

# Ξ型三能级原子玻色-爱因斯坦凝聚体单模光场系统中双模原子激光的压缩性质\*

农春选<sup>1)</sup> 李明<sup>1)†</sup> 陈翠玲<sup>2)‡</sup>

1)(桂林理工大学理学院, 桂林 541004)

2)(广西师范大学数学与统计学院, 桂林 541004)

(2013年9月20日收到; 2013年11月6日收到修改稿)

研究了Ξ型三能级原子玻色-爱因斯坦凝聚体单模光场系统中双模原子激光的压缩性质. 结果表明: 双模原子激光能被周期性压缩, 并且具有量子Rabi振荡和崩塌-回复现象两种形式的振荡. 最大压缩深度和崩塌-回复振荡频率主要依赖于光场与原子间相互作用强度, 量子Rabi振荡频率主要由光场圆频率决定.

**关键词:** 玻色-爱因斯坦凝聚, 三能级原子, 单模压缩相干态, 双模原子激光

**PACS:** 32.80.Qk, 42.50.-p

**DOI:** 10.7498/aps.63.043202

## 1 引言

原子玻色-爱因斯坦凝聚(BEC)<sup>[1-3]</sup>的实现和原子激光的获得<sup>[4-6]</sup>是20世纪末物理学领域的重大突破之一. 近年来, 关于原子BEC体与光场的相互作用已有大量的理论和实验研究, 取得了许多重要成果<sup>[7-22]</sup>. 众所周知, 对压缩态光的研究具有重要的理论和实际意义. 在理论上, 光学压缩态是光场的非经典效应. 在实验上, 光学压缩态对光通信、光放大器和超高灵敏的干涉仪有重要影响. 因此, 研究Ξ型三能级原子BEC单模光场系统中双模原子激光的压缩性质, 具有极其重要的理论意义和应用价值.

本文在文献<sup>[23]</sup>的基础上, 对Ξ型三能级原子BEC体单模压缩态光场相互作用系统的双模原子激光压缩性质进行了研究. 结果表明: 双模原子激光能被周期性压缩, 并且具有原子发射和吸收光子造成的量子Rabi振荡和崩塌-回复现象两种形式的振荡. 最大压缩深度和崩塌-回复振荡频率主要依赖于光场与原子间的相互作用强度, 量子Rabi振荡频率主要由光场圆频率决定.

## 2 改进的模型和求解

在Bogoliubov近似下<sup>[24]</sup>, 根据我们的前期报道<sup>[18]</sup>, 可以得到改进后的Ξ型三能级原子BEC单模光场相互作用系统中的哈密顿量

$$\begin{aligned}
 H = & \omega a^+ a + (E_2 + u_0) b_2^+ b_2 + (E_3 + u_0) b_3^+ b_3 \\
 & + \varepsilon \sqrt{N_1} [a b_2^+ \exp(i\theta) + a^+ b_2 \exp(-i\theta)] \\
 & + \varepsilon (a^+ b_2^+ b_3 + a b_2 b_3^+) + \frac{1}{2} u_0 N_1, \quad (1)
 \end{aligned}$$

式中 $a^+$ 和 $a$ 分别表示光场的产生算符和湮没算符,  $b_j^+$ 和 $b_j$  ( $j = 1, 2, 3$ )分别表示在第 $j$ 个原子态的产生算符和湮没算符,  $\omega$ 为光场的圆频率,  $E_i$  ( $i = 1, 2, 3$ )为第 $i$ 个能级的能量,  $\varepsilon$ 表示光场与原子间相互作用强度,  $\Omega$ 表示BEC中原子间相互作用强度,  $N_1$ 为BEC中的原子数,  $\theta$ 表示位相角.

由(1)式可知, BEC中原子间相互作用强度使原来的原子能系 $E_2$ 和 $E_3$ 分别增加到 $E_2 + u_0$ 和 $E_3 + u_0$ . 增加量 $u_0$ 与BEC中原子数 $N_1$ 和原子间相互作用强度 $\Omega$ 无关, 而文献<sup>[23]</sup>中相应的增加量 $2N_1\Omega$ 与原子数 $N_1$ 和原子间相互作用强度 $\Omega$ 成正比.

