

## 局域共振型声子晶体中的缺陷态研究\*

侯丽娜 侯志林† 傅秀军

(华南理工大学物理系, 广州 510640)

(2013年9月25日收到; 2013年11月3日收到修改稿)

本文以二维固体局域共振声子晶体为例, 对次波长区域缺陷态的实现机理及其特点进行了探讨. 众所周知, 工作于次波长区域的声子晶体可以用有效媒质理论来描述, 其色散关系对其构成单元的排列结构并不敏感, 因而使得共振型声子晶体的带结构难以被其构成单元的局域空间无序所打破. 本文发现共振型声子晶体在其带隙附近的色散关系可由共振单元间的长程相互作用来理解. 基于这一理解, 对目前文献中提出的两种实现局域态的方法进行了研究, 结果表明缺陷态的引入正是通过打破这种长程相互作用来实现的. 另外, 在此理解的基础上, 通过引入非各向同性“缺陷”共振单元, 实现了纵波与横波导波模式的分离.

**关键词:** 声子晶体, 局域共振, 次波长缺陷态

**PACS:** 43.20.+g, 42.50.Gy, 46.40.Ff

**DOI:** 10.7498/aps.63.034305

## 1 引言

声子晶体是由两种或两种以上的弹性常数不同的材料周期性排列获得的人工复合结构. 在过去的十多年, 弹性波在声子晶体中的传播特性受到了大家的广泛关注<sup>[1-24]</sup>. 这种结构的一个重要特性是存在声频带隙, 即在这个频率范围内没有声波允许透过. 这样的周期结构有着很多潜在的应用, 比如声滤波器、传感器、声波导等<sup>[11-13,16,17]</sup>. 目前认为, 声子晶体带隙的产生主要基于两种机理, 即布拉格散射机理<sup>[1]</sup>和局域共振机理<sup>[18]</sup>. 在布拉格散射机理中, 当声波的波长与晶格常数相当时, 由于布拉格反射作用, 完全带隙产生. 在这种机理中, 散射体的几何形状、晶格结构、散射体与晶格对称性等参数都会对带隙的位置和宽度产生影响<sup>[6]</sup>. 对于局域共振型声子晶体, 起主要作用的是结构中的局部共振单元, 当基体中传播波的频率与共振单元的共振频率相近时, 即便其波长远大于共振单元间距, 共振单元也会发生共振, 因而形成带隙<sup>[18,19]</sup>. 相对于布拉格型声子晶体, 局域共振型声子晶体的工作波长可以远远大于其结构常数, 也

就是说整个声子晶体可以看作是一种等效的均匀弹性媒质, 因而波在其中的行为可以用等效弹性参数来描述<sup>[20,21]</sup>. 目前这种结构在声波控制中被之泛采用<sup>[14,15,19-25]</sup>, 并被冠以一个专业的名词, 即声学超材料, 意为它们具有自然界材料所不具有的弹性性质, 例如负的有效弹性常数或负的有效动态质量<sup>[20,21]</sup>.

在基于布拉格散射的声子晶体中, 当晶体结构存在缺陷时, 弹性波会被局域在缺陷处周围, 形成缺陷态. 例如, 通过从完整结构中移除一个或一排散射体, 分别可以实现点缺陷或线缺陷<sup>[11-13]</sup>. 这些缺陷态可以用于实现弹性波的微腔共振和导波或滤波等. 同传统的波导相比, 线缺陷波导可以实现大角度弯曲导波<sup>[16]</sup>. 然而, 由于其带隙机理的限制, 基于布拉格散射的声子晶体须工作于波长与其晶格尺寸相当的频段, 因而基于这种机理的缺陷态结构会有一个较大的尺寸, 尤其是在低频段.

为实现长波长下小尺寸的微腔或导波, 一种很自然的思路是在局域共振型的声子晶体(或称之为超材料)中引入缺陷态, 利用局域共振型声子晶体工作于次波长的特性来实现结构的小型化. 然而, 研究发现局域共振带隙的打开并不严格依赖于其

\* 国家自然科学基金面上项目(批准号: 11274121)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: phzlh@scut.edu.cn

晶格的具体结构,带隙的打开位置与单个共振体的共振频率有关,而带隙的宽度则由共振体的填充率决定<sup>[19]</sup>.因此,在局域共振光子晶体中引入缺陷态是一件相对困难的事情,不能简单地由移除一个或一排散射体来实现.

最近, Lemoult 等<sup>[25]</sup>发现,在共振型电磁及空气声超材料中,可以通过局部地引入“缺陷”共振体来实现深度次波长区域内的共振微腔及导波.他们提出的空气声超材料体系由亥姆赫兹共振腔阵列构成,他们证明在这一体系中点缺陷或线缺陷态可以通过升高一个或一排共振腔的共振频率来实现.这一工作为在次波长区域操控经典波指出了一种新的思路.然而,我们发现作者们对这种缺陷态机理的讨论并不完整.一方面,在同一篇文献中,作者们研究了在超材料中近场作用对局部共振带隙附近色散关系的贡献,并指出在超材料中近场作用是可以忽略的,也就是说其色散关系与近场作用无关.文中作者们提及的近场特指局域于共振体附近的高阶散射倏逝波,这一点可以从他们给出的附录材料中看到.而另一方面,作者们又将波导态解释为近场作用的结果.注意到在这一结构中波导态的形成是通过稍微升高一排共振体的共振频率来实现的,如果近场作用在正常共振体阵列中可以忽略,那么在“缺陷”共振体周围也不应该存在.另外,基于这一机理的缺陷态性质,如空间局域性及波导带的带宽与结构的关系也没有得到充分的讨论.我们注意到在次波长超材料中,近场作用是必然存在的,这一观点可以被许多工作所验证,例如基于劈裂金属共振环的一维或二维低频电磁波导等<sup>[26,27]</sup>.但遗憾的是到目前为止,还很少见到对这一近场作用的细致研究.

我们发现,散射体间的近场并不总是源于散射体对入射波的高阶散射.在基于局域共振的结构中,由于共振体对处于其共振频率附近入射波的强烈散射作用,共振体间存在一种很强的相互作用.由于共振体对外场驱动的非同步响应,这种相互作用表现出与由高阶散射导致的相互作用完全不同的性质.当入射波的频率接近但低于共振体的共振频率时,散射体间表现为相互吸引作用,而当入射波的频率接近但高于共振体的共振频率时,散射体间表现为相互排斥作用.而且,这种相互作用具有长程性,较难以被结构无序所打破,因此超材料的色散关系对结构并不敏感,缺陷态也难以由类似于布拉格型声子晶体中引入缺陷的方法,即移除某些

散射体来得到.本文中,我们先对上述原理作详细讨论,然后探讨改变共振体间长程作用的方法.在这些分析的基础上,我们研究了二维固体局域共振光子晶体中次波长缺陷态的实现方法,并讨论了缺陷态的性质与结构的关系.我们发现,目前文献中提及的两种引入缺陷态方法<sup>[23,25]</sup>,其机理非常类似于在固体物理中详细讨论过的一维链中缺陷态的引入<sup>[28]</sup>.

