原子与耦合腔相互作用系统中的量子失协^{*}

李锐奇 卢道明

(武夷学院机电工程学院,武夷山 354300)

(2013年8月30日收到; 2013年10月22日收到修改稿)

本文研究由两个全同的二能级原子和耦合腔构成的系统,利用 Dakic 等提出的几何量子失协的度量方法, 采用数值计算方法计算了系统中两原子间和两腔场间量子失协的演化.讨论了原子间初始纠缠度和腔场间耦 合系数变化对几何量子失协演化的影响.研究发现:随腔场间耦合系数的增大,量子失协周期性演化的频率 增大;随原子间初始纠缠度的增大,两原子间的关联增强,两腔场间的关联减弱.

关键词:量子光学,二能级原子,耦合腔,几何量子失协 PACS: 03.65.Ud, 42.50.Dv

DOI: 10.7498/aps.63.030301

1引言

纠缠是量子力学特有的概念,反映了两个或 多个子系统间的关联和不可分离性,展现了量子 力学不同于经典力学的独特性质. 它最早被Einstein, Podolsky和Rosen(EPR)提出^[1]. 量子纠缠 长期以来被认为是进行量子信息处理和量子计算 的核心资源. 到目前为止, 已对不同原子与光场相 互作用系统,以及不同量子态的纠缠作了大量研 究^[2-9].另一方面, 腔量子电动力学 (QED) 为实现 量子信息处理和量子计算提供了物理实验平台,而 耦合腔系统在分布式量子计算中具有重要应用.因 此,近年来耦合腔系统已成为量子光学研究的热门 课题^[10-14].例如,Yin等提出了利用耦合腔系统实 现量子态转换和量子逻辑门的方案^[10]. 文献 [11] 讨论了耦合腔系统中两原子间的纠缠特性.本人 研究了三耦合腔系统中纠缠的演化^[12].然而,量 子纠缠只是量子关联的一部分,近年来对量子纠缠 的研究中发现: 在一些情况中, 虽然纠缠消失了, 但仍然存在非经典关联.为了获得量子系统中的 量子关联, Ollivier 和Zurek 引入了量子失协这一 物理量来度量量子关联[15]. 近年来, 人们已对不 同系统中的量子失协作了深入研究^[16-26].研究表 明量子失协是一个比纠缠更为基本的概念.例如, Dakic等获得了双粒子态存在非零量子失协的充 分必要条件,提出了确定量子失协的几何方法^[16]. 樊开明等利用几何量子失协研究了有阻尼存在的 Jaynes-Cummings模型中两原子的量子关联动力 学^[17].Wang等讨论了双Jaynes-Cummings模型 中的量子失协^[18].Xu等研究了消相干情况下三粒 子W态的量子失协与量子纠缠之间的关系^[26].本 文考虑两个二能级原子与耦合腔相互作用系统,应 用几何量子失协来研究系统中两原子间的关联动 力学,具体计算了系统中两原子间和腔场间的几何 量子失协.研究发现:几何量子失协受腔场间耦合 系数变化影响,并与原子间初始纠缠度有关.

2 理论模型

我们研究的耦合腔模型如图1所示.两个全同 二能级原子 (原子1和原子2)分别被囚禁在单模腔 A和B中.考虑原子与腔场发生共振相互作用的情 况,在旋波近似下整个系统的相互作用哈密顿为

$$H_I = f_1(a_{\rm A}s_1^+ + a_{\rm A}^+s_1^-) + f_2(a_{\rm B}s_2^+ + a_{\rm B}^+s_2^-)$$

^{*} 福建省自然科学基金 (批准号: 2011J01018) 资助的课题.

