双流体等离子体模型的动力学可容变分*

邹丹旦† 杨维紘

(中国科学技术大学, 近代物理系, 合肥 230026)

(2013 年 9 月 19 日收到; 2013 年 10 月 18 日收到修改稿)

动力学可容变分方法是一种广义哈密顿系统中的李扰动变换方法, 能自动保证卡西米尔函数在相应阶数上的守恒性质. 通过动力学可容方法得到了双流体在欧拉描述中的一组约束变分, 而后利用这组变分对双流体哈密顿量取极值得到了平衡方程.

关键词: 变分原理, 李扰动变换, 动力学可容, 双流体模型

PACS: 04.20.Fy, 02.20.Sv, 52.30.Ex, 02.30.Xx **DOI:** 10.7498/aps.63.030401

1 引 言

变分方法在流体力学中有着悠久的历史, 尤其对于其中的约束问题有着重要的应用[1−6]. 由变分原理得到的近似动力学方程, 相比于直接对方程组做近似, 在数值计算中更能保证某些特定运动常数的守恒性质[7−11]. 然而欧拉坐标下的哈密顿流体动力学变分在上世纪 80 年代初才开始形成. Morrison 与 Greene 首先提出理想磁流体与中性流体的非正则泊松括号[12,13]. Marsden 与 Weinstein 得出了 Maxwell-Vlasov 系统的非正则哈密顿结构[14], Spencer 与 Kaufman 得出了双流体等离子体模型的泊松括号[15,16]. 随后非正则哈密顿形式被应用到其他许多理想[8] 及弱耗散[17−19] 的系统中.

哈密顿动力学体系不仅提供了一个新的场的观点去认识以往流体动力学方程组的结果[20], 而且是寻找守恒量、渐近近似、平衡与稳定性分析的重要工具[7]. 在正则哈密顿系统中可以通过求能量的局部极大值或极小值来寻找平衡点[21]. 而对于非正则哈密顿系统, 也称为广义哈密顿系统[22,23], 由于其泊松张量的零矢量不再唯一, 哈密顿函数在平衡点附近可能不是极值. 此时系统存在着能够与任意函数泊松可交换的卡西米尔 (Casimir) 函数. 由于卡西米尔函数也与哈密顿函数泊松可交换, 因而它是哈密顿动力学过程中的一种重要的守恒量, 同时也表达着与坐标标记变换有关的群对称性[7,24−26].

在对非正则哈密顿系统做平衡与稳定性分析时, 最常使用的是能量-卡西米尔方法[7]. 相比于一般的能量原理, 它不仅考虑了宏观流动带来的影响, 而且可以用来判定非线性阶段的稳定性. 能量-卡西米尔方法的基本思想最初来源于 Arnold 关于 Lie-Poisson 系统框架下的稳定性判定[27]. 它将系统的能量函数再加上尽量多的卡西米尔不变量作为变分的对象. 这种方法在流体和等离子体中可以找到许多应用的例子[28,29]. Hameiri 用这种变分方法分析了 Hall MHD 中具有宏观流动的等离子体平衡[30]. 最近 Andreussi 等将其应用于柱坐标系统中的平衡问题[31].

能量-卡西米尔方法的一个问题是必须找到足够多的卡西米尔不变量, 而且它们在有些情况下可能是无法显式表达的[7,22]. 另一种更为便捷的约束变分的方法则不再利用拉格朗日乘子, 而是赋予各扰动量特定的形式, 使之自然满足守恒量的不变性. Arnold 最早在三维不可压缩流体中提出一种对速度的变分形式, 使之能保持任意开尔文

∗ 国家自然科学基金 (批准号: 11375190) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: ddzou@mail.ustc.edu.cn

环内的涡量守恒, 其意义相当于在无限维相空间内使系统约束于某一组等涡场所组成的面内[21,32]. Morrison 等在找到流体的非正则哈密顿结构后, 通过非正则泊松括号来构造约束变分, 利用泊松括号的性质使定义的每个扰动量自动满足卡西米尔不变量的约束, 使得变分只在运动积分所容许的面内具有任意性, 从而提出了动力学可容(dynamic accessibility)的概念[33]. Morrison 与Pfirsch此后将这种方法应用到了Vlasov-Maxwell系统中[34]. Jean-Luc Thiffeault 等讨论了动力学可容变分与能量-卡西米尔方法的等价性[35,36].

