

## 非相对论弱相互作用玻色气体的有效场理论处理\*

徐岩 樊炜<sup>†</sup> 冀彦君 宋仁刚 陈兵 赵振华 陈达

(山东科技大学理学院应用物理系, 青岛 266590)

(2013年8月13日收到; 2013年11月17日收到修改稿)

采用有效场理论研究了非相对论弱相互作用玻色-爱因斯坦凝聚量子气体的一般性质. 在分析了系统的不可重整化性质后, 从有效拉氏量出发, 计算了最低阶环路修正下拉氏量参量的运动耦合常数 (running coupling constant) 的形式, 并且得到了相应的微分方程. 研究表明, 不同于相对论玻色气体的有效理论, 对非相对论弱相互作用的玻色气体, 可以移除该有效理论中的内禀能量尺度, 即可令该有效理论的内禀能量尺度取无穷大值. 所得的分析结果将有助于对玻色-爱因斯坦凝聚的临界性质和行为的深入研究.

**关键词:** 玻色-爱因斯坦凝聚, 量子场论, 费曼图

**PACS:** 05.30.Jp, 11.10.-z, 11.10.Gh

**DOI:** 10.7498/aps.63.040501

## 1 引言

玻色-爱因斯坦凝聚 (BEC) 是在极低温度下遵从玻色统计的所有玻色子占据最低能量状态所形成的一种物质形态<sup>[1-3]</sup>. 关于 BEC 性质的讨论, 传统的方法是在 Fock 空间中采用二次量子化的方法研究其哈密顿量的性质<sup>[4]</sup>, 或者是直接采用量子力学的描述. 然而, 近年来随着量子场论的方法在强关联领域中的逐渐发展和普及, 越来越多的人开始用量子场论的方法研究冷原子系统的性质, 特别是 BEC 的性质; 这时, BEC 系统的理论性质可以用非相对论弱相互作用玻色气体的一般性质<sup>[5,6]</sup>来描述. 如 Fisher 等<sup>[7]</sup>用泛函重整化群的方法研究了 Bose-Hubbard<sup>[8]</sup>模型中从超流态到 Mott 绝缘态的量子相变; Haugset 等<sup>[9]</sup>研究了弱相互作用 BEC 的热力学性质, 计算了一阶环路的有效势以及临界温度; Braaten 等<sup>[10-12]</sup>对弱相互作用玻色气体的理论进行了更细致的研究, 计算了能量密度的二阶环路修正, 引入了非普适性效应; Andersen<sup>[5]</sup>对相关研究进行了综述, 系统地介绍了用泛函积分的方法研究弱相互作用玻色气体所取得的成果; 最近,

Boettcher 等<sup>[6]</sup>综述了用泛函重整化群研究超冷原子的优势以及所取得的进展. 可见, 利用量子场论的方法研究弱相互作用玻色气体变得普及起来. 上述研究主要是采用泛函积分的方法研究 BEC 的热力学性质, 比如临界温度、能量密度等. Braaten 和 Nieto<sup>[10]</sup>从粒子物理的角度出发研究了非相对论弱相互作用玻色气体的重整化性质, 发现该理论是不可重整化的. 对于不可重整化理论, 需要从有效场理论的角度进行研究, 这正是本文的出发点. 在有效场理论中, 不可重整化的理论可以看作是低能有效理论, 因此仍然具有物理意义. 关于 BEC 的热力学性质已有很多研究, 现在需要从有效场理论的角度出发研究其理论性质, 本文正是在这种背景下展开工作的.

本文采用有效场理论的方法对非相对论弱相互作用玻色气体的理论性质进行研究. 从系统的有效拉氏量出发, 通过一阶环路的计算, 给出拉氏量参数随内禀能量尺度的改变而发生的变化; 通过分析这种运动耦合常数 (running coupling constant) 现象, 可以得到拉氏量参量所满足的非线性微分方程; 对方程进行分析, 发现该有效理论中的内禀

\* 国家自然科学基金 (批准号: 11105086)、山东省中青年科学家奖励基金 (批准号: BS2011DX029, ZR2013AQ016)、青岛市科技计划 (批准号: 11-2-4-4-(6)-jch) 和山东科技大学杰出青年基金 (批准号: 2011KYJQ101) 资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯作者. E-mail: x1y5@hotmail.com

能量尺度可以移除,这不同于相对论弱相互作用玻色气体的有效理论(内禀能量尺度不可以移除);本文结果对于分析 BEC 系统在广泛能量尺度内的临界性质和行为将有很大的帮助.

