

# 分数阶混沌系统的 Adomian 分解法求解 及其复杂性分析\*

贺少波 孙克辉† 王会海

(中南大学物理与电子学院, 长沙 410083)

(2013年10月9日收到; 2013年10月22日收到修改稿)

根据分数阶微分定义, 采用 Adomian 分解算法, 研究了分数阶简化 Lorenz 系统的数值解. 研究发现, 该算法与预估-校正算法相比, 求解结果更准确, 所耗计算资源和内存资源更少, 求解整数阶系统时较 Runge-Kutta 算法更准确; 利用 Adomian 算法得到的分数阶简化 Lorenz 系统出现混沌的最小阶数为 1.35, 比利用预估-校正算法得到的最小阶 2.79 更小. 采用相图、分岔图分析了该系统的动力学特性, 基于谱熵算法 (SE) 和  $C_0$  算法分析了该系统的复杂度. 结果表明, 复杂度结果和分岔图一致, 说明系统的复杂度同样能反映出系统动力学特性; 复杂度随阶数  $q$  的增加呈总体减小的趋势, 而混沌态时系统参数  $c$  变化对系统复杂度影响不大. 为分数阶混沌系统应用于信息加密、保密通信领域提供了理论与实验依据.

**关键词:** 分数阶微积分, Adomian 分解算法, 简化 Lorenz 系统, 复杂度

**PACS:** 05.45.Tp, 05.45.-a

**DOI:** 10.7498/aps.63.030502

## 1 引言

分数阶微积分理论研究已有 300 多年, 但由于其长期缺乏应用背景而发展缓慢. 近年来, 随着计算机科学的发展和越来越多的分数阶现象被发现, 人们在分数阶微积分领域开展了大量工作<sup>[1-3]</sup>. 在整数阶混沌系统的研究基础上, 将分数阶微分算子引入系统中, 发现当阶数为分数时, 系统仍表现出复杂的混沌行为<sup>[4-6]</sup>. 由于分数阶混沌系统具有丰富的动力学特性和潜在的应用价值, 对其动力学特性及其应用研究引起了人们的广泛关注<sup>[7-9]</sup>.

目前, 学界对分数阶微积分提出了多种定义, 但在实际应用研究中, 使用较多的是 Riemann-Liouville(R-L) 定义和 Caputo 定义, 对应的分数阶混沌系统求解算法使用较多的是基于 R-L 定义的时域-频域转换法<sup>[10]</sup>和基于 Caputo 定义的预估-校正算法<sup>[11]</sup>. 时域-频域转换法中阶数步长偏大 (如 0.1), 精度有限, 有人对其能否准确地反映分数

阶非线性系统的混沌特性及其变化规律提出了质疑<sup>[12]</sup>; 预估-校正算法结果更为准确, 且能分析阶数连续变化时系统的动力学特性, 但其每次迭代都需要之前所有历史数据, 使得算法越往后迭代, 求解速度越慢, 消耗的内存资源越多. Adomian 分解法<sup>[13]</sup>是一种能够处理线性和非线性问题的时域求解算法, 该算法不需要进行离散化和大量的计算机内存, 且能够提供高精度的、收敛快的近似数值解. 文献<sup>[14,15]</sup>利用 Adomian 分解法得到了分数阶 Chen 系统和分数阶 Rössler 系统的数值解, 并分析了系统的分岔图和 0-1 测试结果<sup>[16]</sup>, 表明了算法的有效性, 但其并没有分析当阶数  $q$  连续变化时的动力学特性变化规律. 鉴于当前分数阶混沌系统仿真算法主要为预估-校正算法, 有必要对这两种算法的精度和性能进行对比研究.

混沌系统的复杂度可表征混沌保密通信系统的安全性, 复杂度越大其抗干扰和抗截获的能力就越好. 目前分数阶混沌系统动力学特性分析主要包括吸引子相图、分岔特性、最大 Lyapunov 指数等方

\* 国家自然科学基金 (批准号: 61161006, 61073187) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: kehui@csu.edu.cn

面, 少有文献分析其复杂度变化规律, 特别是阶数对系统复杂度变化规律的影响问题值得研究. 当前混沌序列的复杂度算法多种多样, 这些算法中测度效果较好的有模糊熵 (FuzzyEn) 算法<sup>[17]</sup>、强度统计复杂度 (SCM) 算法<sup>[18]</sup>、谱熵 (SE) 算法<sup>[19]</sup>,  $C_0$  算法<sup>[20]</sup> 等. 其中 SE 算法和  $C_0$  算法是基于傅里叶变换的, 分别从频域能量分布均衡性和非规则部分能量所占比例角度衡量复杂性, 算法中涉及的参数少、计算速度快, 且测度结果准确, 所以本文拟采用这两种算法测度分数阶混沌系统的复杂度.

本文将采用 Adomian 算法求解分数阶混沌系统, 并分析当阶数和系统参数变化时系统的复杂性变化规律.

## 2 分数阶简化 Lorenz 系统的求解

主要阐述分数阶微积分的相关定义、性质和物理意义, 给出 Adomian 分解算法, 最后对分数阶简化 Lorenz 系统进行求解.