Hameiri将动力学可容方法推广到了磁流体模型中[37], 发现最后得出的变分在形式上与Arnold的变分在磁流体中的拓展[38]一致, 但并没有对这两者之间的关系与区别进行讨论. 本文指出动力学可容方法在本质上与Arnold的变分方法一样, 都是基于李扰动变换方法. 而由于在Arnold当时还没有找到流体力学的非正则泊松括号, 对这种变分的守恒性质及其与卡西米尔函数的关系并没有深入的认识.

双流体等离子体模型将电子与离子作为两种不同的流体成分, 可以通过对动理学方程求矩而得到[39]. 双流体物理效应经常出现在空间等离子体及聚变装置中[40]. 它对于空间特征尺度接近离子趋肤深度, 时间特征尺度接近离子回旋周期的等离子体问题具有重要意义[41,42]. 本文首先给出双流体模型的哈密顿结构, 以及如何构造动力学可容变分的方法, 而后讨论了哈密顿系统中的李扰动方法与动力学可容变分的关系, 得到了双流体模型中密度、动量等场变量的动力学可容变分形式. 这种变分形式可以保证卡西米尔函数在相应阶数上的守恒性质. 最后将其代入双流体哈密顿量的一阶变分中, 得到了双流体的平衡方程.

2 双流体模型的哈密顿结构

在完全电离的情况下, 双流体动力学方程组可以用自然Lorentz-Heaviside单位制写为[41−43]

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\sum_\alpha\frac{\rho_\alpha q_\alpha}{m_\alpha},\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}+\nabla\times\boldsymbol{E}=0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}-\nabla\times\boldsymbol{B}=-\sum_\alpha\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\rho_\alpha\boldsymbol{u}_\alpha, \tag{3}$$

$$\frac{\partial\rho_\alpha}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho_\alpha\boldsymbol{u}_\alpha)=0, \tag{4}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_\alpha}{\mathrm{d}t}=\frac{q_\alpha}{m_\alpha}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{u}_\alpha\times\boldsymbol{B})-\frac{\nabla P_\alpha}{\rho_\alpha}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial\sigma_\alpha}{\partial t}=-\boldsymbol{u}_\alpha\cdot\nabla\sigma_\alpha. \tag{6}$$

其中$\alpha=\mathrm{i,e}$ 分别代表离子和电子. ρ_α 代表各成分的质量密度, $\boldsymbol{u}_\alpha$代表速度场, σ_α 为比熵, P_α代表压强. $\boldsymbol{E},\boldsymbol{B}$ 分别代表电场和磁场矢量, 而q_α 及m_α为各成分粒子的电荷与质量.

考虑如下双流体的哈密顿量

$$\begin{aligned}&H(\boldsymbol{M}_\alpha,\rho_\alpha,\sigma_\alpha,\boldsymbol{E},\boldsymbol{B})\\&=\sum_\alpha\int(\frac{1}{2\rho_\alpha}{M_\alpha}^2+\rho_\alpha U_\alpha)\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\&\quad+\int(\frac{1}{2}E^2+\frac{1}{2}B^2)\mathrm{d}\boldsymbol{x},\end{aligned} \tag{7}$$

其中我们将速度场$\boldsymbol{u}_\alpha$用动量场密度$\boldsymbol{M}_\alpha$进行了替换, $U_\alpha(\rho_\alpha,\sigma_\alpha)$为比内能. 其泊松括号为

$$\begin{aligned}&\{F,G\}(\boldsymbol{M}_\alpha,\rho_\alpha,\sigma_\alpha,\boldsymbol{E},\boldsymbol{B})\\&=-\sum_\alpha\int\Big[\rho_\alpha(\frac{\delta F}{\delta\boldsymbol{M}_\alpha}\cdot\nabla\frac{\delta G}{\delta\rho_\alpha}-\frac{\delta G}{\delta\boldsymbol{M}_\alpha}\cdot\nabla\frac{\delta F}{\delta\rho_\alpha})\\&\quad+M_{i\alpha}(\frac{\delta F}{\delta M_{j\alpha}}\frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\delta G}{\delta M_{i\alpha}}-\frac{\delta G}{\delta M_{j\alpha}}\frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\delta F}{\delta M_{i\alpha}})\\&\quad+\sigma_\alpha(\frac{\delta F}{\delta\boldsymbol{M}_\alpha}\cdot\nabla\frac{\delta G}{\delta\sigma_\alpha}-\frac{\delta G}{\delta\boldsymbol{M}_\alpha}\cdot\nabla\frac{\delta F}{\delta\sigma_\alpha})\Big]\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\&\quad+\int\Big[\frac{\delta F}{\delta\boldsymbol{E}}\cdot(\nabla\times\frac{\delta G}{\delta\boldsymbol{B}})-\frac{\delta G}{\delta\boldsymbol{E}}\cdot(\nabla\times\frac{\delta F}{\delta\boldsymbol{B}})\Big]\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\&\quad+\sum_\alpha\int(\frac{\delta F}{\delta\boldsymbol{M}}\cdot\frac{\delta G}{\delta\boldsymbol{E}}-\frac{\delta G}{\delta\boldsymbol{M}}\cdot\frac{\delta F}{\delta\boldsymbol{E}}\\&\quad+\boldsymbol{B}\cdot\frac{\delta F}{\delta\boldsymbol{M}}\times\frac{\delta G}{\delta\boldsymbol{M}})\frac{\rho_\alpha q_\alpha}{m_\alpha}\mathrm{d}\boldsymbol{x}.\end{aligned} \tag{8}$$