## 2 模型

在量子场论<sup>[13-15]</sup>的框架下,非相对论弱相互作用玻色气体由拉氏量

$$\mathcal{L} = \varphi^* \left( i\hbar\partial_t + \frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} - \mu \right) \varphi - \frac{g}{4}(\varphi^*\varphi)^2 \quad (1)$$

来描述,其中  $m$  是玻色子的质量,  $\mu$  是化学势,顶角  $g$  是最低阶相互作用系数. 这个拉氏量是通过对相对论玻色气体的拉氏量取非相对论极限获得的. 在  $d = D + 1$  维时空中,取  $\hbar = c = k_B = 1$ , 长度与时间变为相同的量纲,即  $[l] = [t]$ ; 这时可以得到拉氏量中场函数的量纲为  $[\varphi] = \frac{1-d}{2}[l] = \frac{1-d}{2}[m]$ , 其中  $m$  表示质量,而  $g$  的量纲为  $[g] = (d-2)[l] = (2-d)[m]$ .

### 2.1 不可重整化理论

现在来分析该理论是否可以重整化<sup>[16]</sup>. 假设拉氏量有多个相互作用系数  $g_{2n}$ ,  $n \geq 2$ ; 对于一个要计算的顶角函数  $-iV_{2N}(\dots)$ , 其某个费曼图有  $L$  个环路,  $I$  条内部线以及  $V_{2n}$  个顶角  $g_{2n}$ , 则该费曼图的质量量纲等于树图的质量量纲,这同时也是该顶角函数的量纲. 在进行该费曼图的积分计算时,首先要进行的是对频率的积分,  $L$  个环路有  $L$  个对频率的积分,每一个频率积分会相应地去掉一个自由传播子,因此将频率积分之后剩下  $I - L$  个自由传播子,它们都变为  $m/(q^2 + M_0^2)$  的形式. 现在只剩下对动量的积分,最后积分的发散度为  $\Gamma = DL - 2(I - L)$ ; 定义该费曼图的发散度为  $\Gamma$ , 当  $\Gamma$  等于零时,积分是对数发散的,  $\Gamma$  大于零时,积分是幂律发散的,不同的  $\Gamma$  值代表不同的发散程度. 另一方面,该积分的质量量纲等于  $(D+1)L - I$ , 该费曼图的质量量纲等于积分的质量量纲与顶角的质量量纲之和

$$\begin{aligned} [\text{diagram}] &= (D+1)L - I + \sum V_{2n}g_{2n} \\ &= \Gamma + I - L + \sum V_{2n}g_{2n}, \end{aligned} \quad (2)$$

而对于顶角函数  $-iV_{2N}(\dots)$ , 该费曼图的质量量纲等于树图的质量量纲,即顶角  $g_{2N}$  的质量量纲,因此有

$$[g_{2N}] = \Gamma + I - L + \sum V_{2n}[g_{2n}]. \quad (3)$$

现在可以得到积分发散度与顶角的质量量纲的关系为

$$\Gamma = 1 + [g_{2N}] - \sum V_{2n}([g_{2n}] + 1). \quad (4)$$

上述结果的意义是,如果有一个顶角  $g_{2n_0}$  的质量量纲小于  $-1$ , 则上式右边会有  $-V_{2n_0}(g_{2n_0} + 1) > 0$ . 这会产生如下影响: 对于一个确定的顶角函数,随着环路修正阶数的增加,费曼图的发散度将会越来越大; 另一方面,对于不同的顶角函数  $-iV_{2N}(\dots)$ , 随着  $N$  的增加,将会不断碰到新的发散的费曼图,因此对于每一个更高阶的顶角函数,都要引入一个相应的更高阶的相互作用项以及抵消项,这个过程是无穷尽的,即理论将是不可重整化的.

对于当前的模型(1)式,在4维时空中顶角  $g$  的质量量纲为  $-2$ , 因此当前的理论是不可重整化的. 举例来说,对于顶角函数  $-iV_6(\dots)$ , 在两环路修正时,会碰到不能通过参量  $\mu, g$  的重整化来抵消的新发散项,必须在拉氏量中引入一个新的、更高阶的作用项来抵消这个新的发散项<sup>[10]</sup>.

