

双频驱动下分数阶过阻尼马达在空间对称势中的定向输运

谢天婷 张路 王飞 罗懋康

**Direct transport of fractional overdamped deterministic motors in spatial symmetric potentials driven by biharmonic forces**

Xie Tian-Ting Zhang Lu Wang Fei Luo Mao-Kang

引用信息 Citation: Acta Physica Sinica 63, 230503 (2014) **DOI:** 10.7498/aps.63.230503

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.230503>

当期内容 View Table of Contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/volumn/home.shtml>

---

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

[参数不确定的分数阶混沌系统广义错位延时投影同步](#)

李睿, 张广军, 姚宏, 朱涛, 张志浩

2014, 63(23): 230501. 全文: [PDF](#) (303KB)

[电感电流伪连续模式下分数阶 Boost 变换器的非线性控制](#)

谭程, 梁志珊, 张举丘

2014, 63(20): 200502. 全文: [PDF](#) (773KB)

[空时非对称分数阶类 Langevin 棘齿](#)

周兴旺, 林丽烽, 马洪, 罗懋康

2014, 63(16): 160503. 全文: [PDF](#) (316KB)

[基于不确定性变时滞分数阶超混沌系统的滑模自适应鲁棒的同步控制](#)

吴学礼, 刘杰, 张建华, 王英

2014, 63(16): 160507. 全文: [PDF](#) (516KB)

[系统非对称性及记忆性对布朗马达输运行为的影响](#)

王飞, 谢天婷, 邓翠, 罗懋康

2014, 63(16): 160502. 全文: [PDF](#) (891KB)

# 双频驱动下分数阶过阻尼马达在空间对称势中的定向输运\*

谢天婷<sup>1)2)</sup> 张路<sup>1)</sup> 王飞<sup>1)</sup> 罗懋康<sup>1)†</sup>

1) (四川大学数学学院, 成都 610064)

2) (中国电子科技集团公司第二十九研究所, 电子信息控制重点实验室, 成都 610036)

(2014年5月3日收到; 2014年7月28日收到修改稿)

从阻尼对历史加速度记忆的角度出发, 对阶数  $p \in (0, 2)$  的分数阶阻尼物理意义给出了统一的合理解释, 具体分析了不同阶数下的阻尼记忆特性, 在此基础上研究了空间对称势中分数阶单分子马达在无偏置双频简谐激励下的输运问题, 通过数值方法分析了输运速度与模型各参数的关系以及分数阶阻尼对输运现象的影响机理. 研究表明, 在不同阶数下历史加速度对当前时刻阻尼力的贡献与距当前时刻的时间长度呈单增或单减关系; 在适当参数下输运速度随空间势深和外力频率的增大均会出现广义共振现象, 特别地, 在存在输运且阻尼阶数较大的情况下输运速度随势深增大出现阶梯状变化而与外力频率呈正比例关系; 输运速度及方向对外力波形十分敏感, 在不同外力下阻尼力的记忆性会分别促进或阻碍粒子跃迁, 甚至引发与整数阶方向相反的定向流.

**关键词:** 确定性马达, 对称势, 双频激励, 分数阶

**PACS:** 05.60.Cd, 45.10.Hj

**DOI:** 10.7498/aps.63.230503

## 1 引言

系统的非平衡性和空间反演对称破缺是分子马达系统能够产生定向输运的基本必要条件. 非平衡态的要求使得系统必须引入外力扰动, 空间反演对称破缺可由多种途径实现. 近年来, 无偏置周期驱动力下空间周期势系统的定向输运行为引起了学者们的广泛关注, 其研究内容按照空间反演对称破缺方式的不同可大体分为以下三类<sup>[1]</sup>: 由空间非对称周期势即棘齿势<sup>[2-6]</sup>、多单元系统内部耦合<sup>[7-11]</sup>或某些非平衡扰动<sup>[11]</sup>导致对称破缺而引发的定向输运行为. 2002年, Reimann<sup>[1]</sup>详细讨论了脉动棘齿系统和倾斜棘齿系统中噪声诱导的定向输运问题. 同年, Parrondo和de Cisneros<sup>[12]</sup>回顾总结了关于热力学棘齿系统与热涨落环境之间能量流动问题的相关研究. 2009年, Hanggi和

Marchesoni<sup>[13]</sup>系统介绍了人工布朗马达的研究概况. 此外, Reguera等<sup>[14,15]</sup>利用Fick-Jacobs方程理论给出了受外力驱动的粒子在封闭变截面通道中运动的介观动力学描述, 发现了不同于势垒输运的熵垒输运现象. 更多研究表明<sup>[16-19]</sup>输运行为与通道形状具有密切关系, 势垒与熵垒的适当耦合甚至能够加强粒子的定向输运行为. Ai和Wu<sup>[20]</sup>讨论了粒子尺寸对熵垒输运行为的影响.

由于周期势中的定向输运现象在输运控制、细小颗粒分离及分子泵等问题中均具有广阔的应用前景, 而以双频信号作为输入的系统在物理、工程、医学和生物等领域具有十分普遍的应用, 因此双频简谐激励下分子马达的定向输运问题引起了学者们的广泛关注<sup>[11,21-26]</sup>. 2000年, Flach等<sup>[21]</sup>发现空间对称势场中受双频简谐信号驱动的布朗马达会出现定向输运现象, 2004年, Savel'ev等<sup>[23]</sup>研究了利用双频信号对过阻尼布朗马达定向流进行控

\* 国家自然科学基金(批准号: 11171238)和电子信息控制重点实验室项目(批准号: 2013035)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: makaluo@scu.edu.cn

制的问题, 2010年, Machura等<sup>[25]</sup>研究了空间对称势中受双频信号驱动的惯性马达的输运问题.

