

非各态历经噪声的产生及其应用

柳燕 包景东

Generation and application of non-ergodic noise

Liu Yan Bao Jing-Dong

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, **63**, 240503 (2014) DOI: 10.7498/aps.63.240503

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.240503>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2014/V63/I24>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

带有分数阶阻尼的压电能量采集系统相干共振

Coherence resonance of piezoelectric energy harvester with fractional damping

物理学报.2014, 63(22): 220504 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.220504>

色关联的乘性和加性色噪声激励下分段非线性模型的随机共振

Stochastic resonance in a piecewise nonlinear system driven by colored correlated additive and multiplicative colored noises

物理学报.2014, 63(21): 210501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.210501>

温库边界对布朗热机性能的影响

Influence of the heat reservoir boundary on the performance of Brownian heat engine

物理学报.2014, 63(20): 200501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.200501>

分形基底上受限固-固模型动力学性质的数值模拟研究

Numerical simulations of dynamic properties of the restricted solid-on-solid model on fractal substrates

物理学报.2014, 63(15): 150501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.150501>

2+1 维刻蚀模型生长表面等高线的共形不变性研究

Conformal invariance of isoheight lines of the (2+1)-dimensional etching surfaces

物理学报.2014, 63(15): 150502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.150502>

非各态历经噪声的产生及其应用

柳燕 包景东[†]

(北京师范大学物理系, 北京 100875)

(2014年4月23日收到; 2014年8月13日收到修改稿)

用 n 阶时间导数噪声作为内部热噪声驱动自由粒子运动时, 若该噪声所对应的非各态历经强度 $b \neq 0$, 且系统初始处于热平衡, 则此时系统的长时稳态速度可以作为非各态历经噪声使用. 非各态历经噪声具有谱密度在零频处发散的特点, 一维半无界耦合简谐振子链对与之相连的气体分子的作用具有非各态历经噪声的特点, 是非各态历经噪声的实例. 最后将非各态历经噪声作为外噪声驱动倾斜周期势中的粒子运动, 系统出现扩散指数 $\alpha > 2$ 的超弹道扩散现象. 同时发现系统的速度分布将呈现出迁移态和锁定态两种不同状态, 并且处于迁移态的粒子的速度分布为双峰. 迁移态中双峰的出现是一种比较新奇的现象.

关键词: 非各态历经噪声, n 阶时间导数噪声, 谱密度, 超弹道扩散

PACS: 05.40.-a, 05.20.Gg, 05.10.Ln

DOI: 10.7498/aps.63.240503

1 引言

噪声通常由“强度”、“分布”和“谱”这三个要素来描述^[1], 其中噪声的强度和分布一般为噪声的共性, 噪声的谱则是不同噪声的特性. 将噪声的时间关联函数进行傅里叶变换, 其实部定义为噪声谱密度. 研究发现, 噪声谱在零频附近的行为决定了系统长时间的动力学渐近结果. 如果一个随机变量能够作为噪声使用, 则它必须是一个弱平稳过程, 即其在两个不同时刻的关联函数仅与两时刻差的绝对值有关, 具有时间平移不变性.

现阶段, 理论模拟上运用的噪声大部分为各态历经噪声, 但是近年来人们已经在激光冷却^[2]和闪烁量子点^[3]等越来越多的实验方面发现了各态历经被破坏的现象. 而且理论研究发现, 用简谐速度噪声(HVN)作为内部热噪声驱动一个广义朗之万方程, 在自由场中, 系统的方均速度依赖于系统的初始准备^[4,5], 即系统的速度变量是一个非各态历经量; 并且当系统初始处于热平衡时, 实验粒子的速度满足噪声条件, 可以作为噪声使用, 即此时的长时速度可以作为非各态历经噪声; 若用该非各态

历经速度噪声作为内噪声驱动广义朗之万方程, 实验粒子在自由场和简谐场中出现局域化^[6,7], 并且在自由场中其坐标变量是一个非各态历经量^[8]. 这些理论和实验上的新发现引起了一些研究者对非各态历经噪声及其使系统产生的新现象的关注.

所谓非各态历经噪声, 是指一种特殊的非平衡噪声, 它不仅具有噪声的一般性, 即具有时间平移不变性, 噪声强度一定, 噪声分布是高斯的; 并且具有其特殊性——长时时间关联函数不衰减为零, 具有强关联性, 噪声的这种强关联性同时意味着噪声的非各态历经性.