### 2.2 Wilson 有效场理论

上一部分说明了为什么非相对论弱相互作用玻色气体的理论是不可重整化的,然而不可重整化并不意味着这个理论一点物理价值也没有,它只是说明了这个理论具有一定的局限性: 对于该理论来说存在一个能量尺度,该理论只能应用在相对于这个尺度来说比较低的能量范围内,即不可重整化理论只是某一个精确理论的低能近似,这就是 Wilson 有效场理论的主要思想(参见文献<sup>[16, 17]</sup>). 对于当前的模型(1)式,在4维时空中进行变换  $g \rightarrow g/\Lambda_0^2$ , 其中  $\Lambda_0$  是该理论的一个内禀能量尺度,现在  $g$  将是无量纲的系数; 对于顶角函数  $-iV_{2n}(\dots)$ , 考虑一个发生在能量尺度为  $p_0$  上的散射过程,可以将顶角函数进行泰勒展开,精确到  $O(g^{2m})$  阶,将有如下的形式:

$$\begin{aligned} -iV_{2n}(p_0) &= -iV_{2n}^0(p_0) \left( 1 + a_1(\Lambda_0) \frac{p_0^2}{\Lambda_0^2} \right. \\ &\quad \left. + \dots + a_m(\Lambda_0) \frac{p_0^{2m}}{\Lambda_0^{2m}} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

假设  $a_1(\Lambda_0), \dots, a_{m-1}(\Lambda_0)$  已经通过重整化过程精确求得,而在计算  $a_m(\Lambda_0)$  时费曼图出现了新的发散项,如果不引入新的抵消项,那么  $a_m(\Lambda_0)$  的值只能通过与实验比对获得<sup>[17]</sup>. 然而对于低能散射的情形  $p_0 \ll \Lambda_0$ ,  $a_m(\Lambda_0)$  项的贡献将非常小,这时对于某个给定的精确度要求,可以忽略这一项以及以

后的项的贡献. 因此, 在低能散射时, 如果只要求计算到某个给定的精度, 当前的不可重整化理论可以给出有效的预测; 假设存在一个可以重整化的、能够精确地描述当前系统的理论, 那么在给定的精度范围内, 不可重整化理论和可重整化理论给出的预言是一致的. 从这个意义上说, 不可重整化理论是某个精确理论的低能有效场理论. 然而当散射过程的能量尺度接近理论的内禀尺度时,  $p_0 \sim \Lambda_0$ , 对泰勒展开的截断便失去了意义, 当前的模型不能给出任何有意义的预测.

上面的分析指出, 内禀能量尺度对于当前的不可重整化理论具有重要意义. 在接下来的研究中, 需要搞清楚是否可以移除模型中的内禀能量尺度, 即  $\Lambda_0 \rightarrow +\infty$  时, 理论模型(1)式仍然具有物理意义, 这要求进一步分析顶角  $g$  随内禀能量尺度的改变而发生的变化. 对于相对论玻色气体, 内禀能量尺度是不可以移除的<sup>[16]</sup>; 而对于当前模型的非相对论玻色气体, 接下来的分析将表明, 内禀能量尺度是可以移除的.

### 3 解析计算

在非相对论弱相互作用玻色气体的有效场理论描述中, 研究的出发点是有效拉氏量

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{eff}}(\Lambda) = & Z(\Lambda)\varphi^* \left( i\partial_t + \frac{\nabla^2}{2m} \right) \varphi + \mu(\Lambda)\varphi^* \varphi \\ & - \frac{g(\Lambda)}{4} (\varphi^* \varphi)^2 \\ & + \sum_{d \geq 9} \sum_i C_{d,i}(\Lambda) O_{d,i}, \end{aligned} \quad (6)$$

其中  $O_{d,i}$  是质量量纲为  $d$  的所有高阶项中的第  $i$  个项,  $\Lambda$  是所取的内禀能量尺度. 该有效拉氏量的获得过程为<sup>[16]</sup>: 从拉氏量

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & Z_\varphi \varphi^* \left( i\partial_t + \frac{\nabla^2}{2m} \right) \varphi + Z_\mu \mu_{ph} \varphi^* \varphi \\ & - \frac{Z_g g_{ph}}{4} (\varphi^* \varphi)^2 \end{aligned} \quad (7)$$

出发, 其中  $\mu_{ph} = \Delta^{-1}(0, 0)$  ( $\Delta$  是费曼传播子) 和  $g_{ph} = V_4(0, 0; 0, 0)$ , 对场函数进行傅里叶变换