理论分析通常假定粒子所受的阻尼力与运动速度成正比, 但这只适用于描述介质为纯黏性液体即服从瑞利比例阻尼的情况. 实际涉及化工、医学、生物和土木工程等多种领域的介质通常具有黏弹性, 整数阶方程无法准确描述粒子在这些黏弹性介质中的力学规律<sup>[27]</sup>. 已有学者发现分数阶微分算子的历史记忆性能很好地刻画黏弹性介质的阻尼特性<sup>[27-29]</sup>, 因而分数阶阻尼已被广泛应用于黏弹性介质中扩散现象及输运机理的研究中.

然而在目前的研究文献中分数阶阻尼阶数的讨论范围却并不统一, 分为基于介质阻尼对速度的幂律记忆而提出的范围 $p \in (0, 1)$ <sup>[30]</sup>和基于可用于描述Stoke's第二问题的分数阶Torvik-Bagley方程( $p = 1.5$ )而设定的范围 $p \in (1, 2)$ <sup>[27,28,31]</sup>两大类, 对于第二类范围的研究则主要集中于相关领域的数学理论分析及数值算法, 还有很多文献直接将阶数范围取为 $(0, 2)$ 对相关分数阶系统进行研究而未涉及具体物理意义. 基于此, 本文从阻尼对历史加速度记忆的角度出发, 合理解释了阶数 $p \in (0, 2)$ 的物理意义, 并具体分析了阶数对阻尼记忆特性的影响机理.

近年来关于分数阶马达定向输运的研究正在兴起. 文献<sup>[32-35]</sup>利用Langevin方程及分数阶Fokker-Planck方程理论研究发现, 在无外力驱动时分数阶高斯噪声或Levy噪声均会破坏棘齿系统热力学平衡状态从而引发定向流, 文献<sup>[36]</sup>对其影响机理进行了具体分析. 2014年起, 空间对称势中的分数阶马达输运问题开始引发学者们的关注, 文献<sup>[37]</sup>研究了受时间非对称朗之万噪声驱动的分数阶单分子马达在空间对称势中的输运问题, 文献<sup>[38]</sup>研究了非对称性耦合的分数阶多分子马达在空间对称势中的输运问题. 本文研究发现, 空间对称势中的分数阶单分子马达在无偏置双频简谐激励下同样会出现定向输运流, 并通过数值方法研究了输运速度与模型各参数(分数阶阶数、空间势深、双频激励频率及振幅)的关系, 具体分析了分数阶阻尼对输运现象的影响. 研究表明: 在适当参数下输运速度随空间势深和外力频率的增大均会出现广义共振现象, 特别地, 在存在输运且阻尼阶数较大的情况下输运速度随势深增大出现阶梯变化而与外力频率呈正比例关系; 输运速度及方向对外力波形十分敏感; 分数阶阻尼力记忆性对输运的影响与外力波形具有密切关系: 粒子发生跃迁时会引

起较大的反向阻尼力抑制该次跃迁, 如果阻尼记忆较强, 则还会影响粒子跃迁后的行为, 若粒子跃迁后外力未反向, 阻尼力与外力反向叠加, 阻碍粒子继续跃迁; 若粒子跃迁后外力反向, 则二力同向叠加, 促进粒子反向跃迁; 如果阻尼记忆较弱, 历史状态对当前时刻的影响很小, 粒子运动会紧随外力而变化, 分数阶阻尼与外力的耦合作用甚至会引发与整数阶方向相反的定向流.

## 2 数学模型

### 2.1 分数阶阻尼

在很多物理和生化环境中, 介质对速度通常具有幂律记忆性, 距当前时刻越近, 其记忆性越强, 关于速度的幂律阻尼核函数可表示为<sup>[30]</sup>

$$\gamma_v(s) = \frac{1}{\Gamma(1-p)} |t-s|^{-p} \quad (0 < p < 1). \quad (1)$$

因此, 粒子受到的具有幂律记忆性的阻尼力为

$$F_d = \frac{1}{\Gamma(1-p)} \int_0^t (t-\tau)^{-p} \times \dot{x}(\tau) d\tau \quad (0 < p < 1). \quad (2)$$

而根据Caputo分数阶导数的定义<sup>[39]</sup>

$${}_0^C D_t^p x(t) = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_0^t (t-\tau)^{n-1-p} \times x^{(n)}(\tau) d\tau \quad (n-1 < p < n), \quad (3)$$

恰有

$$F_d = {}_0^C D_t^p x(t) \quad (0 < p < 1). \quad (4)$$

由于速度也可看作对历史加速度的等权记忆, 因此 $0 < p < 1$ 时的阻尼力亦可看作对历史加速度的记忆, 故有

$$\begin{aligned} F_d &= \frac{1}{\Gamma(1-p)} \int_0^t (t-\tau)^{-p} \dot{x}(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-p)} \int_0^t (t-\tau)^{-p} \left( \int_0^\tau \ddot{x}(s) ds \right) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(2-p)} \int_0^t \ddot{x}(s) (t-s)^{1-p} ds, \end{aligned} \quad (5)$$

因此,  $0 < p < 1$ 时阻尼力关于加速度的阻尼核函数 $\gamma_a(s)$ 为

$$\gamma_a(s) = \frac{(t-s)^{1-p}}{\Gamma(2-p)} \quad (0 < p < 1), \quad (6)$$

其中 $t$ 为当前时刻.