### 2.1 分数阶微积分定义与性质

**定义 1** Riemann-Liouville 分数阶积分定义为

$$J_{t_0}^q x(t) := \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^t (t - \tau)^{q-1} x(\tau) d\tau, \quad (1)$$

其中  $q \in R^+$ ,  $J_{t_0}^q$  为  $q$  阶积分算子,  $\Gamma(\cdot)$  为 Gamma 函数. 对于  $t \in [t_0, t_1]$ ,  $q \geq 0$ ,  $\gamma > -1$ ,  $r \geq 0$ , 分数阶 Riemann-Liouville 积分满足如下基本性质:

$$J_{t_0}^q (t - t_0)^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma + 1)}{\Gamma(\gamma + 1 + q)} (t - t_0)^{\gamma+q}, \quad (2)$$

$$J_{t_0}^q C = \frac{C}{\Gamma(q + 1)} (t - t_0)^q, \quad (3)$$

$$J_{t_0}^q J_{t_0}^r x(t) = J_{t_0}^{q+r} x(t). \quad (4)$$

**定义 2** 分数阶 Caputo 微分定义

$${}^*D_{t_0}^q x(t) := J_{t_0}^{m-q} D_{t_0}^m x(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m-q)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{m-q-1} x^{(m)}(\tau) d\tau, & m-1 < q < m, \\ \frac{d^m}{dt^m} x(t), & q = m, \end{cases} \quad (5)$$

其中  $q \in R^+$ ,  $m \in N$ ,  ${}^*D_{t_0}^q$  为  $q$  阶 Caputo 微分算子,  $\Gamma(\cdot)$  为 Gamma 函数. 当  $t \in [t_0, t_1]$ ,  $m \in N$ ,  $m-1 < q < m$ , Caputo 微分具有如下性质:

$${}^*D_{t_0}^0 x(t) = J_{t_0}^0 x(t) = x(t), \quad (6)$$

$$J_{t_0}^q ({}^*D_{t_0}^q) x(t) = x(t) - \sum_{k=0}^{m-1} x^{(k)}(t_0^+) \frac{(t-t_0)^k}{k!}. \quad (7)$$

整数阶微积分有清晰的几何解释和物理意义, 但由于分数阶微积分本身的复杂性, 使得对其概念的理解比较困难, 导致了在实际应用中存在一定障碍. 目前的专著和文献也很少有这方面的内容, 因此至今分数阶微积分还没有普适的、统一的物理意义和几何解释<sup>[21]</sup>. 根据分数阶积分的定义可得分数阶积分的物理意义: 如果将积分看作对某种量的存储, 则分数阶积分是有记忆的存储, 近则储之, 对过去的则渐渐遗弃. 刘式达将分数阶微分描述为“天气与气候之间的桥梁”, 气候的分数阶微分是天气. 正是由于分数阶微分存在, 使得气候较天气的记忆性好<sup>[22]</sup>.

### 2.2 分数阶混沌系统 Adomian 求解算法

对于给定的分数阶混沌系统  ${}^*D_{t_0}^q \mathbf{x}(t) = f(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{g}(t)$ , 其中  $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T$  为给定的函数变量, 对于自治系统,  $\mathbf{g}(t) = [g_1, g_2, \dots, g_n]^T$  为常量, 而  $f$  表示包含线性和非线性部分函数式. 由下式将系统分为三部分:

$$\begin{aligned} {}^*D_{t_0}^q \mathbf{x}(t) &= L\mathbf{x}(t) + N\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}(t), \\ \mathbf{x}^{(k)}(t_0^+) &= \mathbf{b}_k, k = 0, \dots, m-1, \\ m \in N, m-1 < q \leq m, \end{aligned} \quad (8)$$

其中  ${}^*D_{t_0}^q$  为  $q$  阶 Caputo 微分算子,  $L$  为系统函数的线性部分,  $N$  为系统函数的非线性部分,  $\mathbf{b}_k$  为初始值. 在 (8) 式两边积分可得

$$\mathbf{x} = J_{t_0}^q L\mathbf{x} + J_{t_0}^q N\mathbf{x} + J_{t_0}^q \mathbf{g} + \Phi, \quad (9)$$

其中  $\Phi = \sum_{k=0}^{m-1} \mathbf{b}_k \frac{(t-t_0)^k}{k!}$  满足系统的初值条件. 根据 Adomian 分解算法原理, 方程的解可表示为  $\mathbf{x} = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{x}^i$ . 将非线性项按下式进行分解:

$$\begin{aligned} A_j^i &= \frac{1}{i!} \left[ \frac{d^i}{d\lambda^i} N(v_j^i(\lambda)) \right]_{\lambda=0}, \\ v_j^i(\lambda) &= \sum_{k=0}^i (\lambda)^k x_j^k, \end{aligned} \quad (10)$$

其中  $i = 0, 1, \dots; j = 1, \dots, n$ , 则非线性项可以表示为

$$N\mathbf{x} = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{A}^i(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^i), \quad (11)$$

即方程的解为

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{x}^i \\ &= J_{t_0}^q L \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{x}^i + J_{t_0}^q \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{A}^i + J_{t_0}^q \mathbf{g} + \Phi, \end{aligned} \quad (12)$$

其推导关系为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^0 &= J_{t_0}^q \mathbf{g} + \Phi, \\ \mathbf{x}^1 &= J_{t_0}^q L \mathbf{x}^0 + J_{t_0}^q \mathbf{A}^0(\mathbf{x}^0), \\ \mathbf{x}^2 &= J_{t_0}^q L \mathbf{x}^1 + J_{t_0}^q \mathbf{A}^1(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1), \\ &\dots \\ \mathbf{x}^i &= J_{t_0}^q L \mathbf{x}^{i-1} + J_{t_0}^q \mathbf{A}^{i-1}(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^{i-1}), \\ &\dots \end{aligned} \quad (13)$$