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \varphi(\mathbf{k}, \omega), \quad (8)$$

然后将生成泛函  $Z[J^*, J]$  中动量大于该能量尺度  $\Lambda$  的自由度积分掉, 即将  $|\mathbf{k}| > \Lambda$  的部分积分掉, 从而得到

$$Z[J^*, J] = \int D\varphi^* D\varphi_{|\mathbf{k}| < \Lambda}$$

$$\times e^{i \int dt d^3x \{L_{\text{eff}} + J^* \varphi + \varphi^* J\}}, \quad (9)$$

其中  $J^*(\mathbf{k}, \omega) = J(\mathbf{k}, \omega) = 0, |\mathbf{k}| > \Lambda$ , 而

$$e^{i \int dt d^3x L_{\text{eff}}} = \int D\varphi^* D\varphi_{|\mathbf{k}| > \Lambda} e^{i \int dt d^3x L}, \quad (10)$$

这样就可以获得有效拉氏量(6)式, 而傅里叶变换现在变为

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \int_0^\Lambda \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \varphi(\mathbf{k}, \omega). \quad (11)$$

从现在起只考虑  $O_{9,1} = (\varphi^* \varphi)^3$  的情况, 其系数为  $C(\Lambda)$ . 用费曼图<sup>[18]</sup>来计算这些有效系数, 这些费曼图的外部线代表满足  $|\mathbf{k}| < \Lambda$  的场函数, 内部线代表的  $|\mathbf{k}| > \Lambda$  的场函数, 对内部环路进行积分, 积分区间为  $|\mathbf{k}| > \Lambda$ .

考虑图1所示的一阶环路修正, 图1(a)是对  $Z(\Lambda), \mu(\Lambda)$  的修正, 图1(b)是对  $g(\Lambda)$  的修正, 图1(c)是对  $C(\Lambda)$  的修正, 图中虚线表示  $|\mathbf{k}| > \Lambda$  的场函数, 实线表示  $|\mathbf{k}| < \Lambda$  的场函数.

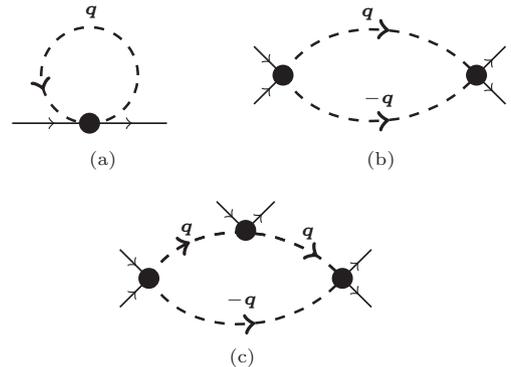


图1 Wilson有效场论中的一阶环路图, 图中虚线表示  $|\mathbf{k}| > \Lambda$  的场函数, 实线表示  $|\mathbf{k}| < \Lambda$  的场函数 (a) 对  $Z(\Lambda), \mu(\Lambda)$  的修正; (b) 对  $g(\Lambda)$  的修正; (c) 对  $C(\Lambda)$  的修正

与  $Z(\Lambda)$  相关的项对费曼图的贡献为  $Z(\Lambda) \left( \omega - \frac{\mathbf{k}^2}{2m} \right)$ , 与环路积分  $\mathbf{q}$  没有任何关系, 因此图1(a)的环路对于  $Z(\Lambda)$  的贡献为零, 得到

$$Z(\Lambda) = 1 + O(g_{ph}^2). \quad (12)$$

事实上, 高阶的环路修正对于  $Z(\Lambda)$  同样没有任何贡献, 因此有  $Z(\Lambda) = 1$ . 而对于  $\mu(\Lambda)$ , 有

$$\begin{aligned} i\mu(\Lambda) = & iZ_\mu \mu_{ph} + (-ig_{ph}) \int_\Lambda^{+\infty} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{d\omega'}{2\pi} \\ & \times \frac{i}{\omega' - \omega_{\mathbf{q}} + i\varepsilon} + O(g_{ph}^2). \end{aligned} \quad (13)$$

另一方面, 对于拉氏量(7)式的正常重整化结果

给出

$$i\mu_{ph} = iZ_{\mu} \mu_{ph} + (-ig_{ph}) \int_0^{+\infty} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{d\omega'}{2\pi} \times \frac{i}{\omega' - \omega_{\mathbf{q}} + i\varepsilon} + O(g_{ph}^2). \quad (14)$$