另一方面, 最近几年, 越来越多的研究者的兴趣转移到了破缺媒介等能够引起反常扩散的系统, 而固体表面的空间破缺通常可以用倾斜周期势^[9]来描述, 倾斜周期势场中的热扩散在物理、化学和生物科学中都有着重要的作用, 如约瑟夫森结、电泳法粒子分离、细胞内分子运输等.

目前对非各态历经噪声产生方式的系统研究还比较少, 所以本文将从朗之万方程出发, 重点研究一种非各态历经噪声的产生方式, 并探究非各态历经噪声作为外部噪声在倾斜周期势场中产生的

[†] 通讯作者. E-mail: jdbao@bnu.edu.cn

新现象.

2 非各态历经噪声的产生方式

2.1 理论分析

随着实验手段的进步,人们对小系统(尺度小于100 nm)的非平衡特性产生了极大的兴趣,在对小系统行为进行深入研究时发现,满足涨落耗散定理的极端非欧姆摩擦系统——弹道扩散系统和局域化系统,在自由场中各态历经被破坏^[10,11].局域化系统对应的记忆阻尼核函数的谱密度在低频发散,使得系统有效阻尼为无穷大,进而导致粒子坐标呈非各态历经性而速度呈各态历经性;弹道扩散系统对应的记忆阻尼核函数的谱密度在低频处为零,使得有效摩擦为零,粒子与环境之间的能量交换不完全,系统呈弹道扩散,粒子速度和坐标都具有非各态历经性.

我们首先从自由场的广义朗之万方程出发,研究哪种系统产生的非各态历经量能够作为噪声使用.

质量为 m 的自由粒子运动满足的广义朗之万方程为

$$m\ddot{x}(t) + m \int_0^t \gamma(t-t')\dot{x}(t')dt' = \xi(t), \quad (1)$$

式中随机力 $\xi(t)$ 是内部噪声, $\gamma(t)$ 为与其相应的阻尼核函数,二者满足第二涨落耗散定理:

$$\langle \xi(t_1)\xi(t_2) \rangle = mk_B T \gamma(|t_1 - t_2|), \quad (2)$$

其中 k_B 是 Boltzmann 常数, T 是热浴的绝对温度.

通过拉普拉斯变换方法,可以分别推出粒子坐标和速度的时间关联函数:

$$\begin{aligned} & \langle \{x(t_1)x(t_2)\} \rangle \\ &= \langle \{x^2(0)\} \rangle + H(t_1)H(t_2) \left(\langle \{v^2(0)\} \rangle - \frac{k_B T}{m} \right) \\ & \quad + \frac{k_B T}{m} [I(t_1) + I(t_2) - I(|t_1 - t_2|)], \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & \langle \{v(t_1)v(t_2)\} \rangle \\ &= h(t_1)h(t_2) \left(\langle \{v^2(0)\} \rangle - \frac{k_B T}{m} \right) \\ & \quad + \frac{k_B T}{m} h(|t_1 - t_2|), \end{aligned} \quad (4)$$

其中, $H(t)$, $h(t)$ 表示响应函数,二者的拉普拉斯变换形式为

$$\hat{H}(z) = \frac{1}{z^2 + z\hat{\gamma}(z)},$$

$$\hat{h}(z) = z\hat{H}(z) = \frac{z}{z^2 + z\hat{\gamma}(z)}, \quad (5)$$

$\hat{\gamma}(z)$ 为阻尼核函数的拉普拉斯变换形式,有 $H(0) = 0$, $h(0) = 1$. 式中 $I(t) = \int_0^t H(\tau)d\tau$, 且 $I(0) = 0$.

从(3), (4)两式可以看出,如果粒子初始速度处于热平衡,即 $\langle \{v(0)\} \rangle = 0$, $\langle \{v^2(0)\} \rangle = k_B T/m$, 则速度关联函数只与时间差 $|t_1 - t_2|$ 有关,满足噪声条件.而自由粒子坐标始终随时间演化,不可能达到平衡态.这说明要寻找非各态历经噪声只能从寻找非各态历经速度入手,所以只能从弹道扩散系统出发,先寻找噪声谱密度在零频处为零的噪声源,然后用该噪声源驱动自由粒子运动,并且令自由粒子初始速度与热浴处于热平衡,则此时粒子的稳态速度可以作为非各态历经噪声使用.