[†]通讯作者. E-mail: daominglu79@hotmail.com

^{© 2014} 中国物理学会 Chinese Physical Society

$$+ J(a_{\rm A}a_{\rm B}^+ + a_{\rm A}^+ a_{\rm B}), \qquad (1)$$

式中 a_{A}^{+} , $a_{A}(a_{B}^{+}, a_{B})$ 表示腔场的产生和湮没算 符, s_{i}^{+} 和 $s_{i}^{-}(i = 1, 2)$ 表示第i个原子的跃迁算符. $f_{i}(i = 1, 2)$ 表示第i个腔中原子与腔场的耦合系数, J为两个腔之间的耦合系数.



图1 系统的框图

假设初始时刻系统的激发数等于1.由于在 演化过程中系统的激发数守恒,那么,系统将在以 $|\varphi_1\rangle = |e_1\rangle |g_2\rangle |0_A\rangle |0_B\rangle, |\varphi_2\rangle = |g_1\rangle |g_2\rangle |1_A\rangle |0_B\rangle,$ $|\varphi_3\rangle = |g_1\rangle |g_2\rangle |0_A\rangle |1_B\rangle, |\varphi_4\rangle = |g_1\rangle |e_2\rangle |0_A\rangle |0_B\rangle$ 为基矢构成的希尔伯特空间中演化.在 $|\varphi_i\rangle$ 表示 的态中, $|e_i\rangle (|g_i\rangle) (i = 1, 2)$ 表示第*i*个原子处于激 发态(基态),而 $|m\rangle_i$ (*i* = A, B)表示第*i*个腔处于 Fock态.任意时刻*t*系统的态矢为

$$|\varphi(t)\rangle = C |\varphi_1\rangle + E |\varphi_2\rangle + F |\varphi_3\rangle + G |\varphi_4\rangle. \quad (2)$$

在相互作用表象中,态矢的演化遵守下列薛定谔 方程

$$i\hbar \frac{\partial |\varphi(t)\rangle}{\partial t} = H_I |\varphi(t)\rangle.$$
(3)

取 ħ = 1, 将 (1) 和 (2) 式代入 (3) 式, 可得出

$$i\frac{dC}{dt} = f_1 E,$$

$$i\frac{dE}{dt} = f_1 C + JF,$$

$$i\frac{dF}{dt} = JE + f_2 G,$$

$$i\frac{dG}{dt} = f_2 F.$$
 (4)

利用初始条件, 解方程 (4), 解得初态为 $|\varphi_i\rangle(i = 1, 2, 3, 4)$ 时系统对应的态矢演化规律为

$$\begin{aligned} |\varphi_i(t)\rangle = &C_i |\varphi_1\rangle + E_i |\varphi_2\rangle + F_i |\varphi_3\rangle \\ &+ G_i |\varphi_4\rangle, \end{aligned}$$
(5)