## 2 局域共振型声子晶体中共振单元间的相互作用

对共振体间相互作用的理解可以先从  $A, B$  两个脉动声源间的相互作用开始<sup>[29]</sup>.脉动源  $A$  的膨胀通过压缩周围的媒质,使得与其靠近的源  $B$  感受到力的作用.如果这一作用力以波的形式传到  $B$  的表面时与  $B$  本身的振动同步,即作用力压迫  $B$  时  $B$  的表面刚好向内收缩,则  $B$  源对  $A$  的反作用表现为吸引作用,反之则表现排斥作用.这一相互作用在声学中通常以互辐射阻抗来描述:相互排斥表现为互阻增加,这时声源表现出更强的辐射能力,也就是声源的能量以辐射的形式向背景中传播;反之,两个声源的相互吸引表现为互抗增加,源的能量会局域在它们的周围而辐射不出去.如果将两源换成  $A, B$  两个共振体,这种吸引与排斥作用同样会存在.但与脉动源的情形不同的是,共振体对外力的响应是非同步的,也就是说,当  $A$  共振体发出波并压缩到  $B$  共振体时,  $B$  共振体并不总是会收缩.为考虑  $B$  对  $A$  的反作用,假设  $A$  共振体已被某种方式所激发,并向其周围辐射波能.由于  $B$  处于  $A$  激发的声场中,它将会受到  $A$  的作用而跟随  $A$  振动并也向周围辐射波.当波的频率处于  $B$  的共振频率以下时,  $B$  受迫振动发出的波会反作用于  $A$ , 如这种再辐射波到达  $A$  时刚好与  $A$  的振动同相或部分同相(在深度次波长区域,波由  $A$  传到  $B$  所引起的相差可以忽略),则  $B$  对  $A$  的反作用表现为吸引作用.当这种情况发生时,  $A, B$  之间的媒质振动最强,而在它们之外的区域(例如  $A$  与  $B$  的外向延长线上),波场则刚好相消,因此波场将局域在  $A$  与  $B$  之间.这一情形类似于原子之间的成键态<sup>[28]</sup>.相反,当波的频率处于  $B$  的共振频率以上时,  $B$  对  $A$  的反作用会表现为排斥作用,波场的强度在  $A, B$  之间最小,类似于原子之间的反键态.反过来,  $A$  对  $B$  的反作用可作类似的分析.需要注意这种相互作

用的两个特点: 其一, 这种相互作用是通过传播波而非倏逝波来传递的, 因而具有长程性; 其二, 这种相互作用的强度取决于共振响应的大小, 因此只在共振体的共振频率附近才有可观的强度, 离开共振频率越远其强度越小.

当考虑一无限共振体阵列时, 上述的成键与反键态会劈裂成成键带和反键带. 对应成键带中的模式, 波场将主要局域在共振体阵列中; 而对应于反键带中的模式, 其波场将会排出共振体而向其周围媒质中辐射. 当考虑波从无限阵列的基底中入射时, 由于反键态具有较长的波长, 因而容易被其激发. 由于共振体阵列对入射波的异相响应, 反键带中的模式因激发而产生的再辐射波将与基底中的直接传播波发生强烈的相干相消, 因而形成带隙; 相反, 成键带中的模式却会被局域于共振体阵列中, 对应于带隙底部的短波长平带. 需要注意的是, 虽然成键带中各模式的声场主要局域于共振体阵列中, 但由于共振体阵列的无限性, 它们并不是我们所要的空间局域态, 除非我们将共振体阵列的维度降低 (例如, 在三维情形下, 我们将共振体阵列降为二维或一维, 类似于用于次波长电磁导波的一维劈裂金属共振环链<sup>[26]</sup>或二维网眼布 (fishnet) 系统<sup>[27]</sup>).

从以上的讨论可以看到, 要在共振型声子晶体

中引入缺陷态, 我们必须局部地打破共振体间的长程相互作用, 使共振体阵列中形成一类空间局域模式, 这类模式既不与共振体阵列的波模式相互作用, 也不与基底传播模式相互作用.

### 3 二维固体局域共振型声子晶体的带结构及缺陷态

作为上述理论的一个验证, 我们先计算二维固体局域共振体系的带结构及其中一些代表性模式的声场分布.

如图 1 所示, 我们的研究对象是将以橡胶包裹 Au 圆柱体构成的共振单元按正方晶格排列在环氧树脂中所构成的体系. 体系的晶格常数及共振体的内外径分别取为  $a = 15 \text{ mm}$ ,  $r_1 = 7 \text{ mm}$  和  $r_2 = 5 \text{ mm}$ , 材料的弹性常数分别取为: 环氧树脂密度  $\rho_{\text{epoxy}} = 1180 \text{ kg/m}^3$ , 纵波和横波速度  $c_L = 2535 \text{ m/s}$ ,  $c_T = 1157 \text{ m/s}$ ; 橡胶密度  $\rho_{\text{rubber}} = 1300 \text{ kg/m}^3$ , 纵波及横波  $c_L = 23 \text{ m/s}$  与  $c_T = 6 \text{ m/s}$ ; 金的密度  $\rho_{\text{Au}} = 19500 \text{ kg/m}^3$ , 纵波及横波  $c_L = 3360 \text{ m/s}$  与  $c_T = 1239 \text{ m/s}$ . 为直观起见及下文分析缺陷态的需要, 我们的大部分计算都采用超元胞技术, 计算由有限元方法完成.

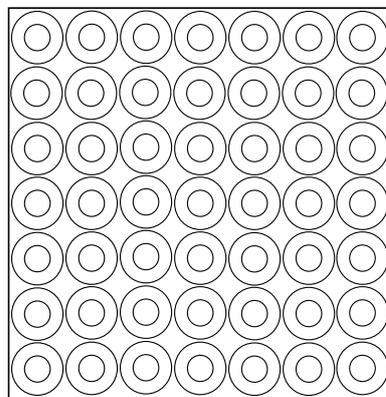
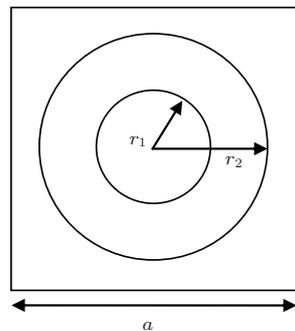


图 1 橡胶包裹圆柱形金 (Au) 核构成的局域共振单元及其按正方晶格排列在环氧树脂中构成结构的截面图 (其中  $a$  为晶格常数,  $r_1$  及  $r_2$  分别为重核与包层的半径)

图 2 给出了上述体系的带结构及某些特殊模式的场分布. 其中图 2(a) 为  $7 \times 7$  超元胞沿简约布里渊区  $\Gamma X$  方向的带结构, 由于结构在  $X$  与  $Y$  方向的对称性, 我们只考虑了  $\Gamma X$  方向.