此外, Torvik 和 Bagley 于 1984 年在没有引入经验假设的前提下, 通过理论推导发现分数阶阻尼阶数  $p = 1.5$  的分数阶微分方程可以用来描述 Stoke's 第二问题, 即无限大平板受平面内方向简谐力驱动所引起的周围纯黏性液体的稳态振荡运动问题 [29]. 这充分表明分数阶阶数不仅可用来刻画黏弹性介质的复杂阻尼特性, 在适当参数下还具有描述简单阻尼特性介质中特定物理过程的能力. 由此引发了学者们对于  $p \in (1, 2)$  情况的讨论. 根据 (3) 式可知, 当  $1 < p < 2$  时, 关于加速度的幂律阻尼核函数

$$\gamma_a(s) = \frac{1}{\Gamma(2-p)} |t-s|^{1-p} \quad (1 < p < 2). \quad (7)$$

综上, 对于  $p \in (0, 2)$  的分数阶阻尼可统一看作对历史加速度的记忆, 相应的阻尼核函数为

$$\gamma_a(s) = \frac{1}{\Gamma(2-p)} |t-s|^{1-p} \quad (0 < p < 2). \quad (8)$$

当  $0 < p < 1$  时, 距离当前时刻  $t$  越近的加速度对当前时刻阻尼的贡献越小; 当  $p = 1$  时, 对历史加速度为等权记忆; 当  $1 < p < 2$  时, 距离当前时刻  $t$  越近的加速度对当前时刻阻尼的贡献越大. 图 1 给出了当前时刻  $t = 10$  s 时阻尼核函数  $\gamma_a(s)$  随历史时刻  $s$  的变化.

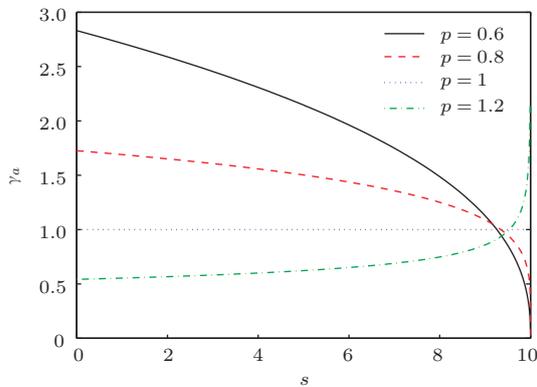


图 1 不同阶数下的阻尼核函数  $\gamma_a(s)$  ( $t = 10$  s)

### 2.2 系统方程

双频简谐激励下分数阶过阻尼分子马达在空间对称势中的运输模型为

$$\frac{d^p x}{dt^p} + V_0 \sin x = E_1 \cos(\omega_1 t) + E_2 \cos(\omega_2 t), \quad (9)$$

其中,  $p$  为分数阶阶数且  $0 < p < 2$ ;  $E_1$  和  $E_2$  分别为双频简谐激励的振幅且不同时为零;  $\omega_1$  和  $\omega_2$  分别为双频简谐激励的频率;  $V_0$  为空间势深.

### 2.3 输运机理分析

双频驱动力使得粒子始终处于非平衡状态, 当  $\omega_2$  是  $\omega_1$  的有理数倍时, 双频外驱动力是周期函数, 在一个周期内外力的均值为零, 但在  $\omega_1 \neq \omega_2$  时双频叠加使得正负极值不相等,  $\hat{S}_a$  对称性发生破缺 [11,40], 与空间势场力的竞争引发定向输运.

图 2 (a) 和 (b) 分别为参数取为  $E_1 = 10, E_2 = 5, \omega_1 = 1, \omega_2 = 2$  和  $E_1 = 10, E_2 = 5, \omega_1 = 1, \omega_2 = 2.5$  时外驱动力  $E$  ( $E = E_1 \cos(\omega_1 t) + E_2 \cos(\omega_2 t)$ ) 和粒子位移随时间的演化, 分数阶阶数  $p = 1$ , 势深  $V_0 = 10$ , 图中黑虚线表示空间势垒位置, 黑实线表示空间势阱位置. 从图 2 可以看到, 在外力达到最值时粒子在外力的协助下翻越势垒发生跃迁, 外力引发系统  $\hat{S}_a$  对称破缺, 使得粒子左右翻越势垒的能力不同 (图 2 (a)) 或翻越次数不同 (图 2 (b)), 进而导致定向输运.

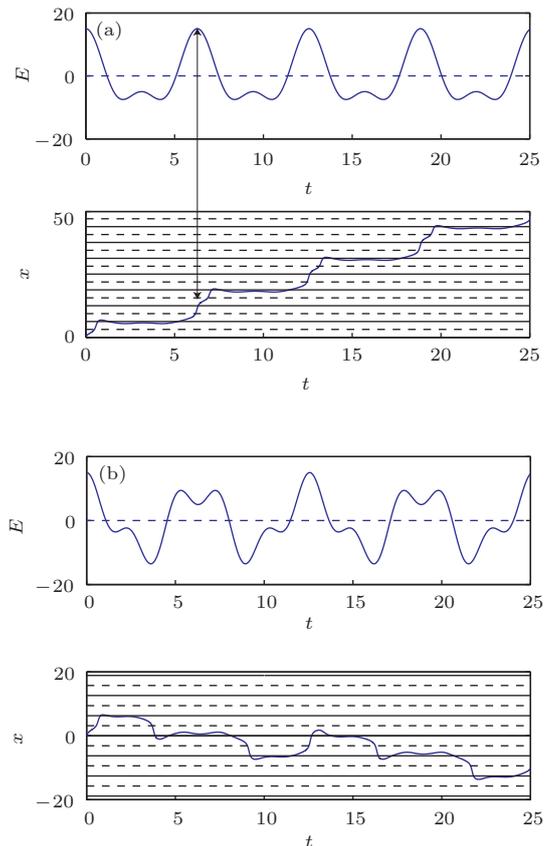


图 2 不同参数下外驱动力与粒子位移随时间的演化 (a)  $E_1 = 10, E_2 = 5, \omega_1 = 1, \omega_2 = 2$ ; (b)  $E_1 = 10, E_2 = 5, \omega_1 = 1, \omega_2 = 2.5$

当  $\omega_2$  是  $\omega_1$  的无理数倍时, 双频简谐驱动力  $E$  不是周期函数, 但由于无理数可用有理数逼近, 因此在一段时间内, 可用某周期函数作为  $E$  的逼近,

利用有理数情形理论进行分析.