其中第一个积分即为以上各成份流体的泊松括号, 第二个积分是表达电磁场变化的泊松括号. 在特定规范下[15], 动力学方程可以表达为

$$\begin{aligned}\frac{\partial\rho_\alpha}{\partial t}&=\{\rho_\alpha,H\},\\\frac{\partial M_{i\alpha}}{\partial t}&=\{M_{i\alpha},H\},\\\frac{\partial\sigma_\alpha}{\partial t}&=\{\sigma_\alpha,H\},\\\frac{\partial E_i}{\partial t}&=\{E_i,H\},\\\frac{\partial B_i}{\partial t}&=\{B_i,H\}.\end{aligned} \tag{9}$$

3 动力学可容变分

Morrison在非正则哈密顿系统的泊松括号基础上, 提出了动力学可容的变分方法(dynamical accessibility)[13]. 它不是利用拉格朗日乘子法来约束系统, 而是赋予扰动量特殊的形式来使扰动后的动力学轨道处在约束的曲面内. 这种方法使扰动由任意的哈密顿矢量场生成, 其形式被泊松括号所限定, 从而使扰动自动满足卡西米尔函数的守恒. 对于一阶扰动有

$$\begin{aligned}\delta_d z^i =&\{K^1, z^i\}\\ =&\frac{\partial K^1}{\partial z^l} J^{lm} \frac{\partial z^i}{\partial z^m}\\ =&J^{ji}(\boldsymbol{z}) g_j{}^1,\end{aligned}\tag{10}$$

其中

$$K = z^i g_i{}^1,\tag{11}$$

生成函数$g_i{}^1$为任意与场变量z无关的函数, 而由于泊松算子J^{ij}的存在, 变分的任意又得到了限制. 它使得对z的扰动仅发生在卡西米尔不变量的同一水平集上. 可以证明, 当扰动满足如上形式时, 卡西米尔函数在一阶近似上保持不变:

$$\begin{aligned}\delta_d C(\boldsymbol{z}) =&\frac{\partial C}{\partial z^i}\delta_d z^i = \frac{\partial C}{\partial z^i} J^{ji}(\boldsymbol{z}) g_j{}^1\\ =&\{C, g^1\} = 0,\end{aligned}\tag{12}$$

其中最后一个等式即为卡西米尔函数的定义. 对于平衡位形附近的二阶扰动同样可以证明其相应卡西米尔函数的二阶变分为零.

Isichenko此前曾将Arnold在中性流体中的李扰动变分方法推广到磁流体模型中[38], 发现其能保证每个流体元的熵守恒, 每个封闭的流体物质曲线内的磁通量守恒, 以及任意磁通量管的模螺度守恒. Hameiri将动力学可容变分推广到磁流体后[37], 与Isichenko的结果进行了比对, 发现经过一系列的变换后这两种方法得出的变分在形式上是一致的. 以下我们指出这两者之间的联系, 动力学可容方法其实是一种基于哈密顿流的李扰动变换.