综合上述两个式子可以得到

$$\mu(\Lambda) = \mu_{ph} + \frac{g}{6\pi^2} \Lambda^3. \quad (15)$$

考虑图 1 (b) 对  $g(\Lambda)$  的贡献, 可以得到

$$-ig(\Lambda) = -iZ_g g_{ph} + \frac{(-ig_{ph})^2}{2} \int_{\Lambda}^{+\infty} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{d\omega'}{2\pi} \times \frac{i}{\omega' - \omega_{\mathbf{q}} + i\varepsilon} \cdot \frac{i}{-\omega' - \omega_{-\mathbf{q}} + i\varepsilon} + O(g_{ph}^2). \quad (16)$$

另一方面对拉氏量 (7) 式的正常重整化结果给出

$$-ig_{ph} = -iV_4(0, 0; 0, 0) = -iZ_g g_{ph} + \frac{(-ig_{ph})^2}{2} \int_{\Lambda}^{+\infty} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{d\omega'}{2\pi} \times \frac{i}{\omega' - \omega_{\mathbf{q}} + i\varepsilon} \cdot \frac{i}{-\omega' - \omega_{-\mathbf{q}} + i\varepsilon} + O(g_{ph}^2). \quad (17)$$

综合上述两式可得

$$g(\Lambda) = g_{ph} + \frac{mg_{ph}^2}{4\pi^2} \Lambda + O(g_{ph}^3). \quad (18)$$

现在考虑图 1 (c) 对于  $C(\Lambda)$  的贡献

$$iC(\Lambda) = (-ig_{ph})^3 \int_{\Lambda}^{+\infty} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{d\omega'}{2\pi} \times \left( \frac{i}{\omega' - \omega_{\mathbf{q}} + i\varepsilon} \right)^2 \times \frac{i}{-\omega' - \omega_{-\mathbf{q}} + i\varepsilon} + O(g_{ph}^4) = \frac{-im^2 g_{ph}^3}{2\pi^2} \int_{\Lambda}^{+\infty} dq \frac{1}{q^2} + O(g_{ph}^4) = \frac{-im^2 g_{ph}^3}{2\pi^2} \frac{1}{\Lambda} + O(g_{ph}^4), \quad (19)$$

因此对于  $C(\Lambda)$  有

$$C(\Lambda) = \frac{-m^2 g_{ph}^3}{2\pi^2} \frac{1}{\Lambda} + O(g_{ph}^4). \quad (20)$$

现在改变看待问题的角度, 不再以原始的拉氏量 (7) 式为出发点, 而是直接以具有内禀能量尺度  $\Lambda_0$  的有效拉氏量为讨论问题的出发点, 并且将  $\mu(\Lambda_0)$ ,  $g(\Lambda_0)$ ,  $C(\Lambda_0)$  看作是输入参量, 它们满足关

系式

$$\begin{cases} |\mu(\Lambda_0)| \ll \Lambda_0, \\ g(\Lambda_0) \ll \Lambda_0^{-2}, \\ C(\Lambda_0) \ll \Lambda_0^{-5}. \end{cases} \quad (21)$$

我们想知道的是在能量尺度  $\Lambda (\Lambda < \Lambda_0)$  上, 物理规律将会变得怎样 (拉氏量的系数会如何变化). 尽管  $\Lambda < \Lambda_0$ , 仍要求关系 (21) 式得到保持, 如  $|\mu(\Lambda_0)| \ll \Lambda$  等等.

接下来的计算需要将  $[\Lambda, \Lambda_0]$  之间的场函数的自由度积分掉, 正如刚才的计算将  $[\Lambda, +\infty)$  之间的自由度积分掉一样. 当只考虑顶角  $g$  所产生的一阶环路时, 相应的费曼图和图 1 一致, 只是环路的积分区间变为  $[\Lambda, \Lambda_0]$ . 对于  $\mu(\Lambda)$  有

$$i\mu(\Lambda) = i\mu(\Lambda_0) + (-ig(\Lambda_0)) \times \int_{\Lambda}^{\Lambda_0} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{i}{\omega' - \omega_{\mathbf{q}} + i\varepsilon} = i\mu(\Lambda_0) + \frac{-ig(\Lambda_0)}{6\pi^2} (\Lambda_0^3 - \Lambda^3), \quad (22)$$