### 2.3 分数阶简化Lorenz系统求解

分数阶简化Lorenz系统只含一个系统参数  $c$ , 其分数阶微分方程为 [23]

$$\begin{aligned} {}^*D_{t_0}^q x_1 &= 10(x_2 - x_1), \\ {}^*D_{t_0}^q x_2 &= (24 - 4c)x_1 - x_1x_3 - cx_2, \\ {}^*D_{t_0}^q x_3 &= x_1x_2 - 8x_3/3. \end{aligned} \quad (14)$$

对系统中的线性项和非线性项进行分解可得

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} L_{x_1} \\ L_{x_2} \\ L_{x_3} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 10(x_2 - x_1) \\ (24 - 4c)x_1 + cx_2 \\ -8x_3/3 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} N_{x_1} \\ N_{x_2} \\ N_{x_3} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ -x_1x_3 \\ x_1x_2 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (15)$$

根据 (10) 式, 对非线性项进行分解可得

$$\begin{aligned} A_2^0 &= -x_1^0 x_3^0, \\ A_2^1 &= -x_1^1 x_3^0 - x_1^0 x_3^1, \\ A_2^2 &= -x_1^2 x_3^0 - x_1^1 x_3^1 - x_1^0 x_3^2, \\ A_2^3 &= -x_1^3 x_3^0 - x_1^2 x_3^1 - x_1^1 x_3^2 - x_1^0 x_3^3, \\ A_2^4 &= -x_1^4 x_3^0 - x_1^3 x_3^1 - x_1^2 x_3^2 - x_1^1 x_3^3 - x_1^0 x_3^4, \\ A_2^5 &= -x_1^5 x_3^0 - x_1^4 x_3^1 - x_1^3 x_3^2 - x_1^2 x_3^3 - x_1^1 x_3^4 \\ &\quad - x_1^0 x_3^5; \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} A_3^0 &= x_1^0 x_2^0, \\ A_3^1 &= x_1^1 x_2^0 + x_1^0 x_2^1, \\ A_3^2 &= x_1^2 x_2^0 + x_1^1 x_2^1 + x_1^0 x_2^2, \\ A_3^3 &= x_1^3 x_2^0 + x_1^2 x_2^1 + x_1^1 x_2^2 + x_1^0 x_2^3, \\ A_3^4 &= x_1^4 x_2^0 + x_1^3 x_2^1 + x_1^2 x_2^2 + x_1^1 x_2^3 + x_1^0 x_2^4, \\ A_3^5 &= x_1^5 x_2^0 + x_1^4 x_2^1 + x_1^3 x_2^2 + x_1^2 x_2^3 + x_1^1 x_2^4 \\ &\quad + x_1^0 x_2^5. \end{aligned} \quad (17)$$

根据给出的初始条件, 即有

$$\begin{aligned} x_1^0 &= x_1(t_0), \\ x_2^0 &= x_2(t_0), \\ x_3^0 &= x_3(t_0). \end{aligned} \quad (18)$$

令  $c_1^0 = x_1^0, c_2^0 = x_2^0, c_3^0 = x_3^0$ , 即  $\mathbf{c}^0 = [c_1^0, c_2^0, c_3^0]$ . 根据 (13), (14) 式和性质 (2), (3) 和 (4) 可得

$$\begin{aligned} x_1^1 &= 10(c_2^0 - c_1^0) \frac{(t - t_0)^q}{\Gamma(q + 1)}, \\ x_2^1 &= [(24 - 4c)c_1^0 + c \cdot c_2^0 - c_1^0 c_3^0] \frac{(t - t_0)^q}{\Gamma(q + 1)}, \\ x_3^1 &= (-\frac{8}{3}c_1^0 + c_1^0 c_2^0) \frac{(t - t_0)^q}{\Gamma(q + 1)}. \end{aligned} \quad (19)$$

将系数赋值到对应变量, 即令

$$\begin{aligned} c_1^1 &= 10(c_2^0 - c_1^0), \\ c_2^1 &= (24 - 4c)c_1^0 + c \cdot c_2^0 + c_4^0 - c_1^0 c_3^0, \\ c_3^1 &= -(8/3)c_1^0 + c_1^0 c_2^0, \end{aligned}$$

可得  $\mathbf{x}^1 = \mathbf{c}^1(t - t_0)^q / \Gamma(q + 1)$ . 可见只要求出每一项对应的系数即可, 根据 (13) 式中的推导关系, 性质 (2), (3), (4) 和非线性项分解式, 可推得  $\mathbf{x}$  其他 5 项的系数分别为

$$\begin{aligned} c_1^2 &= 10(c_2^1 - c_1^1), \\ c_2^2 &= (24 - 4c)c_1^1 + c \cdot c_2^1 - c_1^1 c_3^0 - c_1^0 c_3^1, \\ c_3^2 &= -\frac{8}{3}c_1^1 + c_1^1 c_2^0 + c_1^0 c_2^1; \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} c_1^3 &= 10(c_2^2 - c_1^2), \\ c_2^3 &= (24 - 4c)c_1^2 + c \cdot c_2^2 - c_1^2 c_3^0 \\ &\quad - c_1^1 c_3^1 \frac{\Gamma(2q + 1)}{\Gamma^2(q + 1)} - c_1^0 c_3^2, \\ c_3^3 &= -\frac{8}{3}c_1^2 + c_1^2 c_2^0 + c_1^1 c_2^1 \frac{\Gamma(2q + 1)}{\Gamma^2(q + 1)} + c_1^0 c_2^2; \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} c_1^4 &= 10(c_2^3 - c_1^3), \\ c_2^4 &= (24 - 4c)c_1^3 + c \cdot c_2^3 - c_1^3 c_3^0 - (c_1^2 c_3^1 \\ &\quad + c_1^1 c_3^2) \frac{\Gamma(3q + 1)}{\Gamma(q + 1)\Gamma(2q + 1)} - c_1^0 c_3^3, \end{aligned}$$