### 3 数值仿真

本文采用分数阶差分法对方程(9)进行数值求解<sup>[41]</sup>, 计算公式为

$$x(t_j) = h^p \left[ -V_0 \sin x(t_{j-1}) + E_1 \cos(\omega_1 t_i) + E_2 \cos(\omega_2 t_i) \right] - \sum_{i=1}^{j-1} (-1)^i \times \binom{p}{i} x(t_{j-i}), \quad (10)$$

其中,  $h$  为采样步长,  $t_{j-1} = (j-1)h$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ ,

$$\binom{p}{i} = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-i+1)}.$$

并选用分子马达的平均速度来描述定向输运现象:

$$\bar{v} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}, \quad (11)$$

其中,  $t$  和  $t_0$  分别表示仿真开始和结束时刻. 由于实际仿真时长  $T$  有限, 当  $T$  取得足够大使得分子马达已经达到稳定的输运状态时, (11) 式可用有限的  $T$  来近似, 即

$$\bar{v} \approx \frac{x(T) - x(t_0)}{T - t_0}. \quad (12)$$

由于仿真过程会分析不同的简谐激励频率对输运速度的影响, 若仿真时长  $T$  取为固定, 则当粒子所受的简谐激励力频率发生变化时, 粒子在仿真时间内所受简谐激励力的周期数不一致, 这会导致某些参数下粒子在仿真结束时尚未达到稳定的输运状态. 为避免该问题, 我们将仿真时长  $T$  取为简谐激励力周期的函数, 不妨取为第一个简谐激励力周期  $T_1$  的  $n$  倍, 来比较  $0-nT_1$  时间段内粒子的平均输运速度, 即

$$\bar{v} \approx \frac{x(nT_1) - x(t_0)}{nT_1 - t_0}. \quad (13)$$

实际仿真中  $n$  取为 30, 方程求解中的采样步长  $h$  取为  $1/(200\omega_1)$ .

#### 3.1 定向输运速度与空间势深的关系

我们将双频驱动力选定为  $E = 10 \cos t + 5 \cos(2t)$ , 分析输运速度  $\bar{v}$  与势深  $V_0$  的依赖关系,

仿真结果图 3 所示. 从图 3 可以看出, 当  $V_0$  很小或很大时, 在任何  $p$  值下均无输运现象, 输运速度  $\bar{v}$  随着  $V_0$  的增大出现了广义共振现象且某些阶数下输运速度出现阶梯状变化. 这是因为势深很小时, 粒子在外力驱动下能够无障碍地来回翻越势垒, 粒子做周期运动, 无定向输运现象; 当势深逐渐增加到能够阻碍粒子的运动时, 由于外力的  $\hat{E}_{sh}$  对称性缺失, 粒子会产生定向输运, 势深的大小决定了单次跃迁翻越的势垒数, 由于粒子跃迁时间很短, 跃迁后停留在势阱中, 故粒子的位移总是空间势周期的整数倍, 导致输运速度呈阶梯状变化, 而对于阻尼记忆较强的情况, 粒子在外力作用下并非每次都能成功跃迁, 降低了输运速度, 阶梯状变化消失; 当势深过大时, 粒子被束缚在势阱附近而无法翻越势垒, 粒子将在稳定点附近做周期运动, 也无定向输运. 而对于固定的势深  $V_0$ , 输运速度随阶数  $p$  的增加而增大.

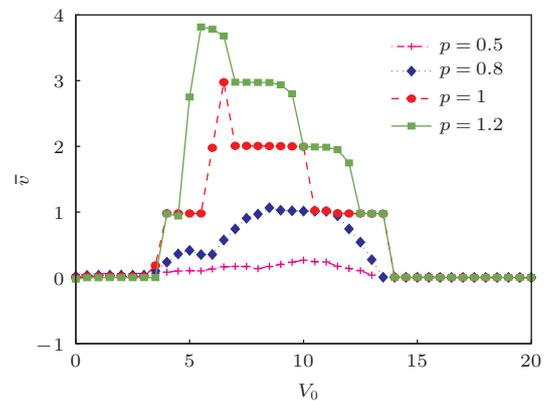


图 3 不同  $p$  值下  $\bar{v}$  与  $V_0$  的关系

#### 3.2 定向输运速度与外驱动力频率的关系

保持外驱动力在周期内的波形不变来分析外驱动力的频率对输运速度的影响. 因此, 我们令  $E = 10 \cos(\omega_0 t) + 5 \cos(2\omega_0 t)$ , 此时外驱动力的频率为  $\omega_0$ , 在不同的  $\omega_0$  下比较粒子输运速度, 仿真结果如图 4 所示, 仿真中势深  $V_0 = 10$ . 从图 4 可以看到, 当  $\omega_0$  很大时输运现象消失. 这是由于若  $\omega_0$  比较小, 外力振荡导致  $\hat{S}_a$  对称性破缺, 引发定向输运. 当  $\omega_0$  增大到一定程度后, 外力振荡频率十分快速, 使得粒子在一个势场周期内经历多个周期的外力, 粒子尚未翻越势垒就已经反向, 定向输运现象消失. 图 4 还表明存在输运现象时, 某些分数阶阶数下的输运速度与外力频率  $\omega_0$  存在正比例关系. 为进一步分析, 图 5 给出了阶数  $p = 1$  和 0.8 的情况

中不同  $\omega_0$  下粒子位移随时间的演化. 由图 5 可知: 对于阻尼记忆性不太强的情况 (如  $p = 1$  和 1.2), 粒子在外力达到极值时翻越势垒, 之后便停留在势阱内等待下一跃迁, 而翻越势垒所用时间远远小于势阱中的停留时间 (图 5 (a)), 故粒子在势阱停留的时间与  $\omega_0$  近似呈反比例关系, 平均速度因而线性增加; 但对于阻尼力记忆性较强的情况 (如  $p = 0.8, 0.5$ ), 历史加速度的强记忆阻碍了粒子的跃迁, 粒子成功跃迁的次数减少 (图 5 (b)), 平均速度减小, 线性关系消失 (图 4).