$$\begin{split} C_1 &= \frac{Jf_1}{H} \left(\frac{Jf_1}{\alpha^2 - f_1^2} \cos \alpha t - \frac{Jf_1}{\beta^2 - f_1^2} \cos \beta t \right), \\ E_1 &= -i \frac{Jf_1}{H} \left(\frac{\alpha J}{\alpha^2 - f_1^2} \sin \alpha t - \frac{\beta J}{\beta^2 - f_1^2} \sin \beta t \right), \\ F_1 &= \frac{Jf_1}{H} (\cos \alpha t - \cos \beta t), \\ G_1 &= -i \frac{Jf_1}{H} \left(\frac{f_2}{\alpha} \sin \alpha t - \frac{f_2}{\beta} \sin \beta t \right), \\ C_2 &= i \frac{J^2 f_1}{H} \left(\frac{\beta}{\beta^2 - f_1^2} \sin \beta t - \frac{\alpha}{\alpha^2 - f_1^2} \sin \alpha t \right), \\ E_2 &= \frac{J^2}{H} \left(\frac{\alpha^2}{\alpha^2 - f_1^2} \cos \alpha t - \frac{\beta^2}{\beta^2 - f_1^2} \cos \beta t \right), \\ F_2 &= i \frac{J}{H} (\beta \sin \beta t - \alpha \sin \alpha t), \\ G_2 &= \frac{Jf_1}{H} (\cos \alpha t - \cos \beta t), \\ C_3 &= \frac{Jf_1}{H} (\cos \alpha t - \cos \beta t), \\ E_3 &= i \frac{J}{H} (\beta \sin \beta t - \alpha \sin \alpha t), \\ F_3 &= \frac{1}{H} [(\alpha^2 - f_1^2) \cos \alpha t - (\beta^2 - f_1^2) \cos \beta t], \\ G_3 &= i \frac{f_2}{H} \left(\frac{\beta^2 - f_1^2}{\beta} \sin \beta t - \alpha \sin \alpha t \right), \\ C_4 &= -i \frac{J}{H} (\beta \sin \alpha t - \alpha \sin \beta t), \\ E_4 &= \frac{Jf_2}{H} (\cos \alpha t - \cos \beta t), \\ F_4 &= -i \frac{f_2}{H} \left(\frac{\alpha^2 - f_1^2}{\alpha} \sin \alpha t - \frac{\beta^2 - f_1^2}{\beta} \sin \beta t \right), \\ G_4 &= \frac{f_2^2}{H} \left(\frac{\alpha^2 - f_1^2}{\alpha^2} \cos \alpha t - \frac{\beta^2 - f_1^2}{\beta^2} \cos \beta t \right), \\ H &= [(f_1^2 + f_2^2 + J^2)^2 - 4f_1^2 f_2^2]^{1/2}, \\ \alpha &= 2^{-1/2} \{ f_1^2 + f_2^2 + J^2 - [(f_1^2 + f_2^2 + J^2)^2 - 4f_1^2 f_2^2]^{1/2} \}^{1/2}. \end{split}$$

若初始时刻两原子处于纠缠态 $\cos \theta |eg\rangle + \sin \theta |ge\rangle$, 腔场处于真空态,那么,系统的初态为 $|\psi\rangle = \cos \theta |\varphi_1\rangle + \sin \theta |\varphi_4\rangle$,其中 θ 是描述原子初始纠缠 度的参数. *t* 时刻系统的态矢演化为

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle = C |\varphi_1\rangle + E |\varphi_2\rangle + F |\varphi_3\rangle + G |\varphi_4\rangle \\ C = C_1 \cos \theta + C_4 \sin \theta, \\ E = E_1 \cos \theta + E_4 \sin \theta, \\ F = F_1 \cos \theta + F_4 \sin \theta, \end{aligned}$$

$$G = G_1 \cos \theta + G_4 \sin \theta. \tag{7}$$

3 几何量子失协

量子失协被定义为系统中总的关联量与经典 关联之差,它的计算是一项非常困难的工作.但 是,对于两体两维系统,Dakic等提出了量子失协 的几何度量方法,即GQD (geometrical quantum discord).对于一个两体量子系统,若描述两子系统 的密度矩阵ρ可以表示为

$$\rho = \frac{1}{4} \left[I \otimes I + \sum_{i=1}^{3} \left(a_i \sigma_i \otimes I + b_i I \otimes \sigma_i \right) + \sum_{i,j=1}^{3} T_{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j \right],$$
(8)

式中I表示单位矩阵, $\sigma_i(i = x, y, z)$ 为泡利矩阵,

$$a_{i} = \operatorname{Tr} \rho(\sigma_{i} \otimes I),$$

$$b_{i} = \operatorname{Tr} \rho(I \otimes \sigma_{i}),$$

$$T_{ij} = \operatorname{Tr} \rho(\sigma_{i} \otimes \sigma_{j}),$$
(9)

式中Tr表示求迹,那么,对应的两体系统的GQD 为^[16]

$$D(\rho) = \frac{1}{4} \left(\|a\|^2 + \|T\|^2 - k_{\max} \right).$$
(10)



式中 $a = (a_1, a_2, a_3)^{t}$ 表示列向量, $||a||^2 = \sum_{i=1}^{3} a_i^2$, $T = \{T_{ij}\}$ 是个矩阵, $||T||^2 = \text{Tr}(T^{t}T)$, k_{max} 为矩 阵 $aa^{t} + TT^{t}$ 的最大本征值, 上标t表示矢量或者矩 阵的转置.