$$c_3^4 = -\frac{8}{3}c_1^3 + c_1^3c_2^0 + (c_1^1c_2^2 + c_1^2c_2^1)\frac{\Gamma(3q+1)}{\Gamma(q+1)\Gamma(2q+1)} + c_1^0c_2^3; \quad (22)$$

$$c_1^5 = 10(c_2^4 - c_1^4),$$

$$c_2^5 = (24 - 4c)c_1^4 + c \cdot c_2^4 - c_1^4c_3^0 - (c_1^3c_3^1 + c_1^1c_3^3)\frac{\Gamma(4q+1)}{\Gamma(q+1)\Gamma(3q+1)} - c_1^2c_3^2\frac{\Gamma(4q+1)}{\Gamma^2(2q+1)} - c_1^0c_3^4,$$

$$c_3^5 = -\frac{8}{3}c_1^4 + c_1^4c_2^0 + (c_1^1c_2^3 + c_1^3c_2^1)\frac{\Gamma(4q+1)}{\Gamma(q+1)\Gamma(3q+1)} + c_1^2c_2^2\frac{\Gamma(4q+1)}{\Gamma^2(2q+1)} + c_1^0c_2^4; \quad (23)$$

$$c_1^6 = 10(c_2^5 - c_1^5),$$

$$c_2^6 = (24 - 4c)c_1^5 + c \cdot c_2^5 - c_1^5c_3^0 - (c_1^4c_3^1 + c_1^1c_3^4)\frac{\Gamma(5q+1)}{\Gamma(q+1)\Gamma(4q+1)} - (c_1^2c_3^3 + c_1^3c_3^2)\frac{\Gamma(5q+1)}{\Gamma(2q+1)\Gamma(3q+1)} - c_1^0c_3^5,$$

$$c_3^6 = -\frac{8}{3}c_1^5 + c_1^5c_2^0 + (c_1^1c_2^4 + c_1^4c_2^1)\frac{\Gamma(5q+1)}{\Gamma(q+1)\Gamma(4q+1)} + (c_1^2c_2^3 + c_1^3c_2^2)\frac{\Gamma(5q+1)}{\Gamma(2q+1)\Gamma(3q+1)} + c_1^0c_2^5. \quad (24)$$

此时系统方程的解可表示为

$$\tilde{x}_j(t) = c_j^0 + c_j^1\frac{(t-t_0)^q}{\Gamma(q+1)} + c_j^2\frac{(t-t_0)^{2q}}{\Gamma(2q+1)} + c_j^3\frac{(t-t_0)^{3q}}{\Gamma(3q+1)} + c_j^4\frac{(t-t_0)^{4q}}{\Gamma(4q+1)} + c_j^5\frac{(t-t_0)^{5q}}{\Gamma(5q+1)} + c_j^6\frac{(t-t_0)^{6q}}{\Gamma(6q+1)}, \quad (25)$$

其中  $j = 1, 2, 3$ . 这样就可以得到系统变量的解析解, 在实际计算中, 应当将时间段  $[t_0, t]$  分成较小的时间段  $[t_k, t_{k+1}]$ , 在每一小段时间上以  $t_k$  为  $t_0$ , 得到对应  $t_{k+1}$  时刻的值, 以此类推. 图 1 为采用 (25) 式仿真得到的分数阶简化 Lorenz 系统吸引子相图, 其中小时间段长度为 0.01 s, 初值为 [0.1 0.2 0.3], 参数  $c = 5$ , 阶数  $q = 0.98$ .