2.2 由 n 阶时间导数噪声^[12]产生非各态历经噪声

用 HVN 作为内部热噪声去驱动自由粒子运动时,若系统初始处于热平衡,则可以得到非各态历经速度噪声.我们知道 HVN 是由一个白噪声驱动一个二阶线性微分方程得到的,对应于 n 阶时间导数噪声中 $n = 2$, $m = 1$ 的情形.所以我们希望从 n 阶时间导数噪声出发,寻找一种能够驱动自由粒子产生非各态历经速度噪声的一般方式.

n 阶时间导数噪声的驱动方程为

$$\begin{aligned} & a_n \frac{d^n}{dt^n} y(t) + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} y(t) + \dots + a_0 y(t) \\ &= \zeta(t), \end{aligned} \quad (6)$$

式中 $\zeta(t)$ 是白噪声,其噪声强度为 D .

如果用方程 $m(1 \leq m \leq n)$ 阶导数 $y^{(m)}(t)$ 作为噪声源,用 $\gamma_m(t)$ 作为相应的阻尼核函数,则

$$\begin{aligned} & \gamma_m(t-s) \\ &= \frac{1}{\mu k_B T} \langle y^{(m)}(t)y^{(m)}(s) \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{\alpha \omega^{2m}}{|\chi_n(\omega)|^2} \exp[i\omega(t-s)], \end{aligned} \quad (7)$$

其中 $\alpha = \gamma_m^2$ ^[13], 且 γ 是相应于白噪声源的阻尼系数, α 与 D 之间的关系为 $D = \mu k_B T \alpha$. $\chi_n(\omega)$ 是 ω 的多项式

$$\chi_n(\omega) = a_n (i\omega)^n + a_{n-1} (i\omega)^{n-1} + \dots + a_0, \quad (8)$$

其所对应的非各态历经强度 $b^{[12]}$ 为

$$b = \frac{1}{1 + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\omega \frac{\alpha\omega^{2m-2}}{|\chi_n(\omega)|^2}}. \quad (9)$$

用 $y^{(m)}(t)$ 作为内部热噪声驱动朗之万方程 (1), 当满足非各态历经强度 $b \neq 0$ 且系统初始处于热平衡时, 系统的速度变量可以作为非各态历经噪声使用. 由此看出, 可以从 n 阶时间导数噪声出发, 寻找出一系列能够驱动自由粒子产生非各态历经速度噪声的噪声源.

当 $n = 1, m = 0$ 时, $b = 0$; 当 $n = 1, m = 1$ 时,

$$b = \frac{1}{1 + \gamma a_1/a_0} \neq 0. \quad (10)$$

可见 $n = 1, m = 1$ 是 $b \neq 0$ 的相对最简单的情况, 也就是能够驱动自由粒子产生非各态历经速度噪声的最简单的噪声源. 当取 $a_1 = \tau_c, a_0 = 1$ 时, 发现此时 $y^{(1)}(t)$ 是 OU 噪声的导数噪声, 我们暂且命名为 DOUN, 其驱动方程为

$$\dot{y} + \frac{1}{\tau_c} y = \frac{1}{\tau_c} \zeta(t). \quad (11)$$

3 非各态历经噪声的特点及实例

3.1 非各态历经噪声的特点

由前面分析可知, 若由 n 阶时间导数噪声驱动的自由粒子速度能作为非各态历经噪声使用, 则其对应的非各态历经强度 $b \neq 0$, 这使得该速度噪声的关联函数中存在常数项. 对存在常数项的噪声关联函数进行傅里叶变换所得的噪声谱密度在零频处必然发散. 即非各态历经噪声的特点是: 谱密度在零频处发散. 另一方面, 若用非各态历经噪声作为内噪声驱动自由粒子运动, 由于非各态历经噪声所对应的响应函数满足 $H(\infty) = 0, h(\infty) = 0$, 则在非各态历经噪声驱动下的自由场系统是局域化的, 此时粒子速度是各态历经的, 而粒子坐标是非各态历经的.

下面对 DOUN 驱动的自由粒子速度噪声 $v_1(t)$ 的谱密度进行分析, 以验证非各态历经噪声的特点.

