

带有层级结构的复杂网络级联失效模型*

袁铭†

(天津财经大学理工学院统计系, 天津 300222)

(2014年5月12日收到; 2014年7月15日收到修改稿)

针对现实世界的网络中普遍存在的层级结构建立一个级联失效模型, 该模型可用于优化金融、物流网络设计. 选择的层级网络模型具有树形骨架和异质的隐含连接, 并且骨架中每层节点拥有的分枝数服从正态分布. 级联失效模型中对底层节点的打击在不完全信息条件下进行, 也即假设打击者无法观察到隐含连接. 失效节点的负载重分配考虑了层级异质性, 它可以选择倾向于向同级或高层级完好节点分配额外负载. 仿真实验表明, 层级网络的拓扑结构随连接参数变化逐渐从小世界网络过渡到随机网络. 网络级联失效规模随隐含连接比例呈现出先增加后降低的规律. 负载重分配越倾向于高层级节点, 网络的抗毁损性越高. 同时, 由于连接参数会改变隐含连接在不同层级之间的分布, 进而对网络的抗毁损性产生显著影响, 为了提高网络抗毁损能力, 设计网络、制定管理控制策略时应合理设定连接参数.

关键词: 复杂网络, 级联失效, 层级结构

PACS: 05.10.-a, 64.60.aq, 89.75.-k, 89.75.Hc

DOI: 10.7498/aps.63.220501

1 引言

现实世界中几乎所有复杂系统都可以视为网络. 网络中存在大量的具有复杂连接关系的节点. 自从 Watts 和 Strogatz^[1] 以及 Barabasi 和 Albert^[2] 开创性的研究工作以来, 学界将复杂网络广泛用于金融市场^[3,4]、社交网络^[5,6]、互联网^[7]、交通网^[8,9] 建模, 并利用拓扑结构挖掘系统的复杂性特征和演化过程. 随着复杂网络研究的兴起, 人们开始思考这样一个问题: 这些网络是否可靠? 近年来大规模网络失效事件频现, 例如 2003 年美国大规模停电事件, 2006 年由海底光缆中断导致的网络瘫痪, 2008 年次贷危机后出现的银行倒闭潮等. 这使得复杂网络的抗毁损性研究的理论意义和应用价值凸显. Albert 等^[10] 研究了不同度分布的复杂网络抗毁损性问题, 但实际网络具有显著的动态特征, 当节点失效后会引发网络拓扑结构发生改变, 节点负载会在网络内重新分配, 从而使网络整体负载处于非平衡状态, 导致更大规模的节点失效, 这就

是所谓的级联失效现象. Motter 和 Lai^[11] 首次研究了无标度网络的级联失效问题, 提出了 ML 模型, 发现在面对级联失效时无标度网络是相当脆弱的, 移除负载最大的节点足以瘫痪整个网络. 后续的研究将这一分析框架拓展到小世界网络^[12]、自治网络、加权网络^[13,14]、有向网络等, 提出了不同的初始负载分配方法、打击策略以及失效节点负载重分配方法^[15,16]. 但现实中的网络, 例如因特网、物流网、金融系统中的节点通常具有类似于组织结构的层级隶属关系^[17,18], 网络的拓扑结构也具有明显的异质性. 目前对于这种网络在面临级联失效时的抗毁损性研究非常有限. 因此本文尝试建立针对具有层级结构网络的级联失效模型, 模型框架选用 Dobbs, Watts 和 Sabel 提出的组织结构网^[19] (下文称为 DWS 网络), 该网络既含有规则的树形“骨架”又含有随机的“隐含连接”, 并且具有多尺度特性, 也即可以通过调节连接参数得到拓扑性质截然不同的网络, 具有高度灵活性. 但 DWS 网络中节点的分支数是固定的, 因此本文尝试对该网络进行

* 国家自然科学基金 (批准号: 71103126) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: yuanmingtianjin@163.com

改进, 令“骨架”中每一层的分支数也是随机的, 更加突出网络结构的非均匀性, 也符合现实世界中网络的特征. 本文给出的级联失效模型是基于多点打击的, 并且充分考虑了网络具有的层级结构. 例如初始负载分配是基于节点重要性的全局度量的; 引入层级均匀参数使得失效节点负载重分配不仅考虑近邻节点的容量, 还考虑了层级的异质性. 同时, 本文假设打击者无法了解网络的拓扑结构, 只能观察到DWS网络的“骨架”而无法观察到“隐含连接”. 这属于不完全信息下的打击策略, 打击效果介于随机失效和恶意攻击之间, 更符合实际情况. 综上所述, 与已有研究相比, 本文构建的模型框架特别适合描述金融系统、物流网、交通网等含有明显层级结构网络的级联失效过程, 得出的结论可用于改善此类型网络的抗毁损能力, 也是对无标度网络或小世界网络级联失效模型的扩展.