从图中可以看到局域共振带隙在  $f = 317 \text{ Hz}$  至  $f = 1017 \text{ Hz}$  频率间隔中打开, 注意到这一频段内对应基底材料中的最短波长 (横波) 约为  $\lambda = 3.65 \text{ m}$  至  $\lambda = 1.14 \text{ m}$ , 大约为晶格常数的 100 倍, 即这一带隙处在次波长区域. 图 2(b) 给出了

处于带隙底部及顶部 ( $\Gamma$  点) 的两个模式对应的本征场位移分布  $(\sqrt{u_x^2 + u_y^2})$ . 从这些图中可以看到, 带隙底部模式的声场主要分布在共振体内部, 表明它们是由相互吸引作用所产生的成键态. 另外相临共振体间有非常大的相差, 也就是说成键带中模式的波长远小于基底传播波的波长. 相反, 带隙顶部模式的声场则主要分布于基底中, 表明它们是由共振体间的相互排斥作用所引起的反键态, 相临共振体趋于同相振动.

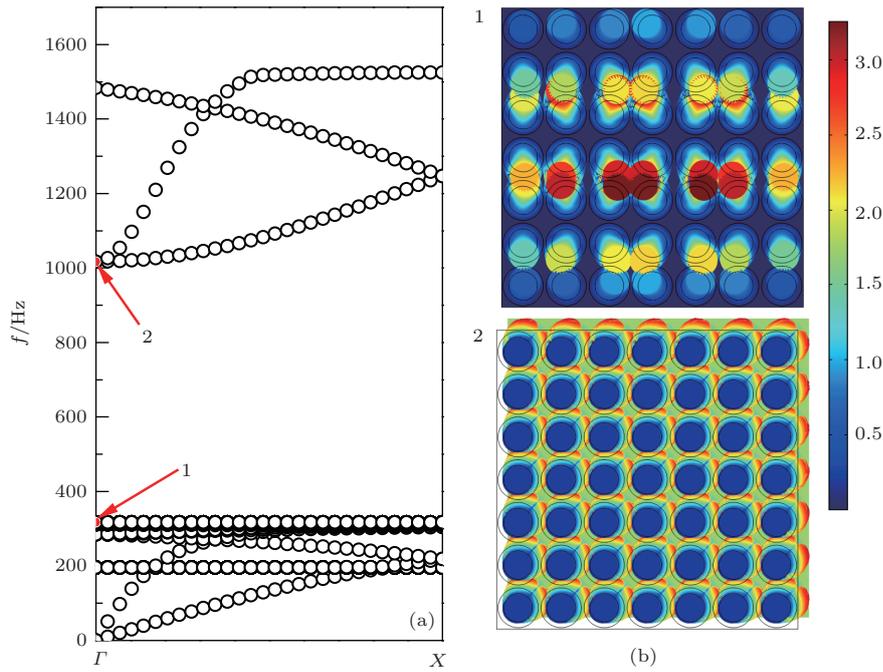


图2 (a)  $7 \times 7$  超原胞沿  $\Gamma X$  方向带结构; (b)  $\Gamma$  点对应的位移场 (图中 1 点对应的频率为  $f = 316.94$  Hz, 2 点对应的频率为  $f = 1017.02$  Hz)

按上述推理, 由于共振体间的相互作用具有长程性, 因此需要采用特殊的方式才能对其进行可观的改变. 按照文献 [25] 中的思路, 这一体系中的缺陷态可以通过引入“缺陷”共振体来得到. 在我们的体系中, 由软材料包裹重核所构成的共振体可以用一弹性/质量振子来类比 [24], 其中, 软包层类比于弹簧, 而重核类比于质量. 因此, 这一振子的共振频率可由包层的弹性常数或核的重量来调节. 本文中, 为便于分析, 我们只通过改变核的质量密度来改变缺陷态的频率, 而维持共振单元的其他参量不变. 图 3 给出了一  $7 \times 7$  超元胞缺陷态的带结构及声场分布, 其“缺陷”共振体位于超元胞的中心, 它是通过将 Au 重核替换为 Cu(铜) 重核得到的. Cu 的弹性参数分别为密度  $\rho_{Cu} = 8900 \text{ kg/m}^3$ , 纵波与横波速度  $c_L = 4710 \text{ m/s}$ ,  $c_T = 2260 \text{ m/s}$ . 从图中可以看到, 在频率约为 460 Hz 的位置出了一条缺陷带. 图中还以插图的形式给出了这一缺陷态在  $\Gamma$  点 ( $f = 459.71 \text{ Hz}$ ) 的位移场分布, 我们可以看到其位移场 ( $\sqrt{u_x^2 + u_y^2}$ ) 确实局域于超元胞中心. 下面我们来分析“缺陷”共振体的引入是如何改变它与周围正常共振体的长程相互作用的. 设正常共振体的共振频率为  $f_0$ , “缺陷”共振体的共振频率  $f_1$ . 由于  $f_0 < f_1$ , 在  $f_1$  处, 缺陷周围的共振体间表现为相互排斥, 而“缺陷”共振体却表现出对周围共振

体的吸引作用, 也就是说缺陷共振体局域地改变了其与周围的相互作用, 从而形成局域态. 注意这中间存在周围正常共振体对“缺陷”共振体的排斥作用与“缺陷”共振体对周围正常共振体吸引作用的竞争过程, 只有当吸引作用足够强时缺陷态才得以形成.