DOUN 驱动的自由粒子速度噪声 $v_1(t)$ 的关联函数为

$$\begin{aligned} & \{ \langle v_1(t)v_1(0) \rangle \} \\ &= \frac{k_B T}{m} \left(\frac{1}{1 + \gamma\tau_c} + \frac{\gamma\tau_c}{1 + \gamma\tau_c} e^{-\frac{1+\gamma\tau_c}{\tau_c}|t|} \right), \quad (12) \end{aligned}$$

对应的谱密度函数

$$\begin{aligned} s_1(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \langle v_1(t)v_1(0) \rangle \exp(i\omega t) dt \\ &= \frac{k_B T}{m} \frac{1}{1 + \gamma\tau_c} \delta(\omega) + \frac{k_B T}{m} \\ &\quad \times \frac{2\gamma\tau_c^2}{(1 + \gamma\tau_c)^2 + \omega^2\tau_c^2}, \quad (13) \end{aligned}$$

由上式可得 $\lim_{\omega \rightarrow 0} s_1(\omega) \rightarrow \infty$.

$v_1(t)$ 作为噪声的阻尼核函数为

$$\begin{aligned} \beta_1(t) &= A + \beta'_1(t) \\ &= \frac{1}{1 + \gamma\tau_c} + \frac{\gamma\tau_c}{1 + \gamma\tau_c} e^{-\frac{1+\gamma\tau_c}{\tau_c}|t|}, \quad (14) \end{aligned}$$

上式中 $A = 1/(1 + \gamma\tau_c)$.

噪声的响应函数 $H(t), h(t)$ 的拉普拉斯变换形式为

$$\begin{aligned} \hat{H}(z) &= \frac{1}{z^2 + z\beta'_1(z) + A}, \\ \hat{h}(z) &= \frac{z}{z^2 + z\beta'_1(z) + A}. \quad (15) \end{aligned}$$

根据终值定理, 当 $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ 存在时, 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{z \rightarrow 0} z\hat{f}(z). \quad (16)$$

所以响应函数满足

$$\begin{aligned} H(0) &= 0, \quad H(\infty) = 0, \quad h(0) = 1, \\ h(\infty) &= 0, \quad I(\infty) = \int_0^\infty H(t_1) dt_1 = 1/A. \end{aligned}$$

由此可以求得用非各态历经噪声 $v_1(t)$ 作为内噪声驱动自由粒子运动, 在长时极限下, 粒子坐标和速度二次矩的稳态值为

$$\begin{aligned} \langle x^2(t) \rangle_{st} &= \{x_0^2\} + \frac{2k_B T}{mA}, \\ \langle v^2(t) \rangle_{st} &= \frac{k_B T}{m}. \quad (17) \end{aligned}$$

从 (17) 式可以看出, 长时间后, 粒子的方均位移不再随时间变化, 也就是系统局域化, 并且粒子方均位移的渐进值依赖于系统坐标的初始准备, 说明粒子位移是非各态历经的. 粒子速度满足能量均分定理, 且与初始分布无关, 表明粒子速度是各态历经的.

HVN 驱动的自由粒子速度噪声 $v_2(t)$ 的谱密度在零频处也发散, 并且分析得到, 在长时极限下, $v_2(t)$ 作为内噪声驱动的自由场系统也是局域化的, 系统位移是非各态历经的, 系统速度是各态历经的. 这再次验证了非各态历经噪声的特点.

3.2 非各态历经噪声的实例

无论是理论上还是实验上, 气体分子与固体表面的非弹性碰撞问题一直能够引起研究者的兴趣^[14-17], 研究这一问题使用最广的是 Zwanzig 模型^[18], 即将固体表面简化为一维半无界的耦合简谐振子链.

我们通过对角化技术将与一维半无界简谐振子链耦合的气体分子感受到的噪声影响做分析. 质量为 M 的气体分子 (标为 0) 与有限数目的简谐振子链耦合, 振子链一端固定另一端自由, 模型见图 1.