2 DWS网络及其改进

DWS网络具有一个 L 层树形结构的“骨架”, 每一层的节点(父节点)拥有 b 个分支(子节点), 因此网络具有 $N = (b^L - 1)/(b - 1)$ 个节点, 每一层具有 b^L 个节点, $L = 0, \dots, L - 1$. 在生成“骨架”后还需要随机添加 m 条边, 称之为隐含连接, 添加连接的算法是任意选择两个节点 i 和 j , 依概率 $P(i, j)$ 将二者相连. $P(i, j)$ 取决于节点 i 和 j 最近共同祖先 a_{ij} 的深度 D_{ij} 以及它们各自的深度 d_i 和 d_j (如图1), 最终 $P(i, j)$ 的表达式为

$$P(i, j) \propto e^{-D_{ij}/\lambda} \cdot e^{-x_{ij}/\xi}, \quad (1)$$

其中 $x_{ij} = (d_i^2 + d_j^2 - 2)^{1/2}$, λ 和 ξ 是两个可调整参数. 当 λ 和 ξ 取不同值时, 网络会产生不同的拓扑

结构, 例如 $(\lambda, \xi) \rightarrow (\infty, \infty)$ 时 i 和 j 的连接是随机的; 当 $(\lambda, \xi) \rightarrow (\infty, 0)$ 时连接更多发生在具有相同父节点的子节点之间; 当 $(\lambda, \xi) \rightarrow (0, 0)$ 时连接更多地发生在顶层(0层)节点的直属子节点之间; 当 $(\lambda, \xi) \rightarrow (0, \infty)$ 时连接更多地发生在具有不同父节点的子节点之间. 上述四种 λ 和 ξ 的参数组合属于极端情况, 现实中一般情况下 λ 和 ξ 都是介于0与 ∞ 之间. 表1给出了通过模拟计算得到的三层DWS网络中不同层级(底层、中层、顶层)之间隐含连接的分布情况. 不难看出, 隐含连接分布是异质的, 并且 λ 和 ξ 对隐含连接分布的影响主要表现在底层与中层以及中层之间, 对底层节点之间的隐含连接影响微弱.

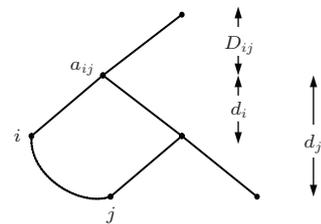


图1 隐含连接示意图

DWS网络中每个父节点拥有的子节点数量是相同的, 而实际情况可能并非如此. 物流网络中受覆盖面积和业务量的影响, 省级单位下属的网点数差异很大, 例如某快递公司在北京、上海、天津拥有的网点数分别为147家、119家和47家. 因此本文对DWS网络进行改进, 认为父节点拥有的子节点数也是随机的, 服从正态分布 $N(b, \sigma_b^2)$, σ_b 代表子节点数的离散程度, 这进一步增加了网络拓扑结构的异质性.

表1 三层DWS网络中隐含连接在不同层级的分布

连接参数	底层之间	底层与中层	底层与顶层	中层之间
$\lambda = 0.4, \xi = 0.8$	0.6002	0.2678	0.0220	0.1100
$\lambda = 0.6, \xi = 0.6$	0.5776	0.2180	0.0234	0.1810
$\lambda = 0.8, \xi = 0.4$	0.6025	0.0933	0.0117	0.2925

3 DWS网络级联失效模型

3.1 节点的初始负载分配与节点容量

在级联失效模型中, 初始负载分配是基于节点重要性的^[20]. 在已有的研究中, 大多将节点 i 的初

始负载定义为 $L_i = ak_i^\alpha$, a 和 α 是调整参数, 也即初始负载基于节点的度中心度分配, 这是一种局部度量. 由于DWS网络具有层级结构, 基于度中心度分配初始负载是不恰当的, 顶层节点显然处于最重要的地位, 但它的度却不一定是最大的. 另一些研究^[12]将初始负载按照节点的介数中心度分配,

所谓介数是指网络中节点 j 与 k 之间经过节点 i 的最短路径条数. 这是一种对节点重要性的全局度量方法, 但根据 DWS 网络的定义, 可知其底层节点介数大多数情况下会是 0, 这为初始负载分配带来不便. 因此本文将节点初始负载根据节点的子图中心度进行分配 $L_i = C_s(i)$. 子图中心度也是对节点重要性的全局度量, 其定义为 $C_s(i) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(i)/k!$, 其中 $T_k(i)$ 表示经过节点 i 的长度为 k 的闭合环路条数. 可以严格证明 $C_s(i) = e^{\lambda_i}$, λ_i 是网络邻接矩阵节点 i 对应的特征值 [21]. 节点容量的确定则根据 ML 模型, 假设容量 C_i 与初始负载成正比, 即 $C_i = L_i(1 + \gamma)$, γ 为容限系数.

