [5] Fan H Y, Liang X T 2001 *Phys. Lett. A* **291** 61
- [6] Fan H Y, Hu L Y 2012 *Front. Phys.* **7** 261
- [7] Liang B L, Wang J S, Meng X G, Yang Q Y 2013 *Chin. Phys. B* **22** 016804
- [8] Yuan H C, Li H M, Xu X F 2013 *Chin. Phys. B* **22** 060301
- [9] Yu H J, Zhong G B, Ma J G, Ren G 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 134205 (in Chinese) [余海军, 钟国宝, 马建国, 任刚 2013 物理学报 **62** 134205]
- [10] Wang S J, Ma S J 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 030302 (in Chinese) [王淑静, 马善钧 2011 物理学报 **60** 030302]
- [11] Aharonov Y 1966 *Ann. Phys. (NY)* **39** 498
- [12] van Loock P, Braunstein S L 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 3482
- [13] Zheng K M, Liu S Y, Zhang H L, Liu C J, Hu L Y 2014 *Front. Phys.* **9** 451
- [14] Hu L Y, Fan H Y 2006 *J. Phys. A: Math. Gen.* **39** 14133
- [15] Hu L Y, Fan H Y 2009 *Int. J. Mod. Phys. A* **24** 2689

- [16] Fan H Y 1997 *Representation and Transformation Theory in Quantum Mechanics* (Shanghai: Shanghai Scientific and Technical Publisher) (in Chinese) p27 [范洪义 1997 量子力学表象与变换论——狄拉克符号法进展 (上海: 上海科技出版社) p27]
- [17] Leonhardt U 1993 *Phys. Rev. A* **48** 3265
- [18] Wang S M, Zhao D M 2000 *Matrix Optics* (Beijing: China Higher Education Press)
- [19] Hu L Y, Fan H Y 2010 *Int. J. Mod. Phys. B* **24** 1271

## Decompositions of beam splitter operator and its entanglement function\*

Jia Fang<sup>1)2)</sup> Xu Xue-Xiang<sup>2)</sup> Liu Cun-Jin<sup>2)</sup> Huang Jie-Hui<sup>2)</sup>  
Hu Li-Yun<sup>2)†</sup> Fan Hong-Yi<sup>1)</sup>

1) (Department of Material Science and Engineering, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China)

2) (Key Laboratory of Optoelectronic and Telecommunication, Jiangxi Normal University, Nanchang 330022, China)

( Received 22 May 2014; revised manuscript received 4 July 2014 )

### Abstract

Beam splitter (BS) is a basic linear element in quantum optics, which plays an important role in preparation of entangled states and quantum measurement. On the basis of the transformation relation between operators at input ports and output ports, we derive the natural representations in different representations. Using the natural expression rather than SU(2) Lie algebra relation, as well as the technique of integration within ordered product (IWOP) of operator, we can conveniently and concisely derive the normally ordering form and exponential expression of BS operator. Many forms of decompositions for BS operator can also be directly obtained by its natural representation and the orthogonality of coordinate states. Furthermore, the entangled state representation and corresponding Schmidt decomposition can be conveniently obtained.

**Keywords:** beam splitter operator, entangled state representation, IWOP technique, Schmidt decomposition

**PACS:** 03.65.-w, 03.65.Ud

**DOI:** 10.7498/aps.63.220301

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11264018), the Academic Degree and Postgraduate Education Foundation of Jiangxi Province of China (Grant No. JXYJG-2013-027), and the Natural Science Foundation of Jiangxi Province of China (Grant No. 20132BAB212006).

† Corresponding author. E-mail: [hlyun2008@126.com](mailto:hlyun2008@126.com)