3.1 两原子间的几何量子失协

下面我们讨论系统中两原子间的几何量子失 协GQD. 利用(2)式,以 $|e_1\rangle|e_2\rangle$, $|e_1\rangle|g_2\rangle$, $|g_1\rangle|e_2\rangle$, $|g_1\rangle|g_2\rangle$ 为基矢,可得出描述两原子体系的密度矩 阵为

$$\rho_{12} = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & |C|^2 & CG^* & 0 \\
0 & GC^* & |G|^2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & |E|^2 + |F|^2
\end{bmatrix}.$$
(11)

利用(9)式和(11)式,通过计算不难得出

$$a_{1} = a_{2} = 0, \quad a_{3} = 2 |C|^{2} - 1,$$

$$b_{1} = b_{2} = 0, \quad b_{3} = 2 |G|^{2} - 1,$$

$$T_{11} = CG^{*} + C^{*}G = T_{22},$$

$$T_{12} = -i(CG^{*} - C^{*}G) = T_{21}^{*},$$

$$T_{33} = 2(|E|^{2} + |F|^{2}) - 1,$$
 (12)



图 2 原子 1 与原子 2 间量子失协 D_{12} 随规范时间的演化 (a) J = 0.5f; (b) J = f; (c) J = 2.0f; (d) J = 4.0f

其余 T_{ij} 等于 0. 利用 (10) 式和 (12) 式可得出

$$TT^{t} = \begin{bmatrix} 4 |CG|^{2} & 0 & 0 \\ 0 & 4 |CG|^{2} & 0 \\ 0 & 0 & T'_{44} \end{bmatrix},$$

$$D_{12} = \frac{1}{4} [8 |CG|^{2} + 1 - 4(|E|^{2} + |F|^{2}) + 4(|E|^{2} + |F|^{2})^{2} + (2 |C|^{2} - 1)^{2} - k_{\max}],$$

$$k_{\max} = \max\{k_{1}, k_{2}, k_{3}\}.$$
(13)

式中



图 3 不同初始纠缠度情况下 D₁₂ 随规范时间的演化

另一方面,为了讨论原子间的初始纠缠度对 GQD的影响,取J = f, θ 分别取0, $\pi/12$, $\pi/6$, $\pi/4$ 情况下, D_{12} 的演化如图3所示.从图3得出:随 θ 逐渐增大,即原子间初始纠缠度的增大,一方面, D_{12} 的演化从不规则振荡向有规则的周期性振荡 转变,即振荡的规律性逐渐增强:另一方面,曲线 重心上移,表明两原子间的GQD增强.

3.2 腔场A与腔场B间的几何量子失协

利用 (7) 式, 以 $|1\rangle_{A} |1\rangle_{B}$, $|1\rangle_{A} |0\rangle_{B}$, $|0\rangle_{A} |1\rangle_{B}$, $|0\rangle_{A} |0\rangle_{B}$ 为基矢, 可得到描述腔 A 和腔 B 体系的密

$$k_3 = [2(|E|^2 + |F|^2) - 1]^2 + (2|C|^2 - 1)^2,$$

$$T'_{44} = [2(|E|^2 + |F|^2) - 1]^2.$$

利用 (13) 式, 可对两原子间的量子失协 D_{12} 进行数 值计算, 计算结果如图 2 所示. 图中对应的参数为 $f_1 = f_2 = f$, $\theta = \pi/4$, 耦合系数 J 分别取 0.5f, f, 2f, 4f. 从图 2 可见: 几何量子失协 D_{12} 随时间作 周期性振荡, 它的演化频率随耦合系数 J 的增大 而增大. 这是因为当 $f_1 = f_2 = f$ 时, 决定系数 C, E, F 和G演化的角频率 α 和 β 均随 J 的增大而增 大, 由 (13) 式可知 D_{12} 的演化频率随 J 的增大而增大.