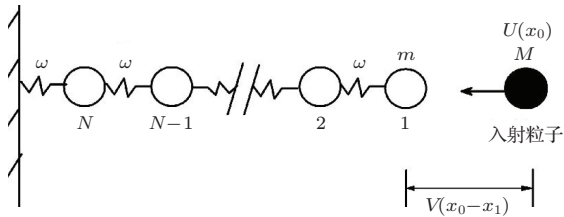


图 1 气体分子与一端固定简谐振子链相互作用的模型示意图

假设气体分子只与自由端振子 (标为 1) 直接耦合, 相互作用取为

$$V(x_0 - x_1) = \frac{1}{2}m\omega^2(x_0 - x_1)^2.$$

若粒子被置于外部束缚场 $U(x_0)$ 中, 则总哈密顿量写作^[19]:

$$H = \frac{p_0^2}{2M} + U(x_0) + \frac{1}{2}m\omega^2(x_0 - x_1)^2 + \sum_{i=1}^N \left[\frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(x_i - x_{i+1})^2 \right], \quad (18)$$

其中 x_0 是气体分子的坐标, p_i 和 x_i 分别表示第 i 个振子的动量和坐标, 且有 $x_{N+1} = 0$. 为简单起见, 气体分子和每个振子的质量取 $M = m = 1$.

利用对角化技术对 (18) 式进行变换, 然后将得到的气体分子满足的朗之万方程进行拉普拉斯变换, 可得到在无外场时气体分子感受到的噪声的谱密度为

$$s(\omega') = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \xi(t)\xi(0) \rangle \exp(i\omega't) dt = k_B T \Omega^2 \delta(\omega') + \frac{2\omega^2}{N+1} \left(1 - \frac{\omega'^2}{2\omega^2} \right), \quad (19)$$

由 (19) 式可得 $\lim_{\omega' \rightarrow 0} s(\omega') \rightarrow \infty$, 符合非各态历经噪声特点.

因此可以断定, 一维半无界耦合简谐振子链与之相连的气体分子的作用确实相当于非各态历经噪声, 是非各态历经噪声的实例.

4 非各态历经噪声在倾斜周期势中的应用

文献^[20]中提出, 若将处于超欧姆阻尼中的粒子置于倾斜周期势中的, 系统会出现锁定态和迁移态两个状态, 并且由于粒子不断地在两种状态中进行转化, 使得系统能够出现 $\langle \Delta x^2(t) \rangle \propto t^\alpha$, $\alpha > 2$ 的超弹道扩散现象. 文献^[21]中指出, 处于倾斜周期势中的粒子, 若受到 Lévy 噪声和非线性阻尼影响时, 也能够出现超弹道扩散现象, 这也是由于速度双模的存在, 但与前一种研究不同, 此时的速度双模不再是绝对的锁定态和迁移态, 而是相对锁定态和迁移态, 相对锁定态使得系统粒子的空间坐标具有长尾分布, 在这种情况下可以用群速和相速的中心距离随时间增加来解释超弹道扩散现象.

下面我们用非各态历经速度噪声 $v_1(t)$ 作为外噪声, 驱动倾斜周期势中的粒子运动, 用二阶龙格库塔算法进行蒙特卡罗模拟, 观察系统的扩散现象.

质量为 M 的粒子在外噪声驱动下满足的一维朗之万方程为

$$M\ddot{x} = -\eta M\dot{x} - \frac{\partial U}{\partial x} + D'v_1(t), \quad (20)$$

式中 η 为一般阻尼系数, D' 既是为保证噪声与其他各量纲相同而乘的常数, 也可以用来调节外噪声强度.

倾斜周期势 $U(x)$ 取作

$$U(x) = V_0(x) - Fx = -U_0 \cos(2\pi x/L) - Fx, \quad (21)$$

L 为周期势场 $V_0(x)$ 的周期, F 为倾斜力. 当倾斜力 F 小于临界值 $F_c = \max_x V_0'(x) = 2\pi U_0/L$ 时, $U(x)$ 存在局域极小值; 如果倾斜力 F 大于 F_c , 则局域极小消失. 当 U_0 取 1, L 取 2π 时, 倾斜力 F 的临界值为 1.

通过引入附加变量, 并无量纲化后, 将 (1),

(11) 和 (20) 式化为

$$\begin{aligned} v(t) &= \dot{x}(t), \\ \dot{v}(t) &= -\eta \cdot v(t) - \frac{\partial U}{\partial x} + D' \cdot v_1(t), \\ \dot{v}_1(t) &= -v_1(t) + P(t) + \sqrt{2T}\varepsilon(t), \\ \dot{P}(t) &= -\frac{P(t)}{\tau_c} + \frac{v_1(t)}{\tau_c} - \frac{1}{\tau_c}\sqrt{2T}\varepsilon(t), \end{aligned} \quad (22)$$

式中 $\varepsilon(t) = (1/\sqrt{2D})\zeta(t)$.