对于近恒等变换

$$T_\varepsilon : Z \to \bar{Z}(Z,\varepsilon) = T_\varepsilon Z,\tag{13}$$

其中ε为代表量级的无量纲参数. 可以将其用生成矢量场G表示为

$$T_\varepsilon = \exp(\varepsilon G) = \exp(\sum_n \varepsilon^n G_n),\tag{14}$$

对于任意的光滑标量函数F, 可以诱导拉回映射

$$F(Z) = T_\varepsilon{}^* \bar{F}(Z) = \bar{F}(T_\varepsilon Z) = \bar{F}(\bar{Z}),\tag{15}$$

若矢量场G生成的流是以g为哈密顿量的哈密顿流, 则其李导数可以表示为

$$L_G F = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \bar{F} = \{g, \bar{F}\},\tag{16}$$

而拉回映射可以表示为李导数的指数形式:

$$T_\varepsilon{}^* = \exp(\varepsilon L_G).\tag{17}$$

为了方便地将表达式按ε的阶数展开, 对于各阶矢量场我们定义

$$L_n = L_{G_n},\tag{18}$$

对算符T做各阶级数展开有

$$T_\varepsilon{}^* = I + \sum_n^\infty \varepsilon^n T_n,\tag{19}$$

$$T_\varepsilon{}^{*-1} = I + \sum_n^\infty \varepsilon^n T_n{}^{-1},\tag{20}$$

其中I为恒等变换, 指数展开后代入可得

$$T_n = \sum_{m_1+2m_2+\cdots+nm_n=n} (-1)^{m_1+m_2+\cdots+m_n} \frac{(L_1)^{m_1}(L_2)^{m_2}\cdots(L_n)^{m_n}}{m_1! m_2! \cdots m_n!},\tag{21}$$

$$T_n{}^{-1} = \sum_{m_1+2m_2+\cdots+nm_n=n} \frac{(L_n)^{m_n}(L_{n-1})^{m_{n-1}}\cdots(L_1)^{m_1}}{m_1! m_2! \cdots m_n!},\tag{22}$$

即对于任意光滑函数F有

$$\begin{aligned}\bar{F} =&T_\varepsilon{}^{*-1} F\\ =&F + \varepsilon L_1 F + \frac{1}{2}\varepsilon^2 L_1{}^2 F + \varepsilon^2 L_2 F + \cdots,\end{aligned}\tag{23}$$

对于扰动矢量场G的哈密顿量g, 可以将其按各阶展开为

$$g = \varepsilon g_1 + \varepsilon^2 g_2 + \cdots,\tag{24}$$

则有

$$\bar{F} =F + \varepsilon\{g_1, F\} + \frac{1}{2}\varepsilon^2\{g_1, \{g_1, F\}\}$$

$$+\varepsilon^2\{g_2,F\}+\cdots. \tag{25}$$

从而可以看出, 在哈密顿系统中对于一阶李扰动变分可以通过泊松括号与扰动的哈密顿函数来构造. 而动力学可容变分在非正则哈密顿系统中, 可以通过泊松括号清楚地看出其守恒性质及其与卡西米尔函数的关系, 此前Isichenko所发现的守恒性质其实就是欧拉描述下非正则哈密顿系统中的卡西米尔守恒量.

4 在双流体变分中的应用

为了得到双流体模型的动力学可容变分, 引入泛函

$$\begin{aligned}K=&\int(\boldsymbol{M}_\alpha\cdot\boldsymbol{\eta}_\alpha+h_\alpha\rho_\alpha+\lambda_\alpha\sigma_\alpha\\&+\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{E}+\boldsymbol{Y}\cdot\boldsymbol{B})\mathrm{d}\boldsymbol{x},\end{aligned} \tag{26}$$

其中 $\eta_{j\alpha},h_\alpha,\lambda_\alpha,\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$ 为仅与空间位置有关的任意生成函数, 使得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\eta}_\alpha&=\frac{\delta K}{\delta\boldsymbol{M}_\alpha},\\h_\alpha&=\frac{\delta K}{\delta\rho_\alpha},\\\lambda_\alpha&=\frac{\delta K}{\delta\sigma_\alpha},\\\boldsymbol{X}&=\frac{\delta K}{\delta\boldsymbol{E}},\\\boldsymbol{Y}&=\frac{\delta K}{\delta\boldsymbol{B}},\end{aligned} \tag{27}$$

对于质量密度的一阶变分为

$$\begin{aligned}\delta_d\rho_\alpha=&\{K,\rho_\alpha\}\\=&-\int\rho_\alpha\frac{\delta K}{\delta\boldsymbol{M}_\alpha}\cdot\nabla\frac{\delta\rho_\alpha(\boldsymbol{x}')}{\delta\rho_\alpha(\boldsymbol{x})}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\=&\nabla\cdot(\rho_\alpha\boldsymbol{\eta}_\alpha).\end{aligned} \tag{28}$$