3.2 不完全信息下 DWS 网络打击策略

复杂网络通常面临两种打击: 随机失效 (failure) 和选择性打击 (attack). 所谓随机失效, 就是网络节点以某种概率被随机破坏; 所谓选择性打击, 就是网络节点按一定的策略被破坏, 这通常需要获得网络的拓扑结构信息, 例如网络中各节点的重要性. 一般来说, 网络自身原因引起的损伤属于随机失效, 而蓄意的破坏则属于选择性打击. 从攻击信息角度来看, 随机失效和选择性攻击等价于零信息攻击和完全信息攻击. 但在现实世界的复杂网络中, 这两种属于极端情况, 我们面临更多的情况是不完全信息攻击, 即部分信息已知, 部分信息未知. 文献 [22] 将复杂网络攻击信息的获取抽象成为无放回的不等概率抽样问题, 并证明攻击信息精度对网络抗毁损性有至关重要的作用.

本文采用的打击策略属于不完全信息条件下的选择性打击策略, 并且一次性打击多个节点 (称为攻击区域). 假设打击者可以观测到网络的“骨架”但无法观测到节点之间的隐含连接, 也即不完全信息体现在网络的拓扑结构上. 为了确定攻击区域中应包含哪些节点, 这里我们再假设攻击行为从网络最底层开始, 因为高层节点拥有更大的负载容量, 因此具有更高的抗毁损性. 由于网络“骨架”具有树形结构, 为了使父节点级联失效概率最大, 攻击行为应针对隶属于同一父节点的底层节点. 同时, 打击者无法观测到隐含连接, 他只能先验地认为“骨架”中度较小的节点抗毁损能力弱, 因此攻击区域应该确定为拥有底层节点数量最少的父节点, 并且按照一定比例 (称为打击比例) 随机选取一部分底层节点进行打击, 打击比例 p 是可调整参数.

图 2 给出了一个三层 DWS 网络的攻击区域和受到攻击节点示意图, 其中打击比例 $p=0.5$.

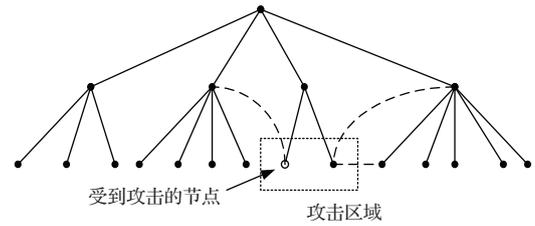


图 2 不完全信息下的打击策略

不完全信息的影响还表现在对底层节点首轮打击的成功率上. 隐含连接的存在使得底层节点的初始负载和容量不同, 打击者只能通过初始负载和容量进行估计确定打击强度, 这必然会使对一部分节点的打击失效.

3.3 负载重分配算法

当节点失效后, 它自身的负载会以一定的规则分配给网络中与之相邻的完好节点. 一般将节点 i 失效后, 相邻节点 j 得到的负载定义为

$$\Delta L_{ji} = L_i \cdot C_j / \sum_{m \in \Gamma_i} C_m, \quad (2)$$

其中 Γ_j 表示与节点 i 相邻的节点集合, m 表示集合中的任意节点, C_j 和 C_m 表示相应的容量. 如果 $L_j + \Delta L_{ji} > C_j$ 则节点 j 也会失效, 它的负载也会根据上述规则进行分配, 直到网络中不再出现失效节点为止. 向近邻分配负载是一种局部重分配方式, 一些学者则认为失效节点的近邻还可能将负载继续在网络内完好节点之间传递, 也即负载分配是一种全局行为. 在现实世界的复杂网络中, 无论是局部还是全局负载重分配都属于极端情况, 更多的是介于二者之间的分配. 文献 [19] 给出了一种可调的负载重分配方案, 当节点 i 失效后, 完好节点 j 得到的负载表达式为

$$\Delta L_{ji} = \frac{l_{ij}^{-\theta} k_j^{\beta}}{\sum_{m \in \Omega} l_{im}^{-\theta} k_m^{\beta}}, \quad (3)$$

其中 Ω 是完好节点的集合, θ 和 β 是负载重分配策略参数, θ 用于控制分配范围, β 用于控制分配的均匀性.