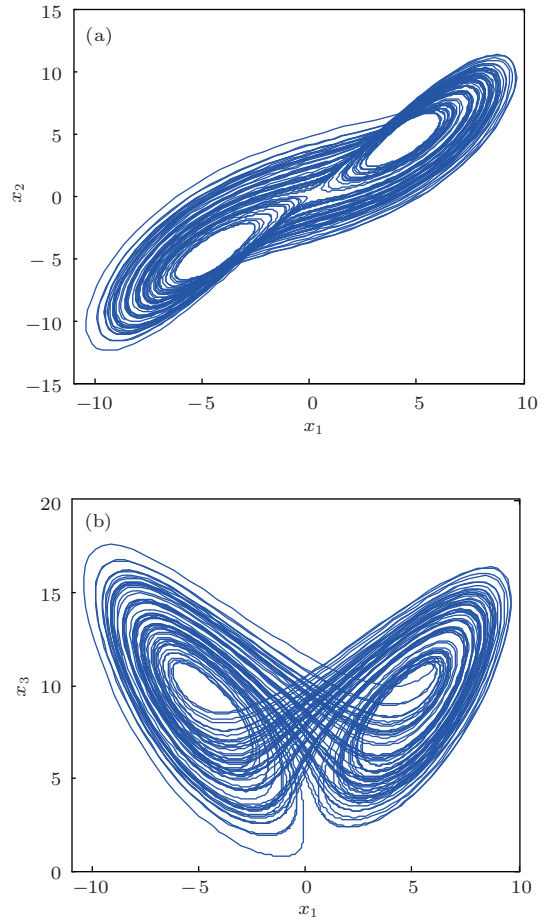


图 1 分数阶简化 Lorenz 系统的吸引子相图 (a)  $x_1-x_2$  平面; (b)  $x_1-x_3$  平面

### 3 不同算法对比与分数阶简化 Lorenz 系统复杂性分析

#### 3.1 不同算法对比

当  $q = 1$  时, 系统为整数阶混沌系统, 其为分数阶的一种特殊情况. 对于整数阶混沌系统的求解, 使用较多的是 Runge-Kutta 法和欧拉算法. 这里将采用 Adomian 算法、预估-校正算法和 Runge-Kutta 算法求解, 设有如下初值问题:

$${}^*D_{t_0}^q y(t) = y, \quad y(0) = 1. \quad (26)$$

当  $q = 1$  时, 可知系统的精确解为  $y(t) = e^t$ . 采用三种算法求解系统, 其结果分别记为  $y_n^{(A)}$ ,  $y_n^{(Y)}$  和  $y_n^{(R)}$ , 其求解过程分别如 (27), (28) 和 (29) 式所示, 并与精确解  $y$  进行对比, 图 2 为计算误差图.

$$y^{(A)} = y_0 \left[ 1 + \frac{(t-t_0)^q}{\Gamma(q+1)} + \dots + \frac{(t-t_0)^{8q}}{\Gamma(8q+1)} \right]; \quad (27)$$

$$y_{n+1}^{(Y)} = y_0 + \frac{h^q}{\Gamma(q+2)} \left( y_{n+1}^p + \sum_{j=0}^n \alpha_{j,n+1} y_j^{(Y)} \right),$$

$$\alpha_{j,n+1} = \begin{cases} n^q - (n-2)(n+1)^q, & j=0, \\ (n-j+2)^{q+1} + (n-j)^{q+1} \\ -2(n-j+1)^{q+1}, & 1 \leq j \leq n, \end{cases}$$

$$y_{n+1}^p = y_0 + \frac{1}{\Gamma(q)} \sum_{j=0}^n b_{j,n+1} y_j^{(Y)},$$

$$b_{j,n+1} = \frac{h^q}{q} ((n-j+1)^q - (n-j)^q),$$

$$0 \leq j \leq n; \tag{28}$$

$$y_{n+1}^{(R)} = y_n^{(R)} + \frac{h}{6} (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4),$$

$$K_1 = y_n^{(R)},$$

$$K_2 = y_n^{(R)} + \frac{h}{2} K_1,$$

$$K_3 = y_n^{(R)} + \frac{h}{2} K_2,$$

$$K_4 = y_n^{(R)} + h K_3. \tag{29}$$

由图 2 可见, 随着时间增加, 三种算法的累积误差都在增加, 且增幅呈指数态. 从误差的大小来看, 预估-校正算法误差最大, Runge-Kutta 较其小了 3 个数量级, 而 Adomian 再小 3 个数量级, 可见利用 Adomian 分解算法能够得到更为准确的数值解. 从截断误差的角度来看, 预估-校正算法的截断误差为

$$e = \max_{j=0,1,\dots,N} |x(t_j) - x_h(t_j)| = o(h^p). \tag{30}$$

其中  $p = \min(2, 1+q)$ , 当  $q = 1$  时  $e = o(h^2)$ . Runge-Kutta 算法的截断误差为

$$e = \max_{j=0,1,\dots,N} |x(t_j) - x_h(t_j)| = o(h^5). \tag{31}$$

可见其求解精度更高. Adomian 算法的收敛特性类似于 Taylor 级数, 且其收敛速度非常快, 通常只要取前面几项即可得到比较精确的解, 其误差收敛于 [24]

$$e \leq k \frac{M^P}{P!}, \tag{32}$$

其中  $P$  为项数, 如 (27) 式中  $P = 8$ ;  $\|N^{(P)}(0)\| \leq k$ ,  $\sum_{i=0}^{\infty} |u_i| \leq M$ .

Adomian 分解算法和预估-校正算法的时间复杂度和空间复杂度对比如表 1 所示. 可见 Adomian 算法在时间复杂度和空间复杂度两方面都优于预

估-校正算法. 表 1 中, 后 3 行为求解分数阶简化 Lorenz 系统时, 为得到不同长度序列所需要的时间 (计算机 CPU 频率不同, 计算结果会有差异, 作者计算机: Intel Dual E2180 2.0 GHz), 可见, 预估-校正算法所需时间增长幅度比 Adomian 算法快得多. 对比 Adomian 算法和预估-校正算法, 可见在求解分数阶混沌系统时, Adomian 算法是更好的选择.