对于  $g(\Lambda)$  有

$$-ig(\Lambda) = -ig(\Lambda_0) + \frac{(-ig(\Lambda_0))^2}{2} \int_{\Lambda}^{\Lambda_0} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \times \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{i}{\omega' - \omega_{\mathbf{q}} + i\varepsilon} \frac{i}{-\omega' - \omega_{-\mathbf{q}} + i\varepsilon} = -ig(\Lambda_0) + \frac{im g^2(\Lambda_0)}{4\pi^2} (\Lambda_0 - \Lambda), \quad (23)$$

而对于  $C(\Lambda)$  有

$$iC(\Lambda) = iC(\Lambda_0) + (-ig(\Lambda_0))^3 \int_{\Lambda}^{\Lambda_0} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \times \frac{d\omega'}{2\pi} \left( \frac{i}{\omega' - \omega_{\mathbf{q}} + i\varepsilon} \right)^2 \frac{i}{-\omega' - \omega_{-\mathbf{q}} + i\varepsilon} = iC(\Lambda_0) + \frac{-im^2 g^3(\Lambda_0)}{2\pi^2} \times \left( \frac{1}{\Lambda} - \frac{1}{\Lambda_0} \right). \quad (24)$$

以上计算的只是顶角  $g$  产生的费曼图, 顶角  $C(\Lambda_0)$  也会产生环路贡献, 在只考虑最低阶费曼图的情形下, 它对  $g(\Lambda)$  的贡献是一个与图 1 (a) 积分值一样的一阶环路, 其值为

$$\frac{iC(\Lambda_0)}{6\pi^2} (\Lambda_0^3 - \Lambda^3),$$

而它对于  $\mu(\Lambda)$  的贡献是一个二阶环路图, 其值为

$$\frac{iC(\Lambda_0)}{2} \left( \frac{\Lambda_0^3 - \Lambda^3}{6\pi^2} \right)^2.$$

在综合考虑了顶角  $g(\Lambda_0)$  和  $C(\Lambda_0)$  产生的最低阶修正后, 有如下结果:

$$\begin{aligned} \mu(\Lambda) &= \mu(\Lambda_0) - \frac{g(\Lambda_0)}{6\pi^2}(\Lambda_0^3 - \Lambda^3) \\ &\quad + \frac{C(\Lambda_0)}{2} \left( \frac{\Lambda_0^3 - \Lambda^3}{6\pi^2} \right)^2 \ll \Lambda_0, \\ g(\Lambda) &= g(\Lambda_0) - \frac{mg^2(\Lambda_0)}{4\pi^2}(\Lambda_0 - \Lambda) \\ &\quad - \frac{C(\Lambda_0)}{6\pi^2}(\Lambda_0^3 - \Lambda^3) \ll \Lambda_0^{-2}, \\ C(\Lambda) &= C(\Lambda_0) + \frac{m^2g^3(\Lambda_0)}{2\pi^2} \left( \frac{1}{\Lambda_0} - \frac{1}{\Lambda} \right) \\ &\ll \Lambda_0^{-5}. \end{aligned} \quad (25)$$

可以看出, 有效拉氏量的参量是随着内禀能量尺度的改变而变化的, 这就是 running coupling constant 现象. 参数  $\mu(\Lambda)$ ,  $g(\Lambda)$  主要由积分的上界  $\Lambda_0$  决定; 而参数  $C(\Lambda)$  则主要由积分的下界  $\Lambda$  决定, 这意味着对于参数  $C(\Lambda)$  来说, 它的初始值并不重要.

#### 4 结果分析

在有效场理论中, 内禀能量尺度  $\Lambda$  具有非常重要的意义: 它决定了该理论所适用的低能有效范围, 并且理论的参量 (拉氏量中的参数) 随着它的变化而变化. 对于一个有效理论, 需要分析一下是否可以移除这个内禀的能量尺度, 在  $\Lambda \rightarrow \infty$  时, 该理论是否继续有物理意义, 即是否该有效理论可以描述任何有限能量尺度下发生的物理过程, 这要求拉氏量中的系数始终保持有限的大小, 不能发散.