$v_1(x)$ 和附加变量 P 在无量纲条件下的初始分布满足

$$\{v_1(0)\} = 0, \quad \{v_1^2(0)\} = T, \quad (23)$$

$$\{P(0)\} = 0, \quad \{P^2(0)\} = T/\tau_c. \quad (24)$$

对 (22) 式进行蒙特卡罗模拟, 发现将非各态历经噪声 $v_1(t)$ 作为外噪声驱动倾斜周期势中的粒子运动时, 系统也能够出现 $\langle \Delta x^2 \rangle \propto t^\alpha, \alpha > 2$ 的超弹道扩散现象. 图 2 为在模拟时间 $t = 1000$ 附近时, 扩散指数 α 随倾斜力 F 的变化, 可以看出, 在其他参量一定时, 扩散指数 α 随倾斜力 F 呈现非单调变化, 在 $F = 0.69$ 附近, 扩散指数最大, 为 2.8 左右.

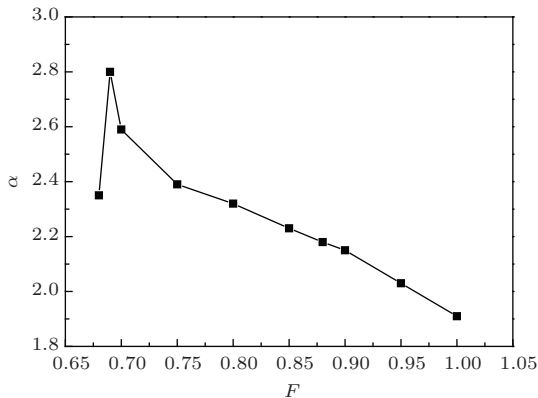


图 2 扩散指数 α 随倾斜力 F 的变化 参量取作 $\tau_c = 1.0, T = 0.01, \eta = 0.5, N = 100000$, 时间步长 $dt = 0.01$, 粒子初始全部置于同一势阱中 (如无特殊说明, 文章该部分的参数取值相同)

需要说明的是, 模拟发现, 扩散指数最大值的位置和大小是由势场、阻尼和噪声共同作用决定的, 并不是简单的倍数关系. 例如当其他参量不变, 系统阻尼取为 $\eta = 0.1$ 时, 扩散指数最大值出现在 $F = 0.6$ 附近, 且为 3.0 左右; 当系统阻尼依然取 $\eta = 0.5$, 仅把 U_0 取为 2.0 时, 倾斜力 F 的临界值变为 2.0, 此时扩散指数最大值出现在 $F = 1.7$ 附近, 且为 2.5 左右.

通过蒙特卡罗模拟对每一个倾斜力 F 所对应

的系统的坐标和速度分布进行深入分析发现, 当倾斜力较小 (小于 0.68 左右) 时, 在模拟时间窗口内, 粒子将全部锁定在初始位置所在的势阱中, 系统局域化, 此时扩散指数为零.

当倾斜力逐渐增大 (大于 0.68, 小于 0.95 左右) 时, 有少量粒子在噪声的影响下越过势垒, 此时迁移态和锁定态共存, 并且处于锁定态的粒子将在噪声和倾斜力的影响下逐渐转化为迁移态, 这种剧烈的转化过程加速了系统的扩散, 从而导致 $\langle \Delta x^2 \rangle \propto t^\alpha, \alpha > 2$ 的超弹道扩散现象的出现.

当出现超弹道扩散时, 系统相对稳定状态的扩散指数的大小与系统内粒子从锁定态向迁移态转化的剧烈程度有关, 而转化的剧烈程度与倾斜力有关, 倾斜力越大, 粒子在两态之间转化的剧烈程度越小, 扩散指数越小.

但扩散指数并不是随着倾斜力的增大而无限限制地减小的, 当倾斜力不断接近临界值时 (此处临界值为 $F_c = 1.0$), 势场的局域极小逐渐消失, 周期势场逐渐失去作用, 系统内大部分的粒子将进入迁移态, 粒子相当于在倾斜场中运动, 系统做弹道扩散, 扩散指数 α 在 2.0 左右.