(a) $\theta = 0$; (b) $\theta = \frac{\pi}{12}$; (c) $\theta = \frac{\pi}{6}$; (d) $\theta = \frac{\pi}{4}$

度矩阵为

$$\rho_{AB} = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & |E|^2 & EF^* & 0 \\
0 & FE^* & |F|^2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & |C|^2 + |G|^2
\end{bmatrix}.$$
(14)

利用(9)式和(14)式,通过计算不难得出

$$a_1 = a_2 = 0,$$

 $a_3 = 2 |E|^2 - 1,$
 $b_1 = b_2 = 0,$
 $b_3 = 2 |F|^2 - 1,$



$$D_{AB} = \frac{1}{4} [8 |EF|^2 + 1 - 4(|C|^2 + |G|^2) + 4(|C|^2 + |G|^2)^2 + (2 |E|^2 - 1)^2 - k_{max}],$$

$$k_{max} = \max\{k_1, k_2, k_3\}.$$
 (17)

式中

 $k_{1} = k_{2} = 4 |EF|^{2},$ $k_{3} = [2(|C|^{2} + |G|^{2}) - 1]^{2} + (2 |E|^{2} - 1)^{2},$ $T_{44}^{c} = [2(|C|^{2} + |G|^{2}) - 1]^{2}.$

同样, 取 $f_1 = f_2 = f$, $\theta = \pi/4$. 图 4 展示了 D_{AB} 的 演化曲线, 图 4 (a), (b), (c) 和 (d) 分别与耦合系数 J 取 0.5f, f, 2f, 4f 相对应. 从图 4 可见: 几何量 子失协 D_{AB} 的演化规律与 D_{12} 有相似的演化规律, 其演化频率也随耦合系数 J 的增大而增大. 不同之 处是 D_{AB} 随 J 的增大而减小. 这表明随腔场间耦 合的增强两腔场间的关联减弱.

另一方面,同样取J = f, θ 分别取0, $\pi/12$, $\pi/6$, $\pi/4$ 情况下, D_{AB} 的演化如图5所示. 从 图5得出:一方面,随原子间初始纠缠度的增大, D_{AB} 演化的规律性逐渐增强,当J大于一定值后呈 现出周期性演化规律,这一点与 D_{AB} 的演化规律 一致;另一方面,随原子间初始纠缠度的增大, D_{AB} 的峰值减小,曲线重心下降.这表明随原子间初始 纠缠度的增大,两腔场间的关联减弱.

4 结 论

本文考虑两个二能级原子与耦合腔相互作用 系统,采用Dakic等提出的几何量子失协的度量方 法,数值计算了原子与光场共振相互作用的情况 下,两原子间和两腔场间量子失协的演化.讨论了 原子间初始纠缠度和腔场间耦合系数变化对几何 量子失协演化的影响.研究结果表明:随腔场间耦 合系数的增大,两原子间和两腔场间的量子失协周 期性演化的频率均增大.这是因为量子失协的演化 由角频率α和β决定.而角频率α和β均随J的增 大而增大;随原子间初始纠缠度的增大,量子失协 演化的规律性逐渐增强,当J大于一定值后呈现出 周期性演化规律;另一方面,随原子间初始纠缠度 的增大,两原子间的量子失协曲线重心上移,平均 值增大,这表明两原子间的关联增强.相反两腔场 间的量子失协平均值减小,这表明两腔场间的关联 减小.本文的研究结果能为利用腔QED进行量子 信息处理提供理论参考.