对于当前的非相对论弱相互作用玻色气体, 为了研究其有效理论随着内禀能量尺度  $\Lambda$  的变化而发生的变化, 需要根据 (21) 式获得各个参量的微分方程, 其结果如下:

$$\begin{aligned} \frac{d\mu}{d\Lambda} &= \frac{g(\Lambda)}{2\pi^2} \Lambda^2, \\ \frac{dg}{d\Lambda} &= \frac{mg^2(\Lambda)}{4\pi^2} \Lambda + \frac{C(\Lambda)}{2\pi^2} \Lambda^2, \\ \frac{dC}{d\Lambda} &= \frac{m^2g^3(\Lambda)}{2\pi^2 \Lambda^2}. \end{aligned} \quad (26)$$

我们关心拉氏量中最低阶相互作用项的变化, 因此需要根据上式得出顶角  $g$  的微分方程:

$$\frac{d^2g}{d\Lambda^2} - \left( \frac{2}{\Lambda} + \frac{mg}{2\pi^2} \right) \frac{dg}{d\Lambda} + \frac{mg^2}{2\pi^2} \left( \frac{1}{\Lambda} - \frac{mg}{2\pi^2} \right)$$

$$= 0, \quad (27)$$

上述非线性方程没有解析解, 但可以分析在给定的极限情形下, 顶角  $g$  的变化情况. 首先考虑低能过程, 这时拉氏量中的相互作用项所占的比重很小, 即  $|g| \ll 1$ ; 令  $|mg| \sim 1$ ,  $\Lambda \gg 1$ , 即只关心这样的内禀能量  $\Lambda$  尺度的变化, 它使得  $|mg|$  近似为一个常数, 这样, 可以忽略微分方程 (27) 式中  $1/\Lambda$  项的贡献, 将方程简化为一个线性微分方程

$$\frac{d^2g}{d\Lambda^2} - a \frac{dg}{d\Lambda} - a^2g = 0, \quad (28)$$

其中  $a = \frac{mg}{2\pi^2}$  为一个近似常数 (在所研究的  $\Lambda$  的变化范围内). 该方程的解析解为<sup>[19]</sup>

$$\begin{aligned} g &= c_1 e^{a\Lambda/2} \sinh(\sqrt{5}a\Lambda/2) \\ &\quad + c_2 e^{a\Lambda/2} \cosh(\sqrt{5}a\Lambda/2), \end{aligned} \quad (29)$$

可以看出, 在满足  $|mg| \sim 1$  的条件下, 顶角  $g$  随着内禀能量尺度  $\Lambda$  的增加是增大的. 现在来考虑  $g \gg 1$  的情形, 忽略 (27) 式中  $1/\Lambda$  项以及  $d^2g/d\Lambda^2$  项的贡献, 得到一个一阶的微分方程

$$\frac{dg}{d\Lambda} = -\frac{mg^2}{2\pi^2}, \quad (30)$$

这时, 顶角  $g$  随着内禀能量尺度  $\Lambda$  的增大是不断减小的. 综合这两种情况, 可以得出, 随着内禀能量尺度  $\Lambda$  的增大, 顶角  $g$  会在一个有限的取值范围内变化, 不会发散. 因此, 对于我们所研究的有效理论, 可以令内禀能量尺度  $\Lambda$  趋于无穷大, 使得该有效理论摆脱能量尺度的限制.

对于非相对论弱相互作用玻色气体的有效场理论描述, 通过分析发现了可以移除内禀的能量尺度  $\Lambda$ ; 这与相对论弱相互作用玻色气体的有效场理论结果是不一样的, 在那里, 内禀的能量尺度  $\Lambda$  是不可以移除的<sup>[16]</sup>, 这是相对论玻色气体与非相对论玻色气体理论的区别之一. 需要注意的是, 尽管对于当前的有效理论, 可以移除  $\Lambda$ , 但这并不代表该有效理论能正确地描述高能尺度下发生的物理过程, 它只是表明在数学的自洽意义上, 该有效理论是可以用于任意有限能量尺度的, 至于能否正确地捕捉高能尺度下的物理过程, 是不能确定的, 比如, 尽管量子电动力学理论是可重整化的, 但它事实上并不能捕捉 GeV 尺度下的物理过程, 那时要靠量子色动力学理论.

## 5 结 论

本文研究了非相对论弱相互作用玻色气体的有效场理论描述, 在一阶环路的计算下, 给出了拉氏量参数随内禀能量尺度的改变而发生的变化; 通过分析 running coupling constant 所满足的非线性微分方程, 发现可以移除有效理论中的内禀能量尺度, 这不同于相对论弱相互作用玻色气体的有效场理论描述. 本文的研究结果可以用在重整化群分析中, 用来研究该系统的临界性质<sup>[20-22]</sup>.