表 1 分数阶混沌数值求解算法对比

	Adomian 算法	预估-校正算法
时间复杂度	$O(n)$ ,	$O(n^2)$ ,
空间复杂度	$O(1)$ ,	$O(n)$ ,
$N = 1000$	0.9701 s	2.0154 s
$N = 2000$	1.8403 s	7.7051 s
$N = 5000$	4.5162 s	51.3995 s

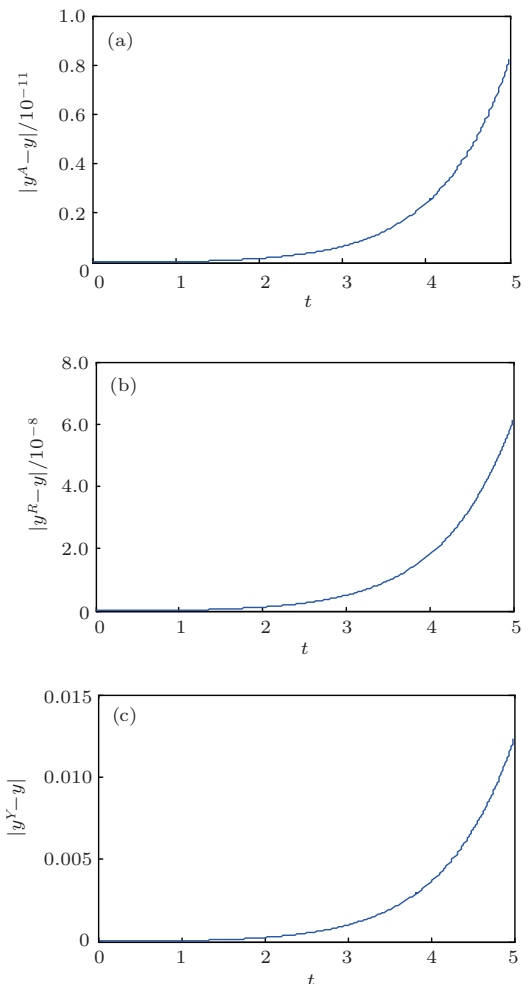


图 2 不同算法求解误差曲线 (a) Adomian 算法; (b) Runge-Kutta 算法; (c) 预估-校正算法

### 3.2 分数阶简化Lorenz系统的动力学特性分析

分数阶简化Lorenz系统的阶数 $q$ 变化时的分岔图如图3所示. 从图3(a)中可以看出, 当 $q$ 大于0.45时系统为混沌系统, 即此时系统出现混沌的最小阶数为1.35, 对比在相同仿真参数条件下( $h = 0.01, c = 5$ )利用预估-校正算法出现混沌最小阶 $q$ 为0.93, 即最小阶数2.79<sup>[23]</sup>, 本算法得到的结果小1/2, 可见利用Adomian分解法求解精确度更优, 能在更低阶数下得到系统的混沌解. 由图3(a)可见, 当 $q$ 处于0.68到0.70之间时, 系统存在周期态, 但是图中并不明显, 需要进一步放大进行观察. 图3(b)为 $q$ 区间放大后的系统分岔图. 由图可见, 系统在此区间存在有混沌态和周期态, 动力学性能比较丰富. 在实际加密和保密通信应用中 $q$ 值应避免取0.68到0.70之间的值. 图4为 $q$ 取0.45时参数 $c$ 变化的分岔图结果, 由图可见, 当 $c \in [-2, 1.7)$ 时, 系统为周期态, 当 $c \in [1.7, 7.1)$ 时系统处于混沌态, 最后系统呈现周期态.

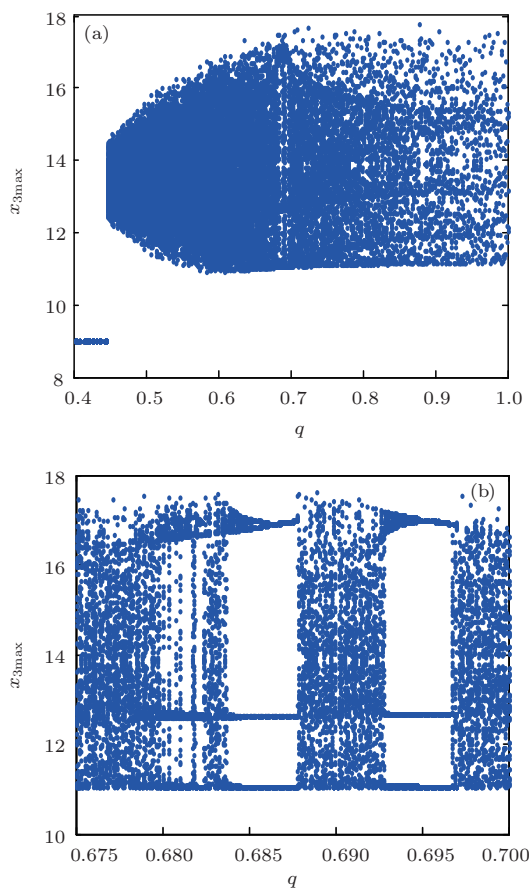


图3 分数阶简化Lorenz系统 $q$ 变化分岔图( $c = 5$ ) (a)  $q \in [0.4, 1]$ ; (b)  $q \in [0.675, 0.7]$

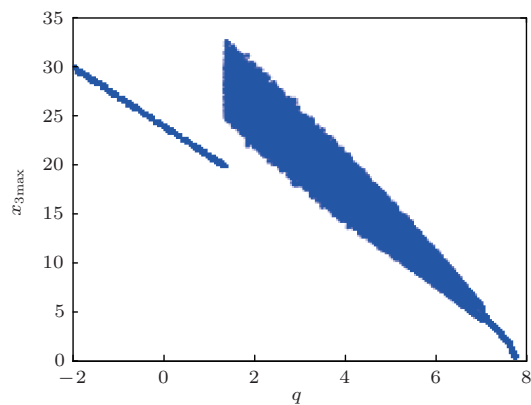


图4 分数阶简化Lorenz系统 $c$ 变化分岔图( $q = 0.45$ )