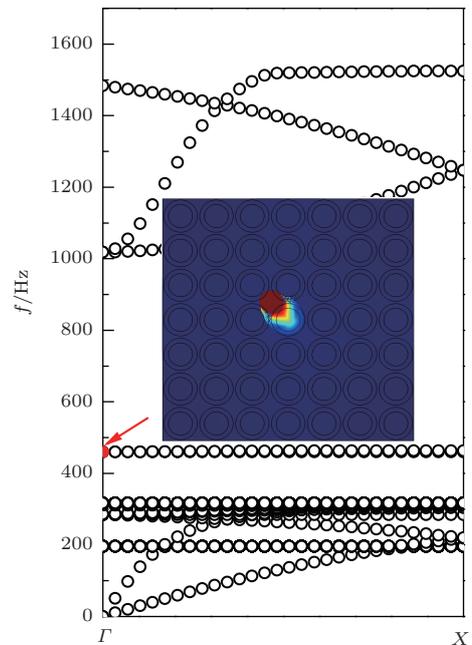


图3 Cu 缺陷下的  $\Gamma X$  方向带结构与  $\Gamma$  点缺陷态  $f = 459.71 \text{ Hz}$  时的位移场

为了进一步分析缺陷态的性质随其频率变化规律, 我们还计算了不同共振频率缺陷态的带结构及其场分布. 图 4(a), (b), (c) 分别为将共振单元中的 Au 核换成 Pb(铅), Steel(钢), Al(铝) 时所形成的缺陷态(只给出了  $\Gamma X$  方向的带结构), 可以看到, 对应于图 4(a), (b) 及 (c), 缺陷态分别出现在频率约为 408 Hz, 490 Hz 及 800 Hz 处. 注意图 4(c) 中在频率约为 475 Hz 处还出了另外一条平带, 它与 200 Hz 处的平带具有相似的性质, 本文中不作讨论. 另外, 从图中可以看到, 由这种方式引入的缺陷态其实包含两支, 分别对应横向与纵向振动, 并且, 它们的分离随缺陷核的变轻而变得越来越明显. 由于缺陷共振体的横向与纵向共振品质因子不同, 其对横向与纵向振动的频响宽度也不同, 且基底材料的压缩与剪切模量具有较大的差值, 使得横向振动具有更宽的频率响应谱, 因而其空间局域性较纵向振动为差, 也就是说对横向振动的局域性

更为困难. 为分析这些模式的空间局域性, 图 4(d) 与 (e) 分别给出了布里渊区中心 ( $\Gamma$ ) 点模式在基底中靠近缺陷处沿  $y$  方向一条直线上的相对位移场值  $(\sqrt{u_x^2 + u_y^2})$ , 其中图 4(d) 与 (e) 分别对应纵振动与横振动, 线 1, 2 及 3 分别表示 Pb, Steel 和 Al 缺陷. 可以看到, 随着核心质量的减轻, 局域态的频率随着增高, 其空间局域性则越来越差. 这一结果可以用上述的竞争机理来解释:  $f_1$  离开  $f_0$  越远, 缺陷共振体的作用相对越强, 参与竞争作用的正常共振体会越多, 因而其空间局域性越差. 事实上, 图 4(c) 中的缺陷态已经不是一条严格的平带, 也就是说相临超元胞间已经存在一定的相互作用, 这从另一角度说明了在这结构中散射体间的相互作用是长程的. 上述计算用到的材料参数分别为对 Steel:  $\rho_{\text{Steel}} = 7800 \text{ kg/m}^3$ ,  $c_L = 6100 \text{ m/s}$  与  $c_T = 3300 \text{ m/s}$ ; 对 Pb:  $\rho_{\text{Pb}} = 11400 \text{ kg/m}^3$ ,  $c_L = 2160 \text{ m/s}$  与  $c_T = 780 \text{ m/s}$ .

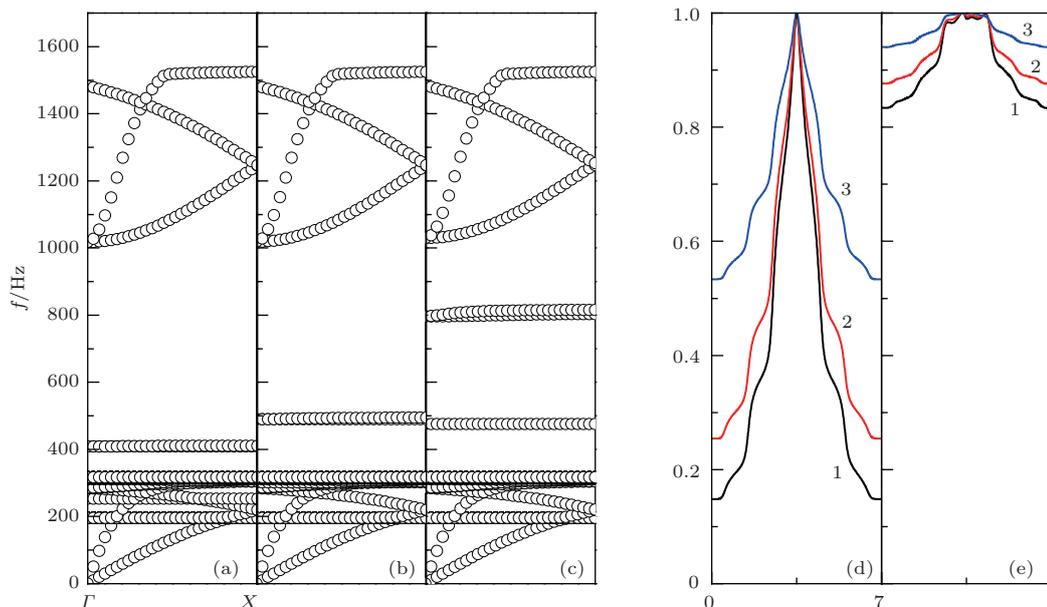


图 4 (a), (b), (c) 分别为 Pb, Steel 和 Al 缺陷下沿  $\Gamma X$  方向带结构, 超元胞大小与图 3 相同; (d), (e) 分别为  $\Gamma$  点缺陷模式的纵向和横向振动基底中靠近共振体沿  $Y$  方向一条直线上的相对空间场分布, 1, 2 与 3 分别对应 Pb, Steel 和 Al 缺陷态, 横坐标为  $Y$  方向的位置, 纵坐标为归一化的振动位移大小

按相同的道理, 线缺陷波导态也可以由这种方法得到. 图 5 给出了沿  $x$  方向将一排共振体的核心由 Au 换成 Cu 后沿  $\Gamma X$  方向的带结构, 计算中采用了  $1 \times 9$  的超元胞. 从图中可以看到, 在频率区域  $f = 428.96 - 465.35 \text{ Hz}$ , 出现了两条通带, 通过检查这两条通带中模式(图 5(b), (c) 及 (d)) 的场分布可见它们是波导带, 且其中一条为横波带, 而另一条为纵波带. 这两条波导带形成的机理可由相应点缺陷态的机理类推, 其不同点在于, 在线“缺陷”中,