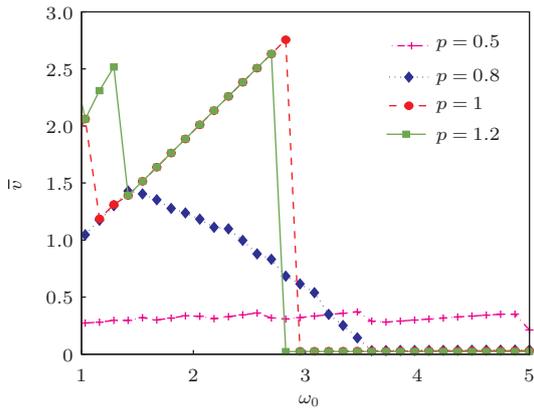


图 4 不同  $p$  值下  $\bar{v}$  与  $\omega_0$  的关系

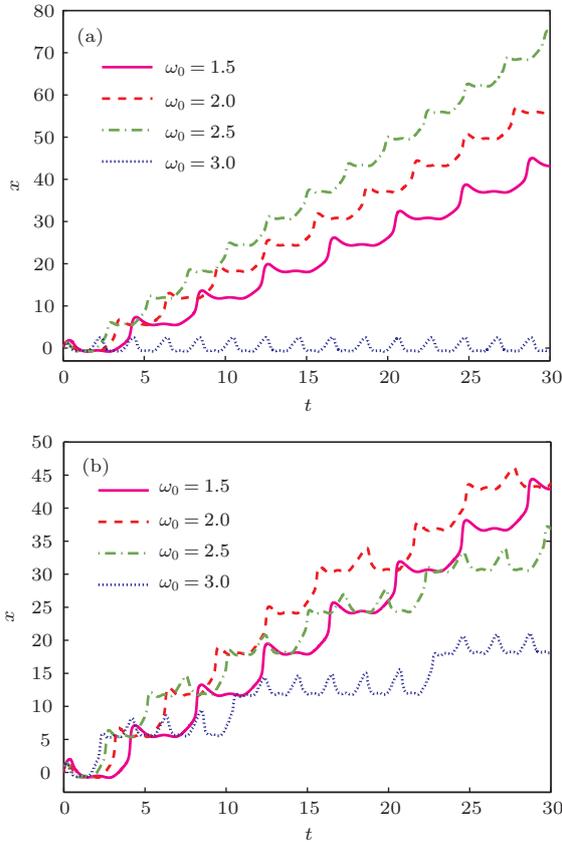


图 5 不同  $\omega_0$  下粒子的位移演化 (a)  $p = 1$ ; (b)  $p = 0.8$

### 3.3 定向输运速度与外驱动力波形的关系

为分析不同的外驱动力波形对定向输运的影响, 我们将外力取为  $E = 10 \cos t + 5 \cos(2\omega_2 t)$ , 分析输运速度与  $\omega_2$  的关系, 如图 6 所示.

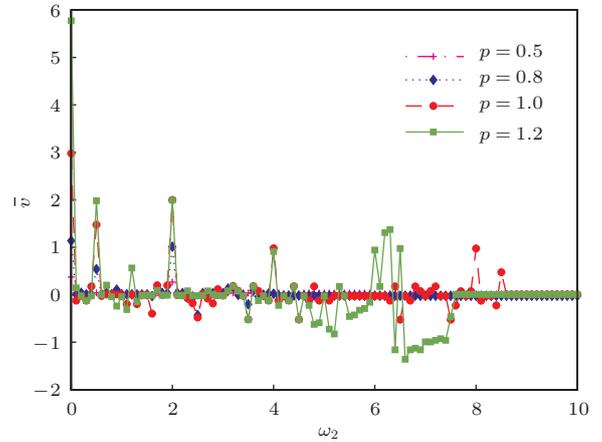


图 6 (网刊彩色) 不同  $p$  值下  $\bar{v}$  与  $\omega_2$  的关系

从图 6 可以看出: 当  $\omega_2 = 0$  时,  $E = 10 \cos t + 5$ , 外力关于时间的均值不等于零, 因此是单方向偏置力,  $E_1, E_2$  及  $V_0$  取适当值时粒子会发生定向输运; 随着  $\omega_2$  的增加,  $E$  出现振荡且引发系统  $\hat{S}_a$  对称性破缺, 导致输运现象. 定向输运速度及方向对外力波形十分敏感; 当  $\omega_2$  很大时, 外力对粒子的作用主要体现在低频  $E_1 \cos(\omega_1 t)$  上, 而单频简谐激励的对称性使得粒子从正负方向翻越势垒的能力相同, 故此时不存在定向输运现象.

### 3.4 定向输运速度与分数阶阶数的关系

我们将不同阶数下的粒子位移、速度和分数阶阻尼力进行对比来分析分数阶阶数对输运现象的影响, 图 7、图 8 和图 9、图 10 分别是不同外驱动力

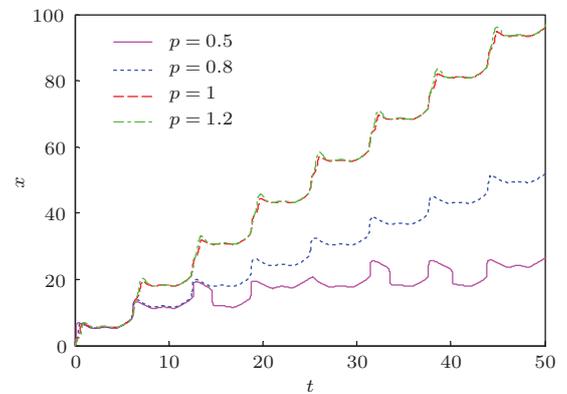


图 7 (网刊彩色)  $\omega_2 = 2$  时不同阶数下粒子位移随时间的演化

下的仿真结果, 其中图7和图9中的黑实线表示空间对称势的势阱, 而黑虚线表示空间对称势的势垒.