由于受地理环境、组织结构关系所限, DWS 网络中的失效节点很难将负载在全网络内重新分配, 因此本文假设失效节点的负载只向同级或上级最近的完好节点分配. 图 3 给出了节点 i 失效后负载

分配的可能路径, 实线箭头表示负载在骨架内分配, 虚线表示负载在隐含连接内分配. 同时, 由于DWS网络具有层级结构, 在负载重分配时应充分考虑这一点, 最终得到的重分配表达式如(4)式, 其中 $\theta \in [0, \infty)$ 用于控制分配的层级均匀性, θ 越大负载越倾向于向更高层节点分配.

$$\Delta L_{ji} = \frac{x_{ij}^{-\theta} C_j}{\sum_{m \in \Omega} x_{im}^{-\theta} C_m}. \quad (4)$$

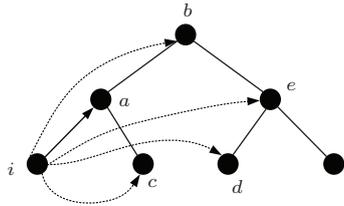


图3 失效节点负载重分配的可能路径

3.4 抗毁损性测度

本文采用两种方法测度DWS网络在面临级联失效时的抗毁损性. 第一种方式是计算节点*i*失效后引起的级联失效规模 CF_i , 也即当节点*i*失效后直到级联失效过程结束会引起网络中有多少其他节点. 由于DWS网络具有层级结构, 本文也分别计算每个层次的雪崩规模, 并标准化得到 $CF_{i,l}/N_l$, $l = 0, 1, \dots, L - 1$. 在实际中也经常使用 $1 - CF_{i,l}/N_l$ 表示节点生存比例. 第二种方式是基于网络连通性的, 也即测度攻击前后网络巨组元规模的变动, 巨组元是指网络最大连通子图, 则网络抗毁损性可以表示为 $G = N'/N$, 其中 N 是初始状态的巨组元规模, N' 是级联失效过程结束后网络的巨组元规模.

4 仿真实验分析

4.1 DWS网络拓扑结构的实验结果

首先利用模拟实验研究DWS网络的性质, 共分两组, 第一组实验研究连接参数 λ 和 ξ 对网络拓扑性质的影响, 第二组研究隐含连接数*m*的影响. 两组实验使用的网络均分为3个层级, 网络节点数为2000, 中层节点拥有的底层节点数期望分别是 $b = 50$ 和 $b = 100$, 标准差为期望值的1/3. 第一组实验令 $m = 1000$; 第二组将实验连接参数设定为

$$(\lambda, \xi) = \{(0.4, 0.8), (0.6, 0.6), (0.8, 0.4)\}.$$

为了将DWS网络与小世界网络比较, 本文主要考察网络的集群系数. 实验的基本思路是根据每组给定参数生成1000个DWS网络, 计算每个网络的集群系数, 然后计算这些网络的集群系数均值, 集群系数基于(5)式计算, l_i 表示节点*i*的邻点之间的连边数, k_i 表示节点*i*的度, C_i 是节点*i*的集群系数, C 是网络的集群系数.

$$C_i = \frac{2l_i}{k_i(k_i - 1)},$$

$$C = \langle C_i \rangle = \frac{1}{N} \sum_i C_i. \quad (5)$$

得到的结果如图4和图5所示.

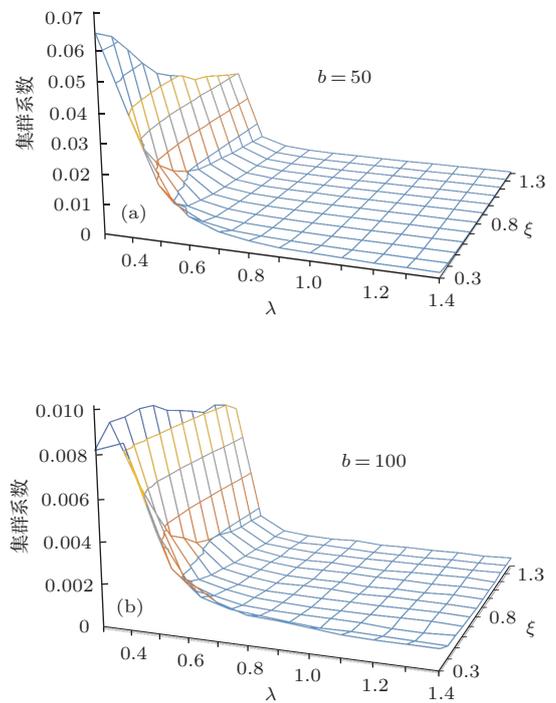


图4 DWS网络集群系数随 λ 和 ξ 的变化规律

从图4可以看出, DWS网络的集群系数在隐含连接数相同的情况下随 λ 和 ξ 的增加而降低, 也即网络显示出更强的随机性. 虽然集群系数的数值较小, 但在 $\lambda < 0.5$ 和 $\xi < 0.5$ 时, 仍显著大于具有相同节点数和边数的随机网络, 显示出小世界特性. 同时, 实验还发现 ξ 对网络拓扑性质的影响显著高于 λ . 图5给出了不同 λ 和 ξ 组合下连接比例 m/N 与集群系数的对数-对数关系, 显示出多数情况下集群系数会随 m/N 增加而增加. 但当 m/N 达到某门槛值后集群系数上升趋缓, 甚至开始降低($\lambda = 0.8, \xi = 0.4, b = 100$), 这与小世界网络是相似的, 不同之处在于相应的门槛值较低.