### 3.3 分数阶简化Lorenz系统的复杂度分析

采用SE算法<sup>[19]</sup>和 $C_0$ 算法<sup>[20]</sup>, 分别计算 $q$ 变化时系统的复杂度, 其结果如图5所示. 计算复杂度时计算步长为0.01 s, 序列长度为50000. 从图5可以看出SE复杂度和 $C_0$ 复杂度随阶数 $q$ 变化时变化趋势一致; 当 $q$ 大于0.45时两种复杂度随着 $q$ 值的增加呈减小的趋势, 且和图3(a)具有一致性. 可见, SE和 $C_0$ 复杂度能够反映出系统的动力学特性; 分数阶混沌系统具有比整数阶混沌系统更大的复杂度测度值, 从复杂度的角度反映出研究分数阶

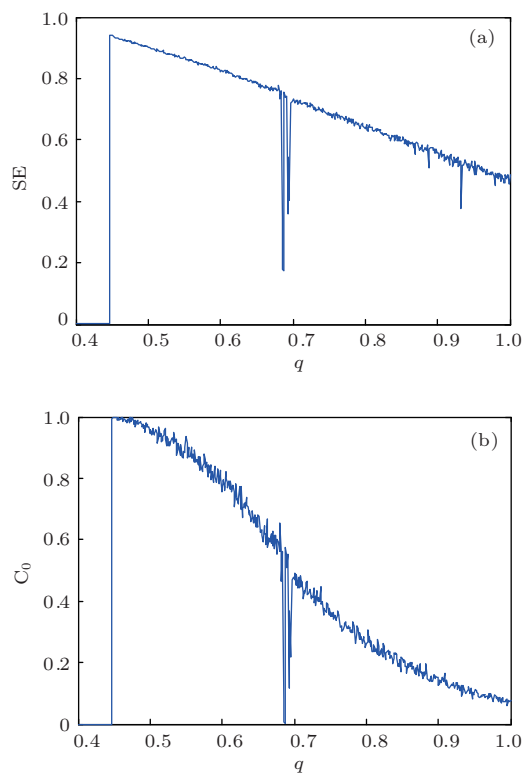


图5 分数阶简化Lorenz系统随 $q$ 变化时的复杂度 (a) SE复杂度; (b)  $C_0$ 复杂度

混沌系统具有重要的理论和实际意义. 从图 5 中还可以看出, 当  $q$  取 0.69 左右的值时, 存在复杂度较小窗口, 与图 3 中出现的周期窗口是对应的.

$q = 0.45$ ,  $c$  变化时的复杂度变化规律如图 6 所示. 同样可见 SE 复杂度测度值和  $C_0$  复杂度测度值具有较好的一致性; 当系统处于周期态时复杂度几乎接近 0, 而当系统处于混沌态时, 复杂度比较大, 进一步反映出复杂度能够反映出系统的动力学状态. 混沌态时, 复杂度不随  $c$  值增加而明显变化, 即在实际应用中, 只要取混沌态时的  $c$  值即可.

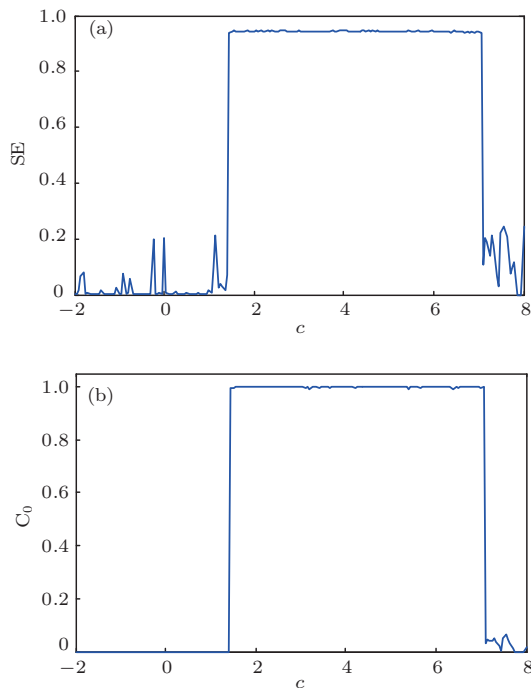


图 6 分数阶简化 Lorenz 系统  $c$  变化时的复杂度 (a) SE 复杂度; (b)  $C_0$  复杂度

## 4 结 论

采用 Adomian 分解算法求解分数阶混沌系统, 给出了详细的算法描述, 结合分数阶简化 Lorenz 系统, 研究了其数值解, 并得到了吸引子相图. 对比了 Adomian 分解算法、预估-校正算法和 Runge-Kutta 算法的性能, 对系统动力学特性和复杂度进行了分析, 并得到以下结论.

1. 通过小窗口划分法, Adomian 分解算法可实现对分数阶混沌系统精确求解. 与预估-校正算法和 Runge-Kutta 算法相比, Adomian 分解算法的计算误差最小.

2. 利用 Adomian 分解算法得到的系统出现混沌最小阶数明显小于利用预估-校正算法得到的最小阶数, 所以在对分数阶混沌系统进行数值仿真

时, 应采用精度更高的 Adomian 分解算法.