\* 国家自然科学基金(批准号: 11364010)、广西教育厅科研基金(批准号: 200103YB058)和桂林理工大学博士科研基金资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: liming928@163.com

‡ 通讯作者. E-mail: mathchen@163.com

采用逐级迭代法求解系统的海森堡运动方程

$$i\dot{\mathbf{a}} = [\mathbf{a}, \mathbf{H}] = \omega\mathbf{a} + \varepsilon[\mathbf{b}_2 \exp(i\theta) + \mathbf{b}_2^+ \mathbf{b}_3], \quad (2)$$

$$i\dot{\mathbf{b}}_2 = [\mathbf{b}_2, \mathbf{H}]$$

$$= (E_2 + u_0)\mathbf{b}_2 + \varepsilon[\mathbf{a} \exp(-i\theta) + \mathbf{a}^+ \mathbf{b}_3], \quad (3)$$

$$i\dot{\mathbf{b}}_3 = [\mathbf{b}_3, \mathbf{H}] = (E_3 + u_0)\mathbf{b}_3 + \varepsilon\mathbf{a}\mathbf{b}_2, \quad (4)$$

可得

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_2(t) = & A_1\mathbf{a}(0) + A_2\mathbf{b}_2(0) + A_3\mathbf{a}^+(0)\mathbf{b}_3(0) \\ & + A_4\mathbf{b}_2^+(0)\mathbf{b}_3(0), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_3(t) = & B_1\mathbf{b}_3(0) + B_2\mathbf{a}^2(0) + B_3\mathbf{a}(0)\mathbf{b}_2(0) \\ & + B_4\mathbf{b}_2^2(0), \end{aligned} \quad (6)$$

其中

$$\begin{aligned} A_1 = & -i \int_0^t [(E_2 + u_0)\beta_1(t) \\ & + \varepsilon \exp(-i\theta)\alpha_1(t)] dt, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} A_2 = & -i \int_0^t [(E_2 + u_0)\beta_1(t) \\ & + \varepsilon \exp(-i\theta)\alpha_2(t)] dt + 1, \end{aligned} \quad (8)$$

$$A_3 = -i \int_0^t \varepsilon \exp[-i(E_3 + u_0)t] \alpha_1^*(t) dt, \quad (9)$$

$$A_4 = -i \int_0^t \varepsilon \exp[-i(E_3 + u_0)t] \alpha_2^*(t) dt, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} B_1 = & -i \int_0^t (E_3 + u_0) \exp[-i(E_3 + u_0)t] dt \\ & + 1, \end{aligned} \quad (11)$$

$$B_2 = -i \int_0^t \varepsilon \alpha_1(t) \beta_1(t) dt, \quad (12)$$

$$B_3 = -i \int_0^t \varepsilon [\alpha_1(t) \beta_2(t) + \alpha_2(t) \beta_1(t)] dt, \quad (13)$$

$$B_4 = -i \int_0^t \varepsilon \alpha_2(t) \beta_2(t) dt, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \alpha_1(t) = & -i \exp(i\lambda t) (\lambda + \omega) \sin(\gamma t) / \gamma \\ & + \exp(i\lambda t) \cos(\gamma t), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\alpha_2(t) = -i \exp(i\lambda t) \varepsilon \exp(i\theta) \sin(\gamma t) / \gamma, \quad (16)$$

$$\beta_1(t) = -i \exp(i\lambda t) \varepsilon \exp(-i\theta) \sin(\gamma t) / \gamma, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \beta_2(t) = & i \exp(i\lambda t) (\lambda + \omega) \sin(\gamma t) / \gamma \\ & + \exp(i\lambda t) \cos(\gamma t), \end{aligned} \quad (18)$$

$$\lambda = -(E_2 + u_0 + \omega) / 2, \quad (19)$$

$$\gamma = \sqrt{4\varepsilon^2 + (\Delta + u_0)^2} / 2. \quad (20)$$

### 3 原子激光的压缩性质

双模原子激光的两个缓变的正交分量算符可定义为<sup>[25]</sup>

$$U_1 = \frac{1}{2^{3/2}} (\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_2^+ + \mathbf{b}_3 + \mathbf{b}_3^+), \quad (21)$$

$$U_2 = \frac{1}{i2^{3/2}} (\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_2^+ + \mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_3^+). \quad (22)$$

$U_1, U_2$  满足下列对易关系

$$[U_1, U_2] = i/2. \quad (23)$$

相应的不确定关系为

$$(\Delta U_1)^2 (\Delta U_2)^2 \geq 1/16. \quad (24)$$

引入

$$Q_i = (\Delta U_i)^2 - 1/4 \quad (i = 1, 2), \quad (25)$$

若在某一状态下, 有  $Q_i < 0$  ( $i = 1, 2$ ), 则意味着原子激光的第  $i$  个正交分量的量子噪声被压缩.