其中

$$A_\alpha=q_\alpha/m_\alpha,\rho_\alpha=n_\alpha m_\alpha, \tag{29}$$

这里用到了分部积分, 以及令 $\boldsymbol{M}\cdot\hat{n}$, $\boldsymbol{\eta}_\alpha\cdot\hat{n}$ 在边界处为零. 动量密度的一阶变分为

$$\begin{aligned}\delta_dM_{i\alpha}=&\{K,M_{i\alpha}\}\\=&-\int\Big[\rho_\alpha\Big(\frac{\delta K}{\delta\boldsymbol{M}_\alpha}\cdot\nabla\frac{\delta M_{i\alpha}}{\delta\rho_\alpha}\\&-\frac{\delta M_{i\alpha}}{\delta\boldsymbol{M}_\alpha}\cdot\nabla\frac{\delta K}{\delta\rho_\alpha}\Big)+M_l\Big(\frac{\delta K}{\delta M_{j\alpha}}\frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\delta M_{i\alpha}}{\delta M_{l\alpha}}\\&-\frac{\delta M_{i\alpha}}{\delta M_{j\alpha}}\frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\delta K}{\delta M_{l\alpha}}\Big)\\&+\Big(\boldsymbol{B}\cdot\frac{\delta K}{\delta\boldsymbol{M}_\alpha}\times\frac{\delta M_{i\alpha}}{\delta\boldsymbol{M}_\alpha}\\&-\frac{\delta M_{i\alpha}}{\delta\boldsymbol{M}_\alpha}\cdot\frac{\delta K}{\delta\boldsymbol{E}}\Big)\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\rho_\alpha\Big]\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\=&\rho_\alpha\frac{\partial}{\partial x^i}h_\alpha+\frac{\partial}{\partial x^j}(M_{i\alpha}\eta_{j\alpha})+M_{l\alpha}\frac{\partial}{\partial x^i}\eta_{l\alpha}\\&+\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\rho_\alpha(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{\eta}_\alpha)_i-\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\rho_\alpha X_i.\end{aligned} \tag{30}$$

其矢量形式为

$$\begin{aligned}\delta_d\boldsymbol{M}_\alpha=&\rho_\alpha\nabla h_\alpha+\frac{\partial}{\partial x^j}(\boldsymbol{M}_\alpha\eta_{j\alpha})+M_{l\alpha}\nabla\eta_{l\alpha}\\&+A_\alpha\rho_\alpha\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{\eta}_\alpha-A_\alpha\rho_\alpha\boldsymbol{X}.\end{aligned} \tag{31}$$

比熵的一阶变分为

$$\delta_d\sigma_\alpha=\{K,\sigma_\alpha\}=\nabla\cdot(\sigma_\alpha\boldsymbol{\eta}_\alpha). \tag{32}$$

电场的一阶变分为

$$\begin{aligned}\delta_dE_i=&\{K,E_i\}\\=&-\int\frac{\delta E_i}{\delta\boldsymbol{E}}\cdot\Big(\nabla\times\frac{\delta K}{\delta\boldsymbol{B}}\Big)\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\&+\sum_\alpha\int\frac{\delta K}{\delta\boldsymbol{M}_\alpha}\cdot\frac{\delta E_i}{\delta\boldsymbol{E}}A_\alpha\rho_\alpha\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\=&-(\nabla\times\boldsymbol{Y})_i+\sum_\alpha\eta_{i\alpha}A_\alpha\rho_\alpha.\end{aligned} \tag{33}$$

磁场的一阶变分为

$$\begin{aligned}\delta_dB_i=&\{K,B_i\}\\=&\int\frac{\delta K}{\delta\boldsymbol{E}}\cdot\Big(\nabla\times\frac{\delta B_i}{\delta\boldsymbol{B}}\Big)\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\=&\int\boldsymbol{X}\cdot(\nabla\times\delta(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})\hat{e}_i)\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\=&(\nabla\times\boldsymbol{X})_i.\end{aligned} \tag{34}$$

为了验证以上变分形式的合理性, 我们将其代入到双流体哈密顿量的极值问题中. 对于哈密顿量(7)的一阶变分

$$\begin{aligned}\delta_dH=&\sum_\alpha\int\Big[\frac{\boldsymbol{M}_\alpha}{\rho_\alpha}\cdot\delta_d\boldsymbol{M}_\alpha-\frac{{M_\alpha}^2}{2{\rho_\alpha}^2}\delta_d\rho_\alpha\\&+\delta_d\rho_\alpha\Big(U_\alpha+\rho_\alpha\frac{\partial U_\alpha}{\partial\rho_\alpha}\Big)\\&+\delta_d\sigma_\alpha(\rho_\alpha\frac{\partial U_\alpha}{\partial\sigma_\alpha})\Big]\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\&+\int\Big(\boldsymbol{E}\cdot\delta\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}\cdot\delta\boldsymbol{B}\Big)\mathrm{d}\boldsymbol{x}.\end{aligned} \tag{35}$$