因相临共振体间存在吸引作用, 使得成键态可沿波导方向形成, 因此这一缺陷态具有一定的频宽. 这一机理可以用图 6 示意地描述. 在图 6 中, 我们分别用  $a_0, p_0, a_1, p_1$  代表正常与“缺陷”共振体的共振幅度与相位响应曲线, 注意图中的  $a_0, p_0$  应该理解为正常共振体的集体效应. 从图中可以看到, 在频率区间  $f_0 < f < f_1$ , 正常共振体对“缺陷”共振体的排斥作用随频率增大而变弱, 当工作频率大于  $a_0$  与  $a_1$  的交点处所在频率  $f_2$  时, “缺陷”共振体将

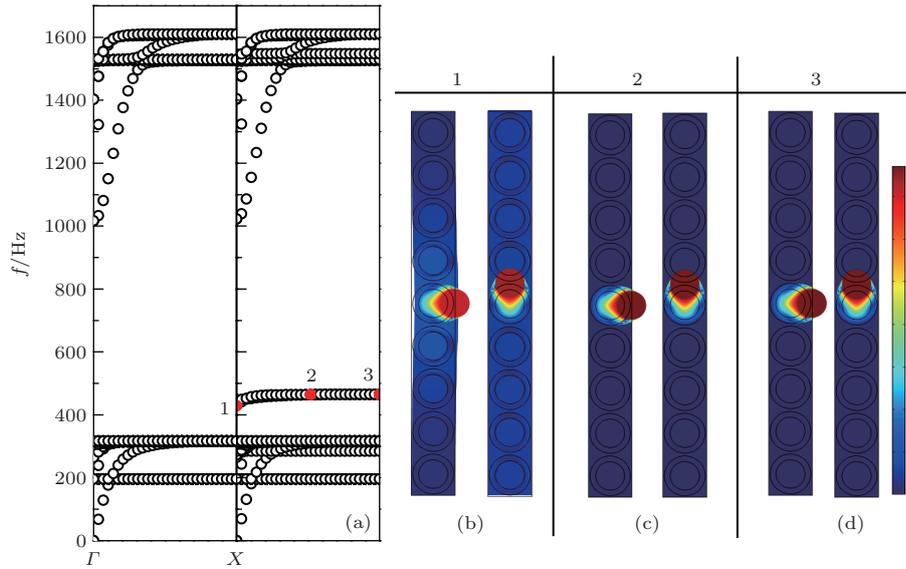


图5 沿X方向线缺陷(缺陷共振体的重核为Cu)结构沿 $\Gamma X$ 方向的带结构(a)及部分缺陷态的位移场分布((b), (c), (d)), 计算中超元胞取为 $1 \times 9$ ; 其中1为 $\Gamma$ 点对应的纵与横波缺陷模式(频率分别为 $f = 428.96$  Hz及 $f = 448.44$  Hz), 2为 $k_x \cdot a/2\pi = 0.259$ 点对应的纵与横波缺陷态(频率分别为 $f = 464.55$  Hz及 $f = 463.19$  Hz), 而3则为X点对应的纵与横波缺陷态(频率分别为 $f = 465.35$  Hz及 $f = 464.38$  Hz)

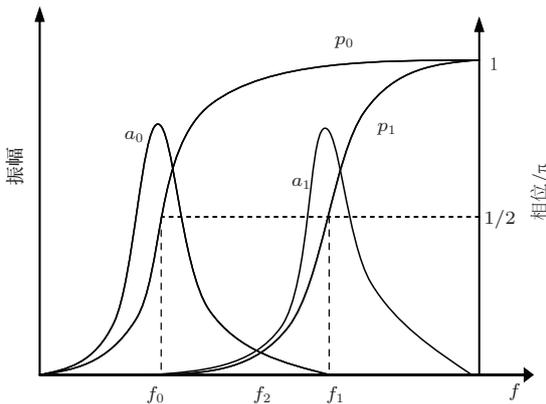


图6 共振体共振幅度与相位响应曲线示意图(其中 $f_0$ ,  $a_0$ 与 $p_0$ 分别表示正常共振体的共振频率, 幅度及相位响应曲线;  $f_1$ ,  $a_1$ 与 $p_1$ 分别表示缺陷共振体的共振频率, 幅度与相位响应曲线;  $f_2$ 为 $a_0$ 与 $a_1$ 的交点所在频率)

起主导作用, 波导带形成. 因此, 波导带的带底对应 $f_2$ , 而带顶则是 $f_1$ , 超过 $f_1$ 后, 正常与“缺陷”共振体的相位响应将一样, 都有一个大于 $\pi/2$ 的超前. 由这一分析, 我们可以得到两个结论. 其一, 波导带的带宽将随 $f_1$ 变化:  $f_1$ 越高, 由 $f_0$ 引起的排斥作用越小, 因而带宽会越宽. 为验证这一点, 我们计算了含不同“缺陷”共振体的带结构与部分模式的场分布, 结果如图7所示. 从中可以看到, 随 $f_1$ 的升高, 波导带的带宽确实会变得越宽. 但需要注意的是, 对于由某一种缺陷导致的缺陷态, 由于 $a_0$ 是正常共振体的集体效应, 也就是说它的幅度会随系统中正常共振体与缺陷散射体的比例升高而

升高, 从而导致 $f_2$ 往高频方向移动, 因此波导带会变窄. 作为验证, 我们计算了包含A1核心缺陷共振体时的 $1 \times 5$ ,  $1 \times 9$ ,  $1 \times 13$ 超元胞的带结构, 结果如图8所示. 为清楚起见, 图中只给出了缺陷模. 从图中可以看到, 随着超元胞的增大, 局域态的下边带往高频方向移动, 从而使带宽趋向变窄. 对横波带, 这一变化尤为明显. 其二, 由图6我们还可以推知波导态的空间横向局域性与频率的关系. 在 $f_2$ 附近, 由于正常与反常共振体的作用效果相当, 沿波导方向的成键态必然较弱, 对应波导态的横向局域性必然较差. 而随频率越来越趋于 $f_1$ , 成键态的作用越来越强, 对应的波导态将具有越来越好的空间横向局域性. 这一结论可以由图5中(b), (c)及(d)模式的场分布明显地得到验证.