图 3 为在倾斜力 F 分别为 0.7, 0.8, 0.9 和 1.0 时, 扩散指数 α 随模拟时间 t 的变化. 可以看出, 倾斜力 F 为 0.7 左右时, 系统的扩散指数较大, 但由于处于锁定态的粒子数较多, 迁移态的粒子数较少, 统计出的扩散指数随时间变化的曲线波动较大. 随着倾斜力的增大, 系统处于迁移态的粒子数逐渐增多, 系统从锁定态向迁移态转化的剧烈程度逐渐降低, 扩散指数逐渐减小, 并逐渐接近 $\alpha = 2.0$ 左右. 同时, 由于迁移态的粒子数较多, 统计出的扩散指数随时间变化的曲线相对较光滑.

在对粒子的速度分布做进一步的分析时, 我们发现了一个有趣的现象, 用非各态历经噪声 $v_1(t)$ 作为外噪声驱动倾斜周期势中的粒子运动时, 系统不仅能出现锁定态和迁移态, 而且迁移态的粒子速度将出现双峰. 图 4 给出了当倾斜力 $F = 0.9$ 时系统在 $t = 1500$ 时的速度分布. 图 5 给出了迁移态粒子位置分布在任意四个时刻的图像 (图中略去了处于锁定态的位置分布部分), 为显示出处于迁移态的粒子数随时间增加, 我们用粒子数表示分布. 可以看出, 虽然位置分布最前面的峰值不断减小, 但由于粒子分布范围逐渐变大, 处于迁移态的粒子数逐渐增多, 并且坐标分布出现一个长尾, 加速了粒

子的扩散,使得系统出现扩散指数大于2的超弹道扩散现象.

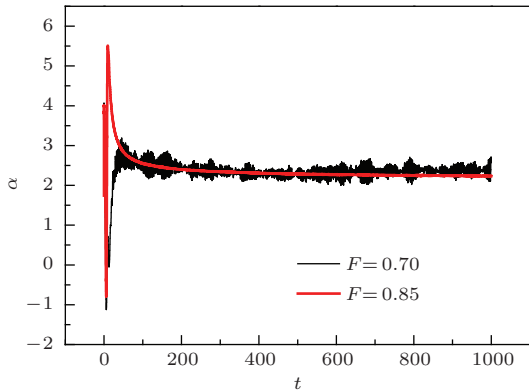


图3 (网刊彩色) 不同倾斜力 F 时扩散指数 α 的值随时间的变化

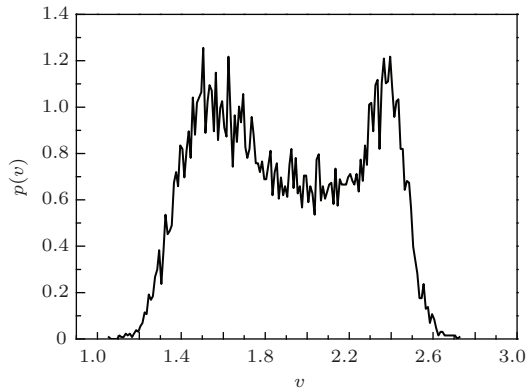


图4 倾斜力 $F = 0.9$ 时系统迁移态的速度分布

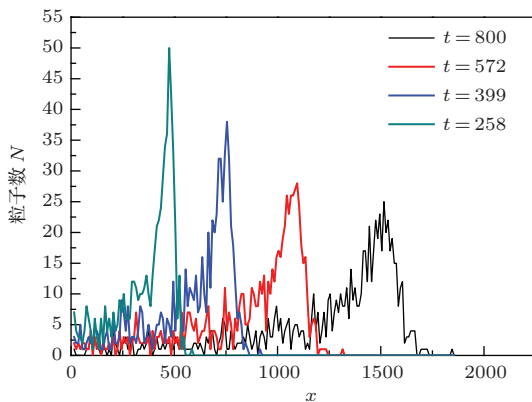


图5 (网刊彩色) 迁移态粒子位置分布在任意四个时刻的图像

5 结 论

本文给出了一种由 n 阶时间导数噪声驱动自由粒子运动产生非各态历经速度噪声的一般方法,

并分析得出非各态历经噪声具有噪声谱在零频处发散的特性,进而根据该特性寻找到非各态历经噪声的实例——一维半无界耦合简谐振子链对与之相连的气体分子的作用相当于非各态历经噪声.最后将获得的非各态历经噪声在倾斜周期势中进行了简单应用,发现将非各态历经噪声作为外噪声驱动倾斜周期势中的粒子运动时,系统不仅存在锁定态和迁移态,而且迁移态的速度分布呈现双峰现象.锁定态的粒子不断向迁移态转化,处于速度较小的迁移态的粒子不断向速度较大的迁移态转化,粒子的两种剧烈转化过程加速了系统的扩散过程,使系统出现强烈的非平衡效应,即超弹道扩散(扩散指数 $\alpha > 2$) 现象.