代入 $\rho_\alpha,\boldsymbol{M}_\alpha,\sigma_\alpha,\boldsymbol{E},\boldsymbol{B}$ 的一阶变分(28), (31), (32), (33), (34)后可得

$$\begin{aligned}\delta_dH=&\sum_\alpha\int\Big\{\frac{\boldsymbol{M}_\alpha}{\rho_\alpha}\cdot\Big[\rho_\alpha\nabla h_\alpha+\sigma_\alpha\nabla\lambda_\alpha\\&+\frac{\partial}{\partial x^j}(\boldsymbol{M}_\alpha\eta_{j\alpha})+M_{l\alpha}\nabla\eta_{l\alpha}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+A_\alpha\rho_\alpha \boldsymbol{B}\times\boldsymbol{\eta}_\alpha - A_\alpha\rho_\alpha\boldsymbol{X}\Big]\\
&+\nabla\cdot(\rho_\alpha\boldsymbol{\eta}_\alpha)\Big(U_\alpha+\rho_\alpha\frac{\partial U_\alpha}{\partial\rho_\alpha}-\frac{{M_\alpha}^2}{2{\rho_\alpha}^2}\Big)\\
&+\nabla\cdot(\sigma_\alpha\boldsymbol{\eta}_\alpha)\Big(\rho_\alpha\frac{\partial U_\alpha}{\partial\sigma_\alpha}\Big)\Big\}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\
&+\int\Big[-\boldsymbol{E}\cdot\Big(\nabla\times\boldsymbol{Y}+\sum_\alpha A_\alpha\rho_\alpha\boldsymbol{\eta}_\alpha\Big)\\
&+\boldsymbol{B}\cdot\nabla\times\boldsymbol{X}\Big]\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \qquad (36)
\end{aligned}
$$

利用分部积分与边界条件得

$$
\begin{aligned}
\delta_d H=&\sum_\alpha\int\Big[-h_\alpha\nabla\cdot\boldsymbol{M}_\alpha-\lambda_\alpha\nabla\cdot\Big(\frac{\sigma_\alpha}{\rho_\alpha}\boldsymbol{M}_\alpha\Big)\\
&-\eta_{j\alpha}\boldsymbol{M}_\alpha\cdot\frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\boldsymbol{M}_\alpha}{\rho_\alpha}-\eta_{l\alpha}\nabla\cdot\Big(M_{l\alpha}\frac{\boldsymbol{M}_\alpha}{\rho_\alpha}\Big)\\
&+\boldsymbol{\eta}_\alpha\cdot\Big(A_\alpha\rho_\alpha\frac{\boldsymbol{M}_\alpha}{\rho_\alpha}\times\boldsymbol{B}\Big)-\frac{\boldsymbol{M}_\alpha}{\rho_\alpha}\cdot A_\alpha\rho_\alpha\boldsymbol{X}\\
&-\rho_\alpha\boldsymbol{\eta}_\alpha\cdot\nabla\Big(U_\alpha+\rho_\alpha\frac{\partial U_\alpha}{\partial\rho_\alpha}-\frac{{M_\alpha}^2}{2{\rho_\alpha}^2}\Big)\\
&-\sigma_\alpha\boldsymbol{\eta}_\alpha\cdot\nabla\Big(\rho_\alpha\frac{\partial U_\alpha}{\partial\sigma_\alpha}\Big)\Big]\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\
&+\int\Big[-\boldsymbol{E}\cdot\nabla\times\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{E}\cdot\sum_\alpha A_\alpha\rho_\alpha\boldsymbol{\eta}_\alpha\\
&+\boldsymbol{B}\cdot\nabla\times\boldsymbol{X}\Big]\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \qquad (37)
\end{aligned}
$$