图7给出了 $\omega_2 = 2$ 时不同阶数下粒子位移随时间的演化, 图8(a)和(b)分别给出了阶数 $p = 1$ 和0.5时在时间段30—40 s之间粒子位移、阻尼力和外驱动力变化的对应关系. 当外力达到正极值时, 粒子在外力作用下翻越势垒发生跃迁. 对于阶数 $p = 0.8, 1$ 和1.2的情况, 在外力达到下一个正

极值前, 粒子无力反向跃迁而停留在势阱周围, 粒子的单向跃迁引发了定向输运现象; 对于 $p = 0.5$ 的情况, 粒子出现反向跃迁, 因而降低了整体输运速度. 这是因为当分数阶数较小时, 对历史加速度的记忆较强, 粒子正向跃迁时受到的介质阻尼力衰减较慢, 粒子正向跃迁的能力受到抑制(如 $p = 0.8$ ); 当外力达到负极值时, 若阻尼力仍未衰减至零, 则会与反向的外力叠加, 从而促进了粒子的反向跃迁(如 $p = 0.5$ ).

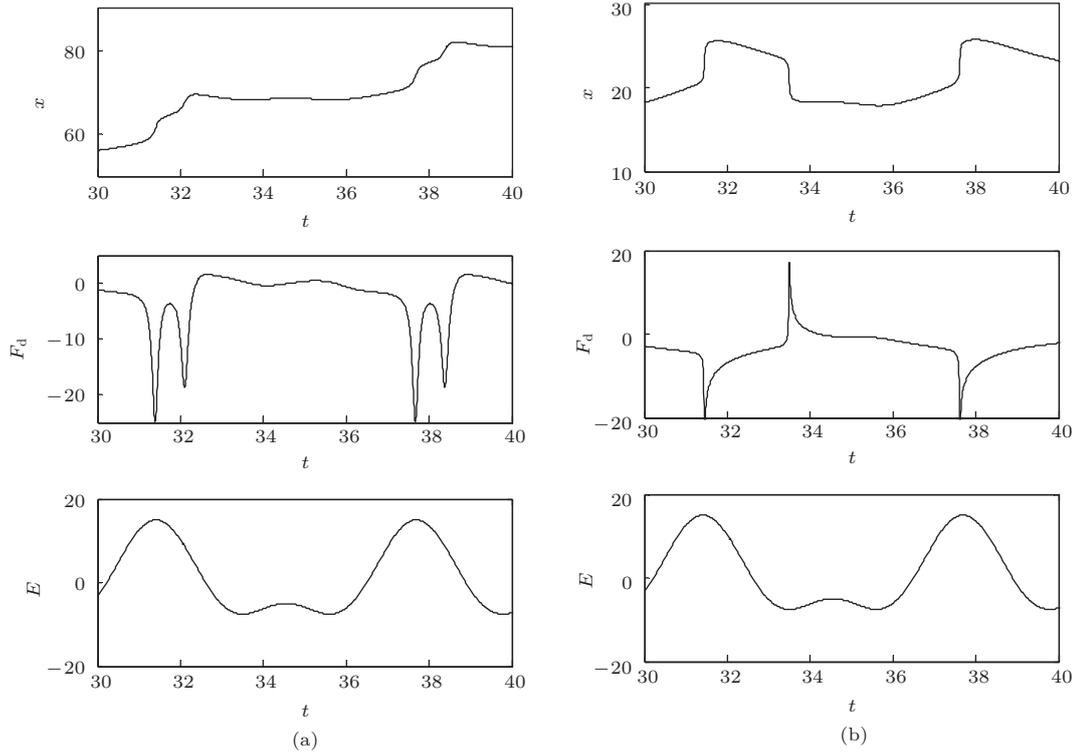


图8  $\omega_2 = 2$ 时粒子位移、阻尼力和外驱动力随时间的演化 (a)  $p = 1$ ; (b)  $p = 0.5$

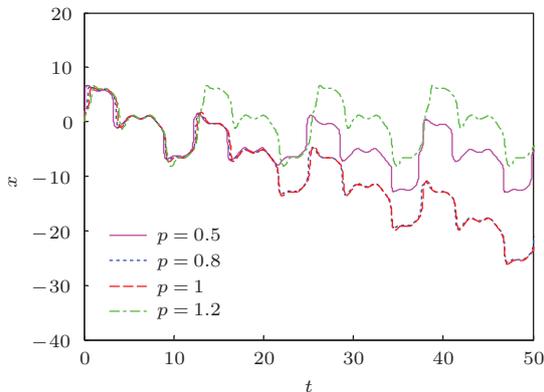


图9 (网刊彩色)  $\omega_2 = 2.5$ 时不同阶数下粒子位移随时间的演化

图9给出了 $\omega_2 = 2.5$ 时不同阶数下粒子位移随时间的演化. 由图9可知: 当 $p = 0.5$ 和1.2时,

粒子均无定向输运现象;  $p = 0.8$ 和1时粒子发生输运. 图10(a), (b)和(c)分别给出了阶数 $p = 0.5, 1$ 和1.2时在时间段30—50 s之间粒子位移、阻尼力和外驱动力的变化. 由于 $\omega_2 = 2.5$ 时对应的外驱动力在周期内有两处负的最大值点和一个正的最大值点, 且正负最值的大小差别很小, 粒子在这些点处均能发生跃迁; 当 $p = 0.8$ 和1时, 粒子在外力周期内正向跃迁一次而反向跃迁两次, 导致了定向输运现象(图10(b)). 当阶数很小时, 阻尼力对历史加速度的记忆很强, 前次跃迁积累下的阻尼力促进了下一次的反向跃迁(图10(a)); 当阶数很大时, 粒子对加速度的差记忆使得粒子具有很强的灵动性(图10(c)), 这两种情况下粒子在周期内的正反跃迁次数相同, 无输运现象.