参考文献

- [1] Bao J D 2009 *Random Simulation Method of Classical and Quantum Dissipation System* (Beijing: Science Press) p80 (in Chinese) [包景东 2009 经典和量子耗散系统的随机模拟方法 (北京: 科学出版社) 第 80 页]
- [2] Saubamea B, Leduc M, Cohen-Tannoudji C 1999 *Phys. Rev. Lett.* **83** 3796
- [3] Brokman X, Hermier J P, Messin G, Deebiolles P, Bouchard J P, Dahan M 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 120601
- [4] Bao J D, Zhou Y Z 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 138104
- [5] Bao J D, Bai Z W 2005 *Chin. Phys. Lett.* **22** 1845
- [6] Leggett A J 1980 *Theor. Phys. Suppl.* **69** 80
- [7] Lu H, Qin L, Bao J D 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 8127 (in Chinese) [卢宏, 覃莉, 包景东 2009 物理学报 **58** 8127]
- [8] Lu H, Bao J D 2013 *Chin. Phys. Lett.* **30** 010502
- [9] Reimann P 2002 *Phys. Rep.* **361** 57
- [10] Moreira A A, Luís A, Amaral N 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 218702
- [11] Bai Z W, Meng G Q 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 7477 (in Chinese) [白占武, 蒙高庆 2008 物理学报 **57** 7477]
- [12] Bao J D, Hänggi P, Zhou Y Z 2005 *Phys. Rev. E* **72** 061107
- [13] Bao J D, Song Y L, Zhou Y Z 2005 *Phys. Rev. E* **72** 011113
- [14] Ford G W, Kac M, Mazur P 1965 *J. Math. Phys.* **6** 504
- [15] Ford G W, Lewis J T, O'Connell R F 1988 *J. Stat. Phys.* **53** 439
- [16] Ford G W, Lewis J T, O'Connell R F 1988 *Phys. Rev. A* **37** 4419
- [17] Rosa J, Beims M W 2008 *Phys. Rev. E* **78** 031126
- [18] Zwanzig R W 1960 *J. Chem. Phys.* **32** 1173
- [19] Weiss U 1999 *Quantum Dissipative Systems* (2nd Ed.) (Singapore: World Scientific)
- [20] Lü K, Bao J D 2007 *Phys. Rev. E* **76** 061119
- [21] Bao J D, Liu J 2013 *Phys. Rev. E* **88** 022153

Generation and application of non-ergodic noise

Liu Yan Bao Jing-Dong[†]

(Department of Physics, Beijing Normal University, Beijing 100875, China)

(Received 23 April 2014; revised manuscript received 13 August 2014)

Abstract

When using the noise of n -order time derivative as an internal thermal noise to drive a generalized Langevin equation, if the nonergodicity strength of the noise satisfies $b \neq 0$ and the system is in thermal equilibrium, then the stationary velocity variable of the system can be used as a non-ergodic noise. The spectra of the non-ergodic noise is infinite at zero frequency. The one-dimensional semi-unbounded coupled harmonic oscillator chains connected with the gas molecules act as the non-ergodic noise, which is an example of non-ergodic noise. Finally regarding the non-ergodic noise as an external noise to drive the particles in the titled periodic potential, it is found that there appears superballistic diffusion with the effective diffusion index exceeding a ballistic value of 2. It is also found that the velocity distribution of the system displays two motion states, the “locked state” and the “running state”. And in the “running state” there occurs a bimodal phenomenon, which is a relatively new phenomenon.

Keywords: non-ergodic noise, the noise of n -order time derivative, the spectra of the noise, superballistic diffusion

PACS: 05.40.-a, 05.20.Gg, 05.10.Ln

DOI: [10.7498/aps.63.240503](https://doi.org/10.7498/aps.63.240503)

[†] Corresponding author. E-mail: jdbao@bnu.edu.cn