由于扰动量 $h_\alpha,\lambda_\alpha,\eta_{j\alpha},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X}$ 的任意性, 可得平衡时所满足的方程

$$h_\alpha:\nabla\cdot\boldsymbol{M}_\alpha=\nabla\cdot(\rho_\alpha\boldsymbol{u}_\alpha)=0, \qquad (38)$$

$$\lambda_\alpha:\boldsymbol{u}_\alpha\cdot\nabla\frac{\sigma_\alpha}{\rho_\alpha}=0, \qquad (39)$$

$$
\begin{aligned}
\eta_{j\alpha}:&-\boldsymbol{M}_\alpha\cdot\frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\boldsymbol{M}_\alpha}{\rho_\alpha}-\nabla\cdot\Big(M_{j\alpha}\frac{\boldsymbol{M}_\alpha}{\rho_\alpha}\Big)\\
&-\rho_\alpha\partial_j\frac{{M_\alpha}^2}{2{\rho_\alpha}^2}-\rho_\alpha\partial_j\Big(U_\alpha+\rho_\alpha\frac{\partial U_\alpha}{\partial\rho_\alpha}\Big)\\
&+(A_\alpha\boldsymbol{M}_\alpha\times\boldsymbol{B})_j-A_\alpha\rho_\alpha E_j=0, \qquad (40)
\end{aligned}
$$

$$\boldsymbol{Y}:\nabla\times\boldsymbol{E}=0, \qquad (41)$$

$$\boldsymbol{X}:\nabla\times\boldsymbol{B}-\sum_\alpha A_\alpha\boldsymbol{M}_\alpha=0. \qquad (42)$$

为使方程封闭, 还应再加上不随时间演化的状态方程. 将其代入比内能, 经化简后可以看出, 方程 (40) 即为动量的平衡方程, 在确定的规范下, 方程组 (38)—(42) 与没有时间演化项的方程组 (1)—(6) 是等价的. 由此也证明了所获得的变分形式的正确性.

在磁约束反场箍缩装置中, 最初由 Taylor 提出的驰豫平衡理论在磁螺度守恒的约束下得到了与实验相符的磁场平衡位形. 然而, 该理论得出在平衡时的压力梯度与宏观流速都为零. 这与目前在实验中发现的具有环向旋转的平衡位形有所出入, 而且达到压力梯度为零所需要的时间远超过每次放电的时间尺度. 而本文用卡西米尔函数作为更严格的约束, 因而得出的最一般的平衡位形, 可知得出的变分形式适用于较短时间尺度的亚稳态平衡位形. 在此基础上对变分做近似, 代入驰豫理论中可以得出相应时间尺度的特殊平衡位形.

5 结 论

动力学可容方法得出的变分形式能自动保证卡西米尔函数的守恒性质, 适用于双流体等离子体模型的变分问题. 对于无限维非正则哈密顿系统, 它与 Arnold 的等涡变分方法相比更为简单直观, 所得的约束变分与守恒量的关系更为清晰. 本文从双流体的欧拉描述出发, 得到了双流体模型中动量､密度等场变量的一阶约束变分形式. 此后我们还将双流体的这些扰动量代入到哈密顿量的一阶变分中, 得到了双流体的平衡方程, 进一步验证了这种变分方法在双流体问题中的可行性. 此外由于能量-卡西米尔方法通常只满足部分卡西米尔函数的守恒, 从而在此基础上得出的是特殊的平衡位形. 而动力学可容方法自动满足所有的卡西米尔函数守恒, 其得出的平衡位形是最一般的. 在此约束变分的基础上, 我们将在双流体模型下对电流片平衡位形进行稳定性分析.

参考文献

[1] Lin C C 1961 *Proceedings of the International School*, Enrico Fermi, Varenna, in Proceedings of the International School of Physics, edited by G.Careri (Academic, New York) **XXI** p 93

[2] Lamb H 1932 *Hydrodynamics* (Cambridge Univ. Press, Cambridge) p14

[3] Newcomb W A 1962 *Nucl. Fusion Suppl* (part 2) p451

[4] Cendra H, Marsden J 1987 *Physica D* **27** 63

[5] Cao X Q, Song J Q, Zhang W M, Zhu X Q, Zhao J 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 080401 (in Chinese)[曹小群, 宋君强, 张卫民, 朱小谦, 赵军 2011 物理学报 **60** 080401]

[6] Cao X Q, Song J Q, Zhang W M, Zhao J 2011 *Chin. Phys. B* **20** 090401

[7] Marsden J 1994 *Introduction to Mechanics and Symmetry* (Springer-Verlag New York)

[8] Salmon R 1988 *Ann. Rev. Fluid Mech.* **20** 225

[9] Kambe T 2010 *Geometrical theory of dynamical systems and velocity field* (World Scientific, Singapore) p1