以上方案并不是实现次波长缺陷态的惟一方法. 可以想象, 虽然共振体间的相互作用具有长程性, 但这种长程力总是可以用增加共振体的间距来打破. 文献[23]中通过增加共振体间的间距在局域共振型声子晶体板中实现了板波的波导模式. 类似于布拉格型声子晶体, 作者们是通过移除散射体的方法来实现这一波导模式的, 所不同的是, 这一波导模式是通过移除三排而非一排散射体得到的. 作为上述推理的进一步验证, 我们研究了类似的结构. 图9中给出了移除三排共振体所构成系统的带结构与某些模式场分布. 计算中我们采用了 $1 \times 13$ 的超元胞. 为便于比较, 在图中的左半部分给出了

完整晶格的带结构. 从图中可以看到, 在移除三排共振体后, 带隙中产生了新的通带. 通过分析这两条带上在  $\Gamma$  点附近模式的场分布, 可以看到它们分别对应横波与纵波模式. 与前述通过引入“缺陷”共振体机理不同的是, 这里的缺陷态是由于反键态的缺失而形成的. 按前述分析, 在工作频率大于但近于  $f_0$  处, 共振体间的相互作用主要表现为排斥作用而形成反键带, 通过局部移除共振体, 可以

在局部造成反键态的缺失, 因而造成波场局域. 但从它们的场分布可以看到, 因为共振体间相互作用的长程性, 由这种方法实现的缺陷态具有非常差的空间局域性. 对于横波支而言, 由于共振体横波共振具有较低的品质因子, 共振体间的相互作用程更长, 因而这一特性更为明显. 因此, 对于我们研究的二维无限固体体系, 这一方法不是有效的波导态实现方法.

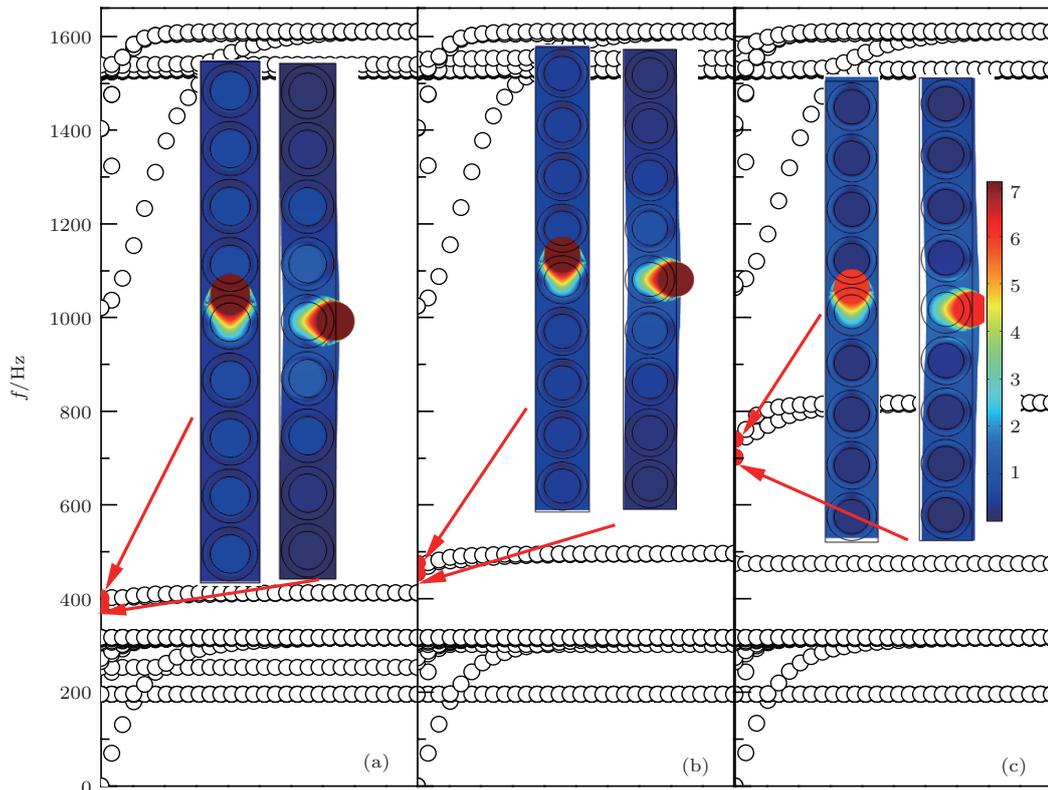


图7 (a), (b), (c) 分别为 Pb, Steel 和 Al 柱缺陷  $\Gamma X$  方向带结构与  $\Gamma$  点处相应缺陷态(横模和纵模)的位移场分布

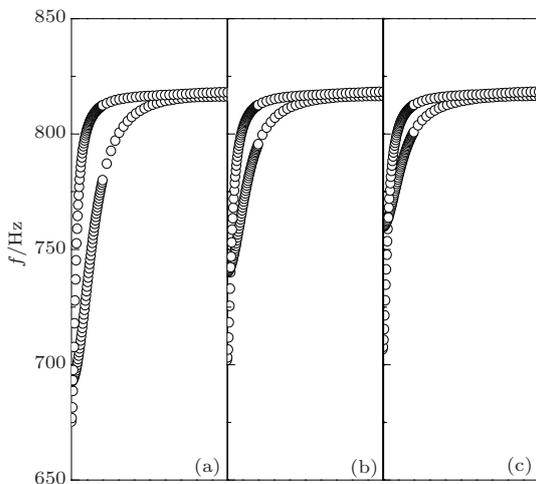


图8 Al 缺陷情况下不同大小超元胞下的缺陷态 (a), (b), (c) 分别对应  $1 \times 5$ ,  $1 \times 9$ ,  $1 \times 13$  超元胞的计算结果

#### 4 单模式次波长波导的实现

上述两类次波长缺陷态存在一个共同特点, 即纵模缺陷态与横模缺陷态总是同时出现. 出现这一现象的根源在于共振单元的各向同性特性. 一般来说, 在基于布拉格型的声子晶体中, 带隙位置依赖于波长, 由于固体中横波与纵波的波长不同, 横波带隙与纵波带隙可以在不同频段分别实现. 但在局域共振机理的声子晶体中, 带隙位置依赖于共振体的共振频率. 对于各向同性的共振体而言, 纵波的共振频率与横波的共振频率相同, 因而难以单独实现横波与纵波带隙, 因此也就难以实现单独的横波或纵波波导. 我们发现, 通过改变共振体的对称性, 可以实现共振体横波与纵波频率的分离, 如果将这