3. 分数阶简化 Lorenz 系统复杂度随阶数  $q$  和参数  $c$  变化规律表明, 复杂度变化规律和分岔图结果一致, 且当  $q$  增加时, 复杂度呈总体减小的趋势, 表明分数阶混沌系统更具有更好的应用前景.

## 参考文献

- [1] Zhang X X, Qiu T S, Sheng H 2013 *Acta Phys. Sin.* **41** 508 (in Chinese) [张旭秀, 邱天爽, 盛虎 2013 物理学报 **41** 508]
- [2] Zhao L D, Hu J B, Fang J A, Zhang W B 2012 *Nonl. Dyn.* **70** 475
- [3] Ke T D, Obukhovskii V, Wong N C 2013 *Appl. Anal.* **92** 115
- [4] Li C G, Chen G R 2004 *Physica A: Stat. Mech. Appl.* **341** 55
- [5] Daftardar-Gejji V, Bhalekar S 2010 *Comp. Math. Appl.* **59** 1117
- [6] Ge Z M, Ou C Y 2007 *Chaos. Soli. Frac.* **34** 262
- [7] Chen D, Zhang R, Sprott J C 2012 *Nonl. Dyn.* **70** 1549
- [8] Chen D, Liu Y, Ma X 2012 *Nonl. Dyn.* **67** 893
- [9] Wang Z, Huang X, Li Y X 2013 *Chin. Phys. B* **22** 010504
- [10] Diethelm K 1997 *Elec. Trans. Numer. Anal.* **5** 1
- [11] Sun H, Abdelwahab A, 1984 *Onaral B IEEE Trans. Auto. Cont.* **29** 441
- [12] Mohammed S T, Mohammad H 2008 *Nonl. Anal.* **69** 1299
- [13] Adomian G. 1984 *J. Math. Anal. Appl.* **102** 420
- [14] Cafagna D, Grassi G. 2008 *Int. J. Bifur. Chaos* **18** 1845
- [15] Cafagna D, Grassi G 2009 *Int. J. Bifur. Chaos* **19** 339
- [16] Gottwald G A, Melbourne I 2004 *Proc. Roy. Soc. London. A: Math. Phys. Eng. Sci.* **460** 603
- [17] Chen X J, Li Z, Bai B M 2011 *J. Elec. Info. Tech.* **33** 1198 (in Chinese)[陈小军, 李赞, 白宝明 2011 电子与信息学报 **33** 1198]
- [18] Sun K H, He S B, Sheng L Y 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 20505 (in Chinese)[孙克辉, 贺少波, 盛利元 2011 物理学报 **60** 20505]
- [19] Sun K H, He S B, He Y 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 10501 (in Chinese)[孙克辉, 贺少波, 何毅 2013 物理学报 **62** 10501]
- [20] Shen E H, Cai Z J, Gu F J 2005 *Appl. Math. Mech.* **26** 1083 (in Chinese)[沈恩华, 蔡志杰, 顾凡及 2005 应用数学和力学 **26** 1083]
- [21] Zhu C X, Zhou Y 2009 *Cont. Deci.* **24** 161 (in Chinese)[朱呈祥, 邹云 2009 控制与决策 **24** 161]
- [22] Liu S D, Shi S Y, Liu S S 2007 *Meteor. Sci. Tech* **35** 15 (in Chinese) [刘式达, 时少英, 刘式适 2007 气象科技 **35** 15]
- [23] Sun K, Wang X, Sprott J C 2010 *Int. J. Bifur. Chaos* **20** 1209
- [24] Abbaoui K, Cherruault Y 1994 *Comp. Math. Appl.* **28** 103

# Solution of the fractional-order chaotic system based on Adomian decomposition algorithm and its complexity analysis\*

He Shao-Bo Sun Ke-Hui<sup>†</sup> Wang Hui-Hai

(School of Physics and Electronics, Central South University, Changsha 410083, China)

( Received 9 October 2013; revised manuscript received 22 October 2013 )

## Abstract

Based on the definitions of fractional-order differential and Adomian decomposition algorithm, the numerical solution of the fractional-order simplified Lorenz system is investigated. Results show that compared with the Adams-Bashforth-Moulton algorithm, Adomian decomposition algorithm yields more accurate results and needs less computing as well as memory resources. It is even more accurate than Runge-Kutta algorithm when solving the integer order system. The minimum order of the simplified Lorenz system solved by using Adomian decomposition algorithm is 1.35, which is much smaller than 2.79 achieved by the Adams-Bashforth-Moulton algorithm. Dynamical characteristics of the system are studied by the phase diagram, bifurcation analysis, and complexities are calculated by employing the spectral entropy (SE) algorithm and  $C_0$  algorithm. Complexity results are consistent with the bifurcation diagrams, for which mean complexity can also reflect the dynamic characteristics of a chaotic system. Complexity decreases with increasing order  $q$ , and there are little influences on complexity versus changes of parameter  $c$  when the system is chaotic. It provides a theoretical and experimental basis for the application of fractional-order chaotic system in the field of encryption and secure communication.

**Keywords:** Adomian decomposition algorithm, fractional-order simplified Lorenz system, dynamical characteristic, complexity

**PACS:** 05.45.Tp, 05.45.-a

**DOI:** [10.7498/aps.63.030502](https://doi.org/10.7498/aps.63.030502)

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 61161006, 61073187).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: [kehui@csu.edu.cn](mailto:kehui@csu.edu.cn)