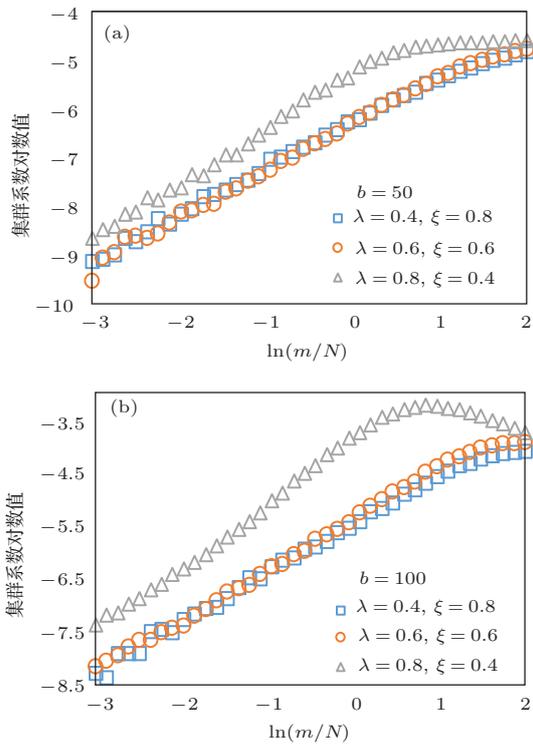


图5 (网刊彩色) DWS网络集群系数随隐含连接数的变化规律

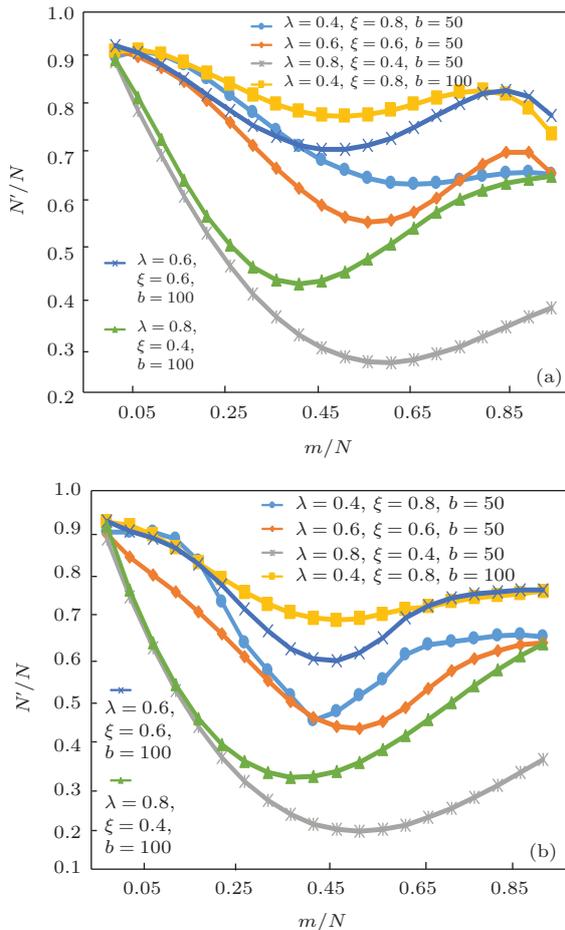


图6 (网刊彩色) 级联失效规模与连接比例的关系 (a) 无法观测到隐含连接; (b) 隐含连接可观测

4.2 级联失效的仿真实验结果

本小节利用模拟实验分析在级联失效下DWS网络的抗毁损性. DWS网络“骨架”结构设定与4.1小节相同, 设计三组实验分别考察隐含连接比例(m/N)、重分配层级均匀参数 θ 以及打击比例 p 的影响. 实验的基本思路是在给定参数下生成1000个网络, 然后根据3.1—3.3小节给出的级联失效模型进行模拟, 最后测度网络的级联失效规模. 第一组试验考察隐含连接可观测与不可观测时 m/N 的影响, 试验中将其他参数固定为 $\theta = 0, p = 1, \gamma = 0.5$, 得到的结果如图6和图7所示.