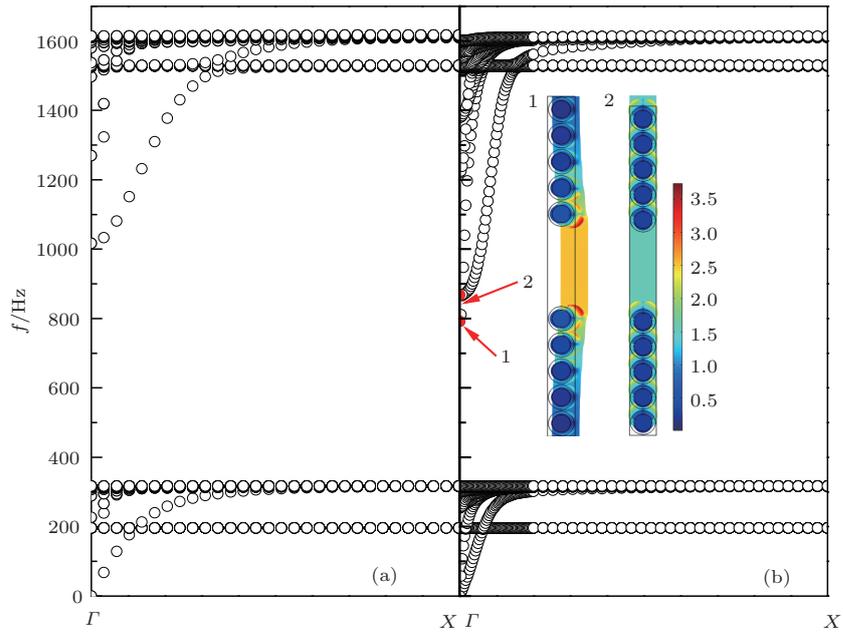


图9 (a)  $1 \times 13$ 完整结构超元胞  $\Gamma X$  方向带结构; (b)  $1 \times 13$ 抽掉中间三排的超元胞  $\Gamma X$  方向带结构以及  $\Gamma$  点纵波(模式1, 对应频率为  $f = 791.85$  Hz) 横波(模式2, 对应频率为  $f = 867.33$  Hz) 的位移场

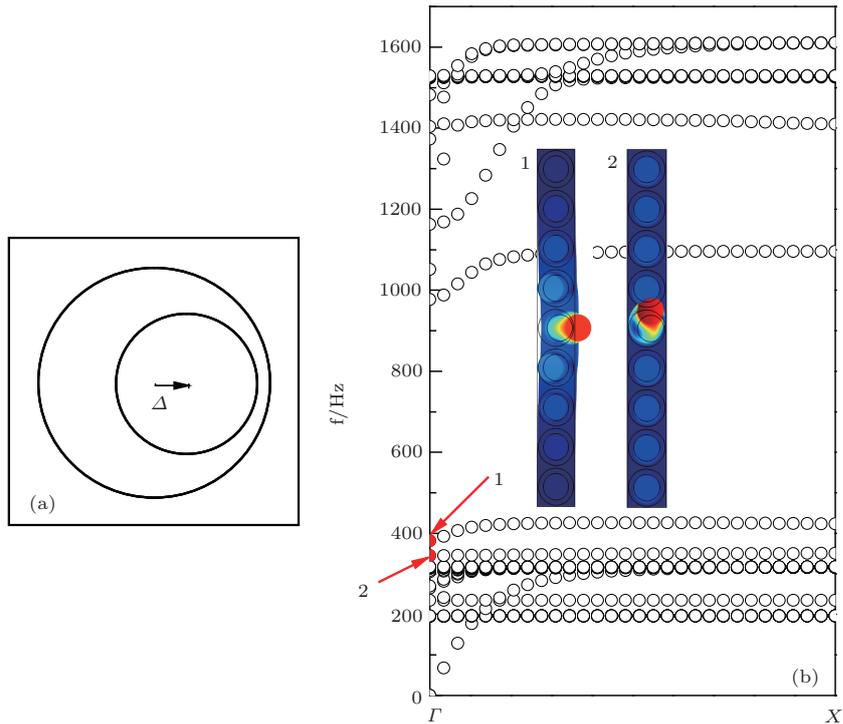


图10 (a) 偏心共振单元,  $\Delta$  为两个圆柱中心的间距; (b) 偏心缺陷  $\Gamma X$  方向带结构及其所导致的缺陷态模式在  $\Gamma$  点的位移场分布(1点为纵场模式, 对应频率为  $f = 381.38$  Hz, 2点为横场模式, 对应的频率为  $f = 345.12$  Hz)

种非各向同性共振体作为“缺陷”植入各向同性共振单元所组成的阵列中, 则可以实现单模波导带。

如图10(a)所示, 相对于正常的同轴共振单元, 我们让“缺陷”共振单元的重核中心沿  $x$  方向偏离  $\Delta = 0.0015$  m, 形成偏心共振单元. 则包层的等效

弹性系数沿  $x$  方向与  $y$  方向必然不同. 考虑沿  $x$  方向的外场作用下共振体的响应, 如果外场是纵场, 起作用的“弹簧”是位于核心左右区域“弹簧”的并联效果; 而如果外场为横场, 则起作用的“弹簧”将是位于核心上下区域“弹簧”的并联效果. 很明显,

这种偏心共振单元的横场响应频率低于纵场响应频率. 图 10(b) 为将一排  $\Delta = 0.0015$  m 的偏心共振单元植入正常共振体中所构成系统的带结构. 计算仍采用  $1 \times 9$  超元胞完成. 从图中可以看到, 在频率分别为  $f = 420$  Hz 及  $346$  Hz 附近出现了两支波导带, 其中出现在  $f = 420$  Hz 附近的一支具有一定的带宽, 通过检查带中某些点的场分布, 可以确定这是一支纵波波导带; 而出现  $f = 346$  Hz 附近的一支相对较平坦, 通过检查带中  $\Gamma$  点模式的场分布, 可以看到它具有横向振动特性. 为增加这两支波导态的带宽, 我们可以进一步将偏心共振单元的核心换成较轻的材料, 图 11 是将偏心共振单元的重核换成 Al 后所得结果. 从中可以看到, 这两支通带均得到了一定程度的增宽.

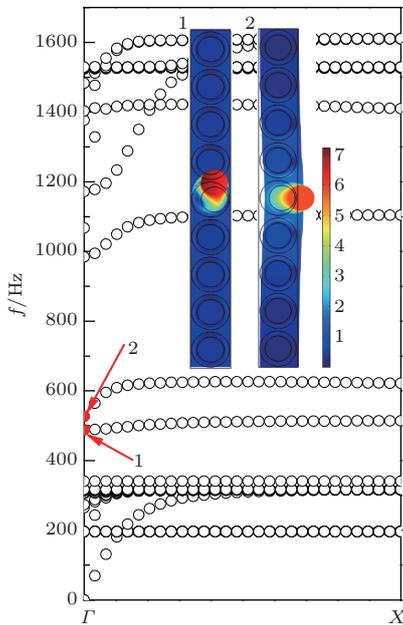


图 11 偏心共振单元的 Au 核替换为 Cu 核结构  $\Gamma X$  方向带结构

## 5 结 论

我们对局域共振型固体声子晶体中共振单元之间的相互作用进行了细致分析, 发现共振型声子晶体在其带隙附近的色散关系可以由共振单元间的相互作用来理解. 由于共振单元对外加作用力的非同步响应, 在工作频率低于和高于其共振频率时共振单元间的相互作用将分别会表现为长程的相互吸引与相互排斥作用. 也正是因为这种相互作用的长程性, 使得共振型声子晶体的带结构难以被系统的局部空间无序所打破. 基于这一理解, 我们以二维固体局域共振型声子晶体为例, 对文献 [23] 及

[25] 中所提出的两类不同实现次波长缺陷态的方法进行了探讨, 发现缺陷态的引入其实就是要打破这种长程相互作用. 另外, 我们还发现在固体局域共振型声子晶体中, 通过引入非各向同性共振单元, 可以将横波导模式与纵波波导模式进分离, 从而实现单纯的横波或纵波波导.