## 参考文献

- [1] Anderson M H, Ensher J R, Matthews M R, Wieman C E, Cornell E A 1995 *Science* **269** 198
- [2] Davis K B, Mewes M O, Andrews M R, van Druten N J, Durfee D S, Kurn D M, Ketterle W 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 3969
- [3] Burnett K, Edwards M, Clark C W 1999 *Phys. Today* **52** 37
- [4] Leggett A J 2001 *Rev. Mod. Phys.* **73** 307
- [5] Andersen J O 2004 *Rev. Mod. Phys.* **76** 599
- [6] Boettcher I, Pawłowski J M, Diehl S 2012 *Nucl. Phys. B* **228** 63
- [7] Fisher M P, Weichman P B, Grinstein G, Fisher D S 1989 *Phys. Rev. B* **40** 546
- [8] Bloch I, Dalibard J, Zwerger W 2008 *Rev. Mod. Phys.* **80** 885
- [9] Haugset T, Haugerud H, Ravndal F 1998 *Annals Phys.* **266** 27
- [10] Braaten E, Nieto A 1999 *Eur. Phys. J. B* **11** 143
- [11] Braaten E, Hammer H W, Mehen T 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 040401
- [12] Braaten E, Hammer H W, Hermans S 2001 *Phys. Rev. A* **63** 063609
- [13] Altland A 2010 *Condensed Matter Field Theory*. (London: Cambridge University Press) p251
- [14] Tsvelik A 1996 *Quantum Field Theory in Condensed Matter Physics* (London: Cambridge University Press) p30
- [15] Schakel A 2008 *Boulevard of Broken Symmetries: Effective Field Theories of Condensed Matter* (Singapore: World Scientific Press) p95
- [16] Srednicki M 2007 *Quantum Field Theory* (London: Cambridge University Press) p129
- [17] Maggiore M 2005 *A Modern Introduction to Quantum Field Theory* (London: Oxford University Press) p135
- [18] Chen X W, Fang Z Y, Zhang J W, Zhong T, Tu W X 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 021101 (in Chinese)[陈学文, 方祯云, 张家伟, 钟涛, 涂卫星 2011 物理学报 **60** 021101]
- [19] Polyanin A D, Manzhirov A V 2007 *Handbook of Mathematics for Engineers and Scientists* (Boca Raton FL: Chapman & Hall/CRC Press) p372
- [20] Wilson K G 1971 *Phys. Rev. B* **4** 3184
- [21] Xu Y, Xiong Z Z, Li Z X, Chen B, Tan L 2009 *Chin. Phys. B* **18** 4734
- [22] Fan W, Xu Y, Chen B, Chen Z Y, Feng X L, Oh C H 2012 *Phys. Rev. A* **85** 013645

# Effective field theory approach to the weakly interacting bose gas\*

Xu Yan Fan Wei<sup>†</sup> Ji Yan-Jun Song Ren-Gang Chen Bing Zhao Zhen-Hua Chen Da

(*College of Science, Shandong University of Science and Technology, Qingdao 266590, China*)

( Received 13 August 2013; revised manuscript received 17 November 2013 )

## Abstract

In this paper we study the theory of nonrelativistic weakly interacting Bose gas from the point of view of effective field theory. Firstly, the nonrenormalizability of the theory is briefly discussed. Then, starting from the effective Lagrangian, the lowest order contributions of Feynman diagrams are calculated for the parameters in the effective Lagrangian. These illustrate the running coupling constant phenomenon. After that, the differential align of the parameters in the effective Lagrangian is obtained. We show that the intrinsic energy scale of this effective theory can be removed, while it is not possible to do so for relativistic Bose gas. Our results can help to study the critical behavior of weakly interacting Bose gas.

**Keywords:** Bose-Einstein condensation, quantum field theory, feynman diagram

**PACS:** 05.30.Jp, 11.10.-z, 11.10.Gh

**DOI:** [10.7498/aps.63.040501](https://doi.org/10.7498/aps.63.040501)

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11105086), the Natural Science Foundation of Shandong Province, China (Grant Nos. BS2011DX029, ZR2013AQ016), the Basic Scientific Research Project of Qingdao, China (Grant No. 11-2-4-4-(6)-jch), and the Shandong University of Science and Technology Research Fund for Distinguished Young Scholars, China (Grant No. 2011KYJQ101).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: [xly5@hotmail.com](mailto:xly5@hotmail.com)