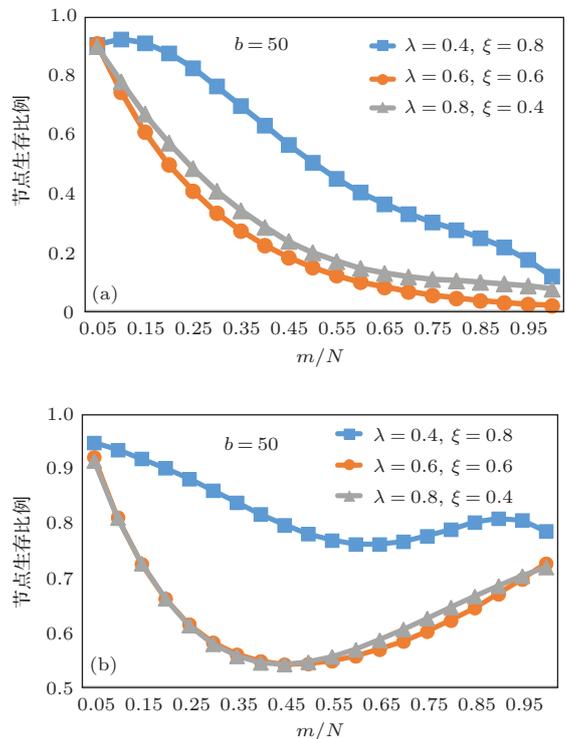


图7 (网刊彩色) 节点生存比例与连接比例的关系 (a) 中层节点; (b) 底层节点

在仿真实验给出的各种参数设定下, 网络的级联失效规模随 m/N 都呈现出先增加后降低的规律. 这是因为当 m 较小时, 随着隐含连接数增加, 失效节点的影响范围也随之增加. 但由于失效节点与具有较高负载承受力的中层节点的连接较少, 使得底层节点和底层节点大规模失效. 但当 m/N 达到某个临界比例(介于0.4至0.6之间)后, 失效节点与中层节点的连接逐渐增多, 负载分配的范围增大, 系统可以利用更多的完好节点承担额外负载, 进而有效地控制级联失效进一步恶化, 底层节点生存比例开始增加, 此时网络抗毁损性反而开始升高. 实验还发现 λ 较大 ξ 较小时, 级联失效规模

较大,这是因为此时中层节点之间的隐含连接数较多(见表1),当受到底层失效节点冲击时,负载会在中层节点内分配,从而触发大规模级联失效.另外,比较图6(a)和(b)还可以考察信息对打击效果的影响.当 m/N 较小时,观测到“隐含连接”对级联失效规模影响微弱.随着 m 增加,信息发挥出至关重要的作用,完全信息下网络受破坏程度显著高于不完全信息时的情况.

第二组试验考察重分配层级均匀性 θ 的影响.将其他参数固定为 $m/N = 0.5, p = 1, \gamma = 0.5$,得到的结果如图8所示.不难看出, θ 越大,网络级联失效规模越小,因为顶层节点更多地承担了额外负载,降低了中层节点的负担,控制了级联失效过程进一步恶化.同时, θ 对抗毁损性的影响也受到连接参数的影响,当隐含连接更多地出现在中层节点之间时, θ 对抗毁损性的影响更大.