## 参考文献

- [1] Kushwaha M S, Halevi P, Dobrzynski L, Djafari-Rouhani B 1993 *Phys. Rev. Lett.* **71** 2022
- [2] Sánchez-Pérez J, Caballero D, Martínez-Sala R, Rubio C, Sánchez-Dehesa J, Meseguer F, Llinares J, Gálvez F 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 5325
- [3] Larabi H, Pennec Y, Djafari-Rouhani B, Vasseur J O 2007 *Phys. Rev. E* **75** 066601
- [4] Wang G, Liu Y Z, Wen J H, Yu D L 2006 *Chin. Phys.* **15** 407
- [5] Gao X W, Chen S B, Chen J B, Zheng Q H, Yang H 2012 *Chin. Phys. B* **21** 064301
- [6] Zhao H G, Wen J H, Liu Y Z, Yu D L, Wang G, Wen X S 2008 *Chin. Phys. B* **17** 1305
- [7] Liu M, Hou Z L, Fu X J 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 104302 (in Chinese)[刘敏, 侯志林, 傅秀军 2012 物理学报 **61** 104302]
- [8] Li X C, Yi X Y, Xiao Q W, Liang H Y 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 2300 (in Chinese)[李晓春, 易秀英, 肖清武, 梁宏宇 2006 物理学报 **55** 2300]
- [9] Wen X S, Wen J H, Yu D L, Wang G, Liu Y Z, Han X Y 2006 *Phononic Crystal* (Beijing: National Defence Industry Press) p139 (in Chinese)[温熙森, 温激鸿, 郁殿龙, 王刚, 刘耀宗, 韩小云 2006 声子晶体 (北京: 国防工业出版社)]
- [10] Li Y, Hou Z L, Fu X J, Badreddine M A 2010 *Chin. Phys. Lett.* **27** 074303
- [11] Kafesaki M, Sigalas M M, García N 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 4044
- [12] Hsu F C, Hsu J C, Huang T C, Wang C H, Chang P 2011 *Appl. Phys. Lett.* **98** 143505
- [13] Mohammadi S, Eftekhar A A, Hunt W D, Adibi A 2009 *Appl. Phys. Lett.* **94** 051906
- [14] Mei J, Ma G C, Yang M, Yang Z Y, Wen W J, Sheng P 2012 *Nature Communications.* **3** 756
- [15] Lai Y, Wu Y, Sheng P, Zhang Z Q 2011 *Nature Materials.* **10** 620
- [16] Khelif A, Choujaa A, Benchabane S, Djafari-Rouhani B, Laude V 2004 *Appl. Phys. Lett.* **84** 4400
- [17] Psarobas I, Stefanou N, Modinos A 2000 *Phys. Rev. B* **62** 5536
- [18] Liu Z, Zhang X, Mao Y, Zhu Y Y, Yang Z, Chan C T, Sheng P 2000 *Science* **289** 1734
- [19] Liu Z Y, Chan C T, Sheng P 2002 *Phys. Rev. B* **65** 165116
- [20] Wu Y, Lai Y, Zhang Z Q 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 105506

- [21] Fok L, Zhang X 2011 *Phys. Rev. B* **83** 214304
- [22] Oudich M, Li Y, Assouar B M, Hou Z L 2010 *New J. Phys.* **12** 083049
- [23] Oudich M, Assouar M B, Hou Z L 2010 *Appl. Phys. Lett.* **97** 193503
- [24] Hung H H, Sun C T, 2009 *New. J. Phys.* **11** 013003
- [25] Lemoult F, Kaina N, Fink M, Lerosey G 2012 *Nature Phys.* **9** 55
- [26] Liu H, Liu Y M, Li T, Wang S M, Zhu S N, Zhang X 2009 *Phys. Status Solidi B* **246** 1397
- [27] Li T, Wang S M, Liu H, Li J Q, Wang F M, Zhu S N, Zhang X 2008 *J. Appl. Phys.* **103** 023104
- [28] Huang K 1988 *Solid State Physics* (Beijing: Higher Education Press) (in Chinese) [黄昆 1988 固体物理学 (北京: 高等教育出版社)]
- [29] Du G H, Zhu Z M, Gong X F 2001 *Fundamentals of Acoustics* (2st) (Nanjing: Nanjing University Press) p210 (in Chinese) [杜功焕, 朱哲民, 龚秀芬 2001 声学基础第二版 (南京: 南京大学出版社)]

## Defect state of the locally resonant phononic crystal\*

Hou Li-Na   Hou Zhi-Lin<sup>†</sup>   Fu Xiu-Jun

(Department of Physics, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China)

( Received 25 September 2013; revised manuscript received 3 November 2013 )

### Abstract

By taking a two-dimensional solid local resonant phononic crystal as an example, we investigated the mechanism of the defect state on a subwavelength scale. It is well known that, when the working wavelength is much greater than the distance between resonators, the dispersion of the phononic crystal is insensitive to the lattice structure, and the whole structure can be described in terms of the effective medium theory. As a result, it is hard to introduce a defect state in the system by a local real-space disorder. It is shown in this paper that the dispersion of the local resonant phononic crystal can be understood from the long-range feature of the interaction between resonators, so the creation of a defect state in the system is in fact to break such a long-range interaction. Based on this understanding, the mechanisms of the recently reported methods, that are used to create defect states, are discussed. In addition, a waveguide structure that can guide the longitude or transverse waves separately is realized by introducing an anisotropic defect resonator.

**Keywords:** phononic crystal, local resonance, subwavelength defect state

**PACS:** 43.20.+g, 42.50.Gy, 46.40.Ff

**DOI:** 10.7498/aps.63.034305

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11274121).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: [phzlh@scut.edu.cn](mailto:phzlh@scut.edu.cn)