综上所述, 输运速度及方向对外力波形十分敏感, 在某些外力波形下, 阻尼的记忆性甚至可以促进粒子的反向跃迁, 从而诱发丰富的输运现象.

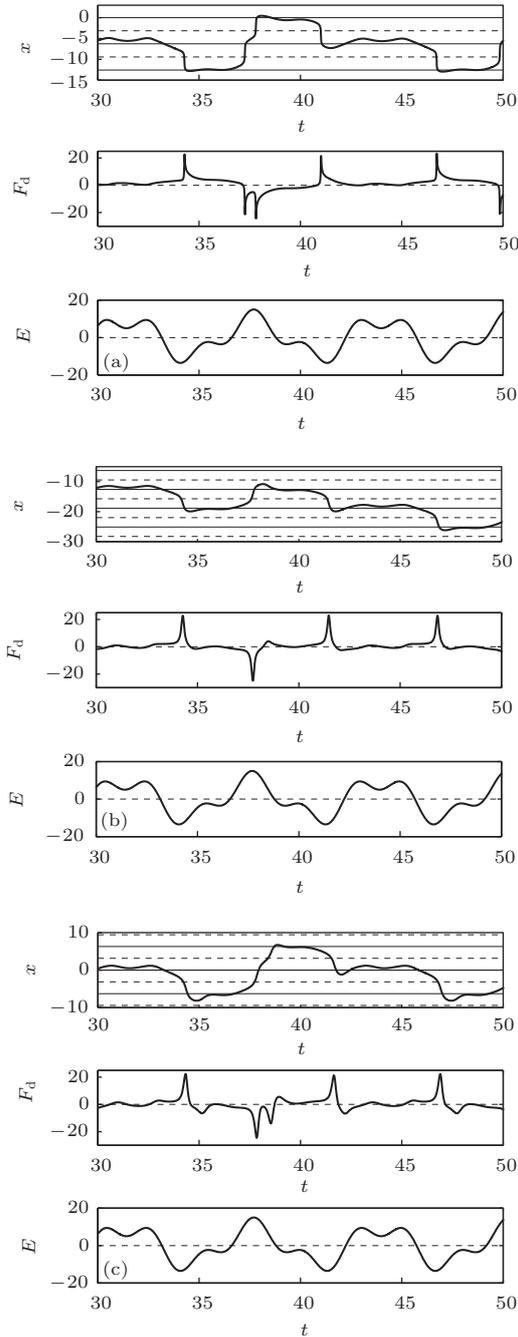


图 10  $\omega_2 = 2$  时粒子位移、阻尼力和外驱动力随时间的演化 (a)  $p = 0.5$ ; (b)  $p = 1$ ; (c)  $p = 1.2$

## 4 结 论

本文从阻尼对历史加速度记忆的角度出发, 对阶数  $p \in (0, 2)$  的分数阶阻尼物理意义给出了统一的合理解释, 并对其阻尼特性进行了详细的分析, 建立了双频简谐激励下分数阶过阻尼确定性马达

在空间对称势中的输运模型, 并利用分数阶差分法求得模型的数值解, 研究了输运速度与模型各参数的关系, 详细讨论了阶数对定向输运的影响机理. 研究表明: 1) 当  $0 < p < 1$  时, 距离当前时刻  $t$  越近的加速度对当前时刻阻尼的贡献越小; 当  $p = 1$  时, 阻尼对速度的记忆为零, 对历史加速度为等权记忆; 当  $1 < p < 2$  时, 距离当前时刻  $t$  越近的加速度对当前时刻阻尼的贡献越大. 2) 在适当参数下输运速度随空间势深和外力频率的增大均会出现广义共振现象, 特别是, 在存在输运且阻尼阶数较大的情况下输运速度随势深增大出现量化现象而外力频率呈正比例关系. 3) 输运速度及方向对外力波形十分敏感. 4) 分数阶阻尼力记忆性对输运的影响与外力波形具有密切关系: 粒子发生跃迁时会引起较大的反向阻尼力抑制该次跃迁, 而具有记忆性的阻尼力并不会立刻消失, 因此还会影响粒子跃迁后的行为, 若粒子跃迁后外力反向, 则二力同向叠加, 促进粒子反向跃迁; 如果阻尼记忆较弱, 历史状态对当前时刻的影响很小, 粒子运动会紧随外力而变化. 分数阶阻尼与外力的耦合作用甚至会引发与整数阶方向相反的定向流.

## 参考文献

- [1] Reimann P 2002 *Phys. Rep.* **361** 57
- [2] Jung P, Kissner J G, Hanggi P 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 3436
- [3] Astumian R D 1997 *Science* **276** 917
- [4] Mateos J L 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 258
- [5] Tu Z C 2012 *Chin. Phys. B* **21** 020513
- [6] Zhang H W, Wen S T, Zhang H T, Li Y X, Chen G R 2012 *Chin. Phys. B* **21** 078701
- [7] Falo F, Martinez P J, Mazo J J, Cilla S 1999 *Europhys. Lett.* **45** 700
- [8] Csahók Z, Family F, Vicsek T 1997 *Phys. Rev. E* **55** 5179
- [9] Ai B Q, He Y F, Zhong W R 2011 *Phys. Rev. E* **83** 051106
- [10] Gao T F, Liu F S, Chen J C 2012 *Chin. Phys. B* **21** 020502
- [11] Zheng Z G, Li X W 2001 *Commun. Theor. Phys.* **36** 151
- [12] Parrondo J M R, de Cisneros B J 2002 *Appl. Phys. A* **75** 179
- [13] Hanggi P, Marchesoni F 2009 *Rev. Mod. Phys.* **81** 387
- [14] Reguera D, Rubi J M 2001 *Phys. Rev. E* **64** 061106
- [15] Reguera D, Schmid G, Burada P S, Rubi J M, Reimann P, Hanggi P 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 130603
- [16] Martens S, Schmid G, Schimansky-Geier L, Hanggi P 2011 *Phys. Rev. E* **83** 051135
- [17] Margaretti P, Pagonabarraga I, Rubi J M 2013 *J. Chem. Phys.* **138** 194906
- [18] Liu J L, He J Z 2010 *Chin. Phys. B* **19** 030504