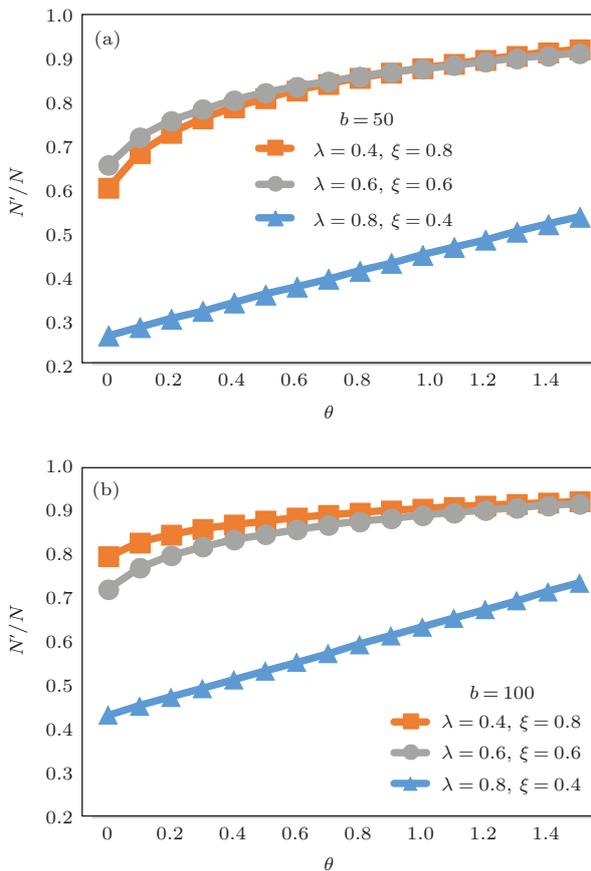


图8 (网刊彩色) 级联失效规模与重分配层级均匀系数 θ 的关系

综合前两组实验结果,不难发现层级结构和隐含连接可以控制负载重分配的范围和比例.从提高网络抗毁损能力角度看,网络应尽量增加底层节点与中层节点之间的连接数,同时也要将中层节点之间的

连接数控制在合理规模.这样就可以在底层失效节点负载重分配时较多地将负载分配至容量较大的高层节点.

第三组实验考察打击比例 p 的影响.将其他参数固定为 $m/N = 0.5, \theta = 0, \gamma = 0.5$,得到的结果如图9所示.当 p 很小时,网络级联失效的规模很小,随着 p 增加,这一规模显著增加.但值得注意的是, p 对网络受破坏程度的影响也取决于连接参数 λ 和 ξ .例如当 $\lambda = 0.8, \xi = 0.4$ 时, p 对级联失效规模的影响显著大于 $\lambda = 0.4, \xi = 0.8$ 或者 $\lambda = 0.6, \xi = 0.6$ 时.这是由于当 $\lambda = 0.8, \xi = 0.4$ 时,底层与中层节点之间的连接较少,负载重分配范围较小,底层节点的抗毁损性较差.但底层与中层节点较少的隐含连接也使得底层节点初始负载分配更均匀,失效规模随 p 的增加是平稳的.

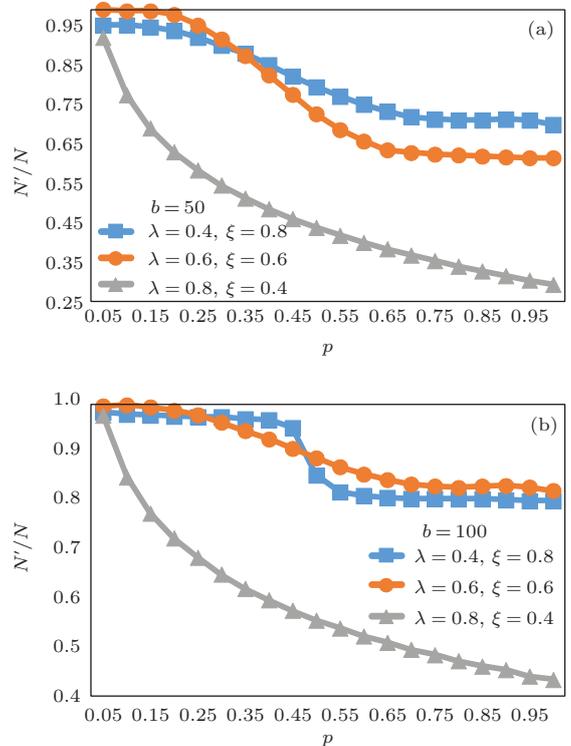


图9 (网刊彩色) 级联失效规模与打击比例 p 的关系

5 结 论

对于随机网络、无标度网络和小世界网络这些逻辑网络的级联失效及灾变机理模型,学界已经进行了深入的研究和应用.但在金融系统、物流网等许多实际网络中,节点之间普遍存在层级隶属关系.这种结构会对网络的抗毁损性带来何种影响目前尚未开展广泛研究.因此本文在DWS网络的基

基础上对其进行改进, 构建了考虑不完全信息和负载重分配层级异质性的级联失效模型, 并进行了仿真实验.

由仿真结果可知, DWS网络的拓扑性质会随连接参数、隐含连接比例变化从小世界网络过渡到随机网络. 模拟级联失效过程得出的结果则表明隐含连接及其分布(网络设计因素)、负载重分配的层级异质性(管理控制因素)会对网络的受破坏程度产生显著影响. 因此, 在满足网络功能的前提下, 应充分理解、利用网络的设计因素, 并制定恰当的管理控制策略, 应尽量利用较多的具有较高负载容量的高层级节点承担灾害风险, 避免灾害在较脆弱的底层节点内扩散, 进而可以有效控制级联失效规模. 此外, 本文还从打击策略(不完全信息和底层节点打击比例)的角度分析了网络的抗毁损性能, 为探索相关应对措施提供参考. 本文的研究有着广阔的应用前景, 例如可用于金融体系中的风险传染路径及其影响的预测和估计, 为全面认清金融传染的特征、优化金融网络设计、提高金融系统稳定性提供建议和指导. 对于物流或供应链系统也可以参考本文的级联失效模型, 结合节点的功能、地位、地理位置, 改善网络结构以抵御突发事件的影响. 本文的不足之处是没有考虑边攻击的情况, 对于不完全信息影响的研究也较简单, 没有考虑隐含连接部分可观测的情形, 这些将成为未来的研究重点.