[10] Jing H X, Li Y C, Xia L L 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3049 (in Chinese)[荆宏星, 李元成, 夏丽莉 2007 物理学报 **56** 3049]
[11] Shi L F, Mo J Q 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 040203 (in Chinese)[石兰芳, 莫嘉琪. 2013 物理学报 **62** 040203]
[12] Morrison P, Greene J 1980 *Phys. Rev. Lett.* **45** 790
[13] Morrison P 1998 *Rev. Mod. Phys.* **70** 467
[14] Marsden J, Weinstein A 1982 *Physica D* **4** 394
[15] Spencer R, Kaufman A N 1982 *Phys. Rev. A* **25** 2437
[16] Spencer R 1984 *J. Math. Phys.* **25** 2390
[17] Kaufman A N 1984 *Physics Letters* A **100** 8
[18] Morrison P 1986 *Physica* D **18** 1
[19] Guha P 2007 *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **326**
[20] Goldstein H 2002 *Classical Mechanics.* Prentice Hall, 3rd edition
[21] Arnold V I 1978 *Mathematical Method of Classical Mechanics* (Springer-Verlag, New York)
[22] Li J B, Zhao X H, Liu Z R 1994 *Theory and Application of Generalized Hamilton Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [李继彬, 赵晓华, 刘正荣 2007 广义哈密顿系统理论及其应用 (北京: 科学出版社)]
[23] Jiang W A, Luo S K 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 060201 (in Chinese)[姜文安, 罗绍凯 2011 物理学报 **60** 060201]
[24] LI Y M 2010 *Chin. Phys. Lett.* **27** 1
[25] Li Y C, Xia L L, Wang X M, Liu X W 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 3639 (in Chinese)[李元成, 夏丽莉, 王小明, 刘晓巍 2010 物理学报 **59** 3639]
[26] Zhang Y 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 214501 (in Chinese)[张毅 2012 物理学报 **61** 214501]
[27] Arnold V 1963 *Usp. Mat. Nauk* (Sov. Math. Usp.) **18** 85
[28] Holm D D, Marsden J, Ratiu T, Weinstein A 1985 *Physics Reports* **123** 1
[29] Morrison P, Eliezer S 1986 *Phys. Rev. A* **33** 4205
[30] Hameiri E 1998 *Phys. Plasmas* **5** 3270
[31] Andreussi T, Morrison P, Pegoraro F 2010 *Plasma Phys. Control. Fusion* **52** 055001
[32] Arnold V I 1965 *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* **29** 5
[33] Morrison P, Pfirsch D 1989 *Physical Review A* **40** 7
[34] Morrison P, Pfirsch D 1990 *Physics of Fluids B* **2** 1105
[35] Brizard A, Tracy E 2002 Mini-Conference, *Bull. Am. Phys. Soc.* **47** 6
[36] Hirota M, Yoshida Z, Hameiri E 2006 *Phys. Plasmas* **13** 022107
[37] Hameiri E 2003 *Pysics of Plasmas* **10** 7
[38] Isichenko M B 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 5
[39] Hu X W 2006 *Plasma Theory Foudamentals* (Beijing: Beijing University Press) p219 (in Chinese) [胡希伟 2006 等离子体理论基础 (北京: 北京大学出版社) 第 219 页]
[40] Wang X, Xiao C, Pu Z, Wang J 2012 *Chin. Sci. Bul.* **57** 12
[41] Malyshkin L M 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 235004
[42] Zou D D, Yang W H, Chen Y H, Yoon P H 2010 *Phys. Plasmas* **17** 102102
[43] Sahraoui F, Belmont G, Rezeau L 2003 *Phys. Plasmas* **10** 1325

Dynamically accessible variations for two-fluid plasma model*

Zou Dan-Dan† Yang Wei-Hong

(*Department of Modern Physics, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China*)

(Received 19 September 2013; revised manuscript received 18 October 2013)

Abstract

Dynamically accessible perturbation is a type of Lie perturbation for noncanonical Hamiltonian systems. Firstly, a set of first-order constraint variations that preserve all the Casimir functions is presented based on the two-fluid Poisson bracket. Then the equilibrium equations are given by minimizing the two-fluid Hamiltonian with these variations.

Keywords: variation principle, Lie perturbation, dynamical accessibility, two-fluid plasma model

PACS: 04.20.Fy, 02.20.Sv, 52.30.Ex, 02.30.Xx **DOI:** 10.7498/aps.63.030401

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11375190).

† Corresponding author. E-mail: ddzou@mail.ustc.edu.cn