- [19] Zeng C H, Wang H, Wang H T 2011 *Chin. Phys. B* **20** 050502
- [20] Ai B Q, Wu J C 2013 *J. Chem. Phys.* **139** 034114
- [21] Flach S, Yevtushenko O, Zolotaryuk Y 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 11
- [22] Quintero N R, Jose A, Cuesta J A, Alvarez-Nodarse R 2010 *Phys. Rev. E* **81** 030102
- [23] Savel'ev S, Marchesoni F, Hanggi P, Nori F 2004 *Europhys. Lett.* **67** 179
- [24] Borromeo M, Marchesoni F 2006 *Phys. Rev. E* **73** 016142
- [25] Machura L, Kostur M, Luczka J 2010 *Chem. Phys.* **375** 445
- [26] Brown M, Renzoni F 2008 *Phys. Rev. A* **77** 033405
- [27] Chen W, Sun H G, Li X C 2010 *Fractional Derivative Modeling of Mechanical and Engineering Problems* (Beijing: Science Press) p125 (in Chinese) [陈文, 孙洪广, 李西成 2010 机械和工程问题的分数阶导数模型 (北京: 科学出版社) 第 125 页]
- [28] Hilfer R 2003 *Applications of Fractional Calculus in Physics* (Singapore: World Scientific)
- [29] Torvik P J, Bagley R L 1984 *J. Appl. Mech.* **51** 294
- [30] Gao S L, Zhong S C, Wei K, Ma H 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 100502 (in Chinese) [高仕龙, 钟苏川, 韦鹏, 马洪 2012 物理学报 **61** 100502]
- [31] Shen S J, Liu F W 2004 *J. Xiamen Univ. (Nat. Sci.)* **43** 306 (in Chinese) [沈淑君, 刘发旺 2004 厦门大学学报 (自然科学版) **43** 306]
- [32] del-Castillo-Negrete D, Gonchar V Y, Chechkin A V 2008 *Physica A* **387** 6693
- [33] Ai B Q, He Y F 2010 *J. Chem. Phys.* **132** 094504
- [34] Ai B Q, He Y F, Zhong W R 2010 *Phys. Rev. E* **82** 061102
- [35] Risau-Gusman S, Ibanez S, Bouzat S 2013 *Phys. Rev. E* **87** 022105
- [36] Ai B Q, Shao Z G, Zhong W R 2012 *J. Chem. Phys.* **137** 174101
- [37] Zhou X W, Lin L F, Ma H, Luo M K 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 110501 (in Chinese) [周兴旺, 林丽烽, 马洪, 罗懋康 2014 物理学报 **63** 110501]
- [38] Tu Z, Lai L, Luo M K 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 120503 (in Chinese) [屠浙, 赖莉, 罗懋康 2014 物理学报 **63** 120503]
- [39] Podlubny I 1999 *Fractional Differential Equations* (San Diego: Academic Press)
- [40] Zheng Z G 2004 *Spatiotemporal Dynamics and Collective Behaviors in Coupled Nonlinear Systems* (Beijing: Higher Education Press) (in Chinese) [郑志刚 2004 耦合非线性系统的时空动力学与合作行为 (北京: 高等教育出版社)]
- [41] Petras I 2011 *Fractional-Order Nonlinear Systems Modeling, Analysis and Simulation* (1st Ed.) (Beijing: Higher Education Press) p19

# Direct transport of fractional overdamped deterministic motors in spatial symmetric potentials driven by biharmonic forces\*

Xie Tian-Ting<sup>1)2)</sup> Zhang Lu<sup>1)</sup> Wang Fei<sup>1)</sup> Luo Mao-Kang<sup>1)†</sup>

1) (*College of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, China*)

2) (*Science and Technology on Electronic Information Control Laboratory, Southwest China Research Institute of Electronic Equipment, Chengdu 610036, China*)

( Received 3 May 2014; revised manuscript received 28 July 2014 )

## Abstract

Physical significance of fractional damping for order  $0 < p < 2$  is demonstrated from the perspective that it can be explained as the memory of acceleration. Based on Caputo's fractional derivatives, the transport phenomenon of fractional overdamped deterministic motors in spatial symmetric potentials driven by biharmonic forces is investigated numerically. Relationships between transport velocity and model parameters are analyzed. The effect of fractional order is discussed in detail. Research shows that the contribution of historical acceleration increases or decreases monotonously with the historical moment varying with different fractional orders. With certain parameters the transport velocity can show generalized resonance when the spatial potential depth or the external force frequency varies. Furthermore, for some large orders, the velocity varies in step with the variation of potential depth and is in a direct proportional to the frequency if there is transport. Effect of fractional damping is intimately linked with the shape of the force. The memory of damping force can promote or inhibit the particle transport under different conditions, thus triggering abundant transport behaviors.

**Keywords:** deterministic motor, symmetric potential, biharmonic input, fractional

**PACS:** 05.60.Cd, 45.10.Hj

**DOI:** [10.7498/aps.63.230503](https://doi.org/10.7498/aps.63.230503)

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11171238) and the Science and Technology on Electronic Information Control Laboratory Program, China (Grant No. 2013035).

† Corresponding author. E-mail: [makaluo@scu.edu.cn](mailto:makaluo@scu.edu.cn)