参考文献

- [1] Watts D J, Strogatz S H 1998 *Nature* **393** 440
- [2] Barabási A L, Albert R 1999 *Science* **286** 509
- [3] Tabak B M, Takami M, Rocha J M 2014 *Physica A* **394** 211
- [4] Heiberger R H 2014 *Physica A* **393** 376
- [5] Zhang Y C, Liu Y, Zhang H F, Cheng H, Xiong F 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 050501 (in Chinese) [张彦超, 刘云, 张海峰, 程辉, 熊菲 2011 物理学报 **60** 050501]
- [6] Jalili M 2013 *Physica A* **392** 959
- [7] Lei T, Yu Z W 2007 *Com. Eng. Appl.* **43** 132 (in Chinese) [雷霆, 余镇危 2007 **43** 132]
- [8] Zheng X, Chen J P, Shao J L, Bie L D 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 190510 (in Chinese) [郑啸, 陈建平, 邵佳丽, 别晓东 2012 物理学报 **61** 190510]
- [9] Ling X, Hu M S, Long J C, Ding J X, Shi Q 2013 *Chin. Phys. B* **22** 018904
- [10] Albert R, Jeong H, Barabási A L 2000 *Nature* **406** 378
- [11] Motter A E, Lai Y C 2002 *Phys. Rev. E* **66** 065102
- [12] Bao Z J, Cao Y J, Ding L J 2009 *Physica A* **388** 4491
- [13] Moreira A A, Andrade J S, Herrmann H J, Indekeu J O 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 018701
- [14] Chen S M, Pang S P, Zou X Q 2013 *Chin. Phys. B* **22** 058901
- [15] Mirzasoaleiman B, Babaei M, Jalili M, Safari M 2011 *Phys. Rev. E* **84** 046114
- [16] Zheng J F, Gao Z Y, Fu B B, Li F 2009 *Chin. Phys. B* **47** 54
- [17] McNeerney J, Fath B D, Silverberg G 2013 *Physica A* **392** 6427
- [18] Mantegna R N 1999 *Eur. J. Phys. B* **11** 193
- [19] Dodds P S, Watts D J, Sabel C F 2003 *PNAS* **100** 12516
- [20] Li P, Wang B H, Sun H, Gao P, Zhou T 2008 *Eur. J. Phys. B* **62** 101
- [21] He D R, Liu Z H, Wang B H 2008 *Complex System and Complex Network* (in Chinese) [何大韧, 刘宗华, 汪秉宏 2008 复杂系统与复杂网络 (北京: 高等教育出版社)]
- [22] Duan D L, Wu X Y 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 030501 (in Chinese) [段东立, 武小悦 2014 物理学报 **63** 030501]

A cascading failure model of complex network with hierarchy structure*

Yuan Ming[†]

(Department of Statistics, Tianjin University of Finance and Economic, Tianjin 300222, China)

(Received 12 May 2014; revised manuscript received 15 July 2014)

Abstract

In this paper, we propose a cascading failure model for the complex network with hierarchy structure which is common in real networks. This model can be used to optimize the financial or logistic network design. The hierarchy network has a tree-shape backbone and many random hidden linkages. The branches of each node in the backbone follow normal distribution. The attack on the network is from bottom layer under the condition of incomplete information, i.e., on the assumption that the attacker cannot observe the hidden linkages. The load redistribution of the failure nodes takes into consideration the hierarchy heterogeneity, of which the network tends to redistribute extra load to intact nodes of the same or higher hierarchies. Simulation experiment shows that the topology of hierarchy network changes from small world network into random network with the variation of linkage parameters. The size of cascading failure firstly increases and then decreases with the hidden linkage ratio increasing and the network shows higher robustness when the load of failure node is redistributed to the intact node with high hierarchy. The experiments also demonstrate that the linkage parameters play a significant role in the robustness of the network because these parameters can affect the hierarchy distribution of hidden links. Therefore, in order to achieve better robustness of network, we should reasonably choose parameters in topology design and network control strategies.

Keywords: complex network, cascading failure, hierarchy structure

PACS: 05.10.-a, 64.60.aq, 89.75.-k, 89.75.Hc

DOI: [10.7498/aps.63.220501](https://doi.org/10.7498/aps.63.220501)

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 71103126).

[†] Corresponding author. E-mail: yuanmingtianjin@163.com