参考文献

- Einstein A, Podolsky B, Rosen N 1935 Phys. Rev. 47 777
- [2] Guo L, Liang X T 2009 Acta phys. Sin. 58 50 (in Chinese)[郭亮, 梁先庭 2009 物理学报 58 50]
- [3] Lu D M 2013 Acta Optica Sinica 33 0127001 (in Chinese) [卢道明 2013 光学学报 33 0127001]
- [4] Wootters W K 1998 Phys. Rev. Lett. 80 2245
- [5] Lu D M 2011 Acta phys. Sin. 60 090302 (in Chinese)[卢 道明 2011 物理学报 60 090302]
- [6]~ Wong A, Christensen N 2001 Phys. Rev. A ${\bf 63}~044301$
- [7] Zhang Y J, Zhou Y, Xia Y J 2008 Acta Phys. Sin. 57
 21 (in Chinese)[张英杰,周原,夏云杰 2008 物理学报 57
 21]
- [8] Wu C, Fang M F 2010 Chin. Phys. B 19 020309
- [9] Chen L, Shao X Q, Zhang S 2009 Chin. Phys. B 18 888
- [10]~ Yin Z Q, Li F L 2007 Phys.~Rev.~A 75 012324
- [11] Zhang B 2010 Optics Communications 283 196
- [12] Lu D M 2012 Acta Phys. Sin. 61 150303 (in Chinese)[卢 道明 2012 物理学报 61 150303]
- [13] Ogden C D, Irish E K, Kim M S 2008 Phys. Rev. A 78 063805
- [14] Serafini A, Mancini S, Bose S 2006 Phys. Rev. Lett. 96 010503
- [15] Ollivier H, Zurek W H 2002 Phys. Rev. Lett. 88 017901
- [16] Dakic B, Vedral V, Brukner C 2010 Phys Rev Lett. 105 190502
- [17] Fan K M, Zhang G F 2013 Acta Phys. Sin. 62 130301 (in Chinese) [樊开明, 张国锋 2013 物理学报 62 130301]
- [18]Wang C, Chen Q H 2013 Chin. Phys. B **22** 040304
- [19] Luo S L, Fu S S 2010 Phys. Rev. A 82 034302
- [20] Giorda P, Paris M G A 2010 Phys. Rev. Lett. 105 020503
- [21] Sarandy M S 2009 Phys. Rev. A 80 022108
- [22]~ Ali M, Rau A R P, Alber G 2010 Phys. Rev. A $\mathbf{81}$ 042105
- [23] Wang B, Xu Z Y, Chen Z Q, Feng M 2010 Phys. Rev. A 81 014101
- [24]~Wang L C, Shen J, Yi X X 2011Chin.~Phys.~B 20050306
- [25] Jiang F J, Lu H J, Yan X H, Shi M J 2013 Chin. Phys. B 22 040303
- [26] Xu P, Wang D, Ye L 2013 Chin. Phys. B 22 100306

Quantum discord in the system of atoms interacting with coupled cavities^{*}

Li Rui-Qi Lu Dao-Ming[†]

(College of Mechanic and Electronic Engineering, Wuyi University, Wuyishan 354300, China) (Received 30 August 2013; revised manuscript received 22 October 2013)

Abstract

The geometrical quantum discord (GQD) is an effective measure of quantum correlation in quantum systems. We have studied GQD dynamics of the system comprising two two-level atoms resonantly interacting with two coupled cavities. GQD between atoms and that between cavities are investigated. The influences of coupling constant between cavities and initial entanglement between atoms on GQD are discussed. Results obtained using a numerical method show that GQD between atoms is strengthened, and GQD between cavities is weakened with increasing initial entanglement between cavities are all strengthened with increasing coupling constant between cavities.

Keywords: quantum optics, two-level atom, coupling cavities, geometrical quantum discord

PACS: 03.65.Ud, 42.50.Dv

DOI: 10.7498/aps.63.030301

^{*} Project supported by the Natural Science Fundation of Fujian Province, China (Grant No. 2011J01018).

[†] Corresponding author. E-mail: daominglu79@hotmail.com