设初始时刻激发态为真空态, 所有原子均处于基态并发生 BEC. 系统的初始态矢可以表示为

$$|\psi(0)\rangle = |\beta_1\rangle_g \otimes |0\rangle \otimes |\alpha, \xi\rangle, \quad (26)$$

其中  $|\beta_1\rangle_g$  表示原子基态湮没算符  $\mathbf{b}_1$  的本征态, 表示在基态发生 BEC 的原子处于相干态, 即有  $\mathbf{b}_1|\beta_1\rangle_g = \sqrt{N_1} e^{-i\theta} |\beta_1\rangle_g$ , 其中  $N_1$  为处于  $|\beta_1\rangle_g$  态的平均原子数.  $|0\rangle$  和  $|\alpha, \xi\rangle$  分别表示初始时刻原子的激发态为真空态而光场处于压缩相干态:  $|\alpha, \xi\rangle = D(\alpha)S(\xi)|0\rangle$ , 其中

$$D(\alpha) = \exp(\alpha\mathbf{a}^+ - \alpha^*\mathbf{a}),$$

$$S(\xi) = \exp[(\xi^*\mathbf{a}^2 - \xi\mathbf{a}^+)^2/2],$$

$\alpha = \sqrt{n} \exp(i\eta)$ ,  $\xi = r \exp(i\phi)$ ,  $n$  和  $r$  分别表示初始光场的平均光子数和初始压缩因子. 为简便计算, 不妨取  $\theta = 0, \eta = 0, \phi = 0$ . 将 (5), (6) 式代入 (21), (22) 和 (25) 式, 可得

$$\begin{aligned} Q_1(t) = & \frac{1}{8} \{ |A_1|^2 \cosh(2r) \\ & + |A_2|^2 + |A_3|^2 (|\alpha|^2 + \sinh^2 r) \\ & + 8 \sinh^2 r \operatorname{Re}(\alpha A_1^* B_2) - \\ & - 8 \cosh r \sinh r \operatorname{Re}(\alpha^* A_1^* B_2^*) \\ & - 2 \cosh r \sinh r \operatorname{Re}(A_1^2) \\ & + 4 \cosh^2 r \sinh^2 r \operatorname{Re}(B_2^2) \\ & - 8 \cosh r \sinh r \operatorname{Re}(\alpha^2 B_2^2) + |B_1|^2 \\ & + |B_3|^2 (|\alpha|^2 + \cosh^2 r) + 2|B_4|^2 \\ & + |B_2|^2 [2 \cosh^4 r \sinh^4 r \\ & + 4|\alpha|^2 (\cosh^2 r + \sinh^2 r)] \} - 1/4, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned}
 Q_2(t) = \frac{1}{8} \{ & -|A_1|^2 \cosh(2r) & + 4 \cosh^2 r \sinh^2 r \operatorname{Re}(B_2^2) \\
 & - |A_2^2| - |A_3^2| (|\alpha|^2 + \sinh^2 r) & - 8 \cosh r \sinh r \operatorname{Re}(\alpha^2 B_2^2) - |B_1|^2 \\
 & - 8 \sinh^2 r \operatorname{Re}(\alpha A_1^* B_2) & - |B_3|^2 (|\alpha|^2 + \cosh^2 r) - 2|B_4|^2 \\
 & - 8 \cosh r \sinh r \operatorname{Re}(\alpha^* A_1^* B_2^*) & - |B_2|^2 [2 \cosh^4 r \sinh^4 r \\
 & - 2 \cosh r \sinh r \operatorname{Re}(A_1^2)] & + 4|\alpha|^2 (\cosh^2 r + \sinh^2 r) \} - 1/4. \quad (28)
 \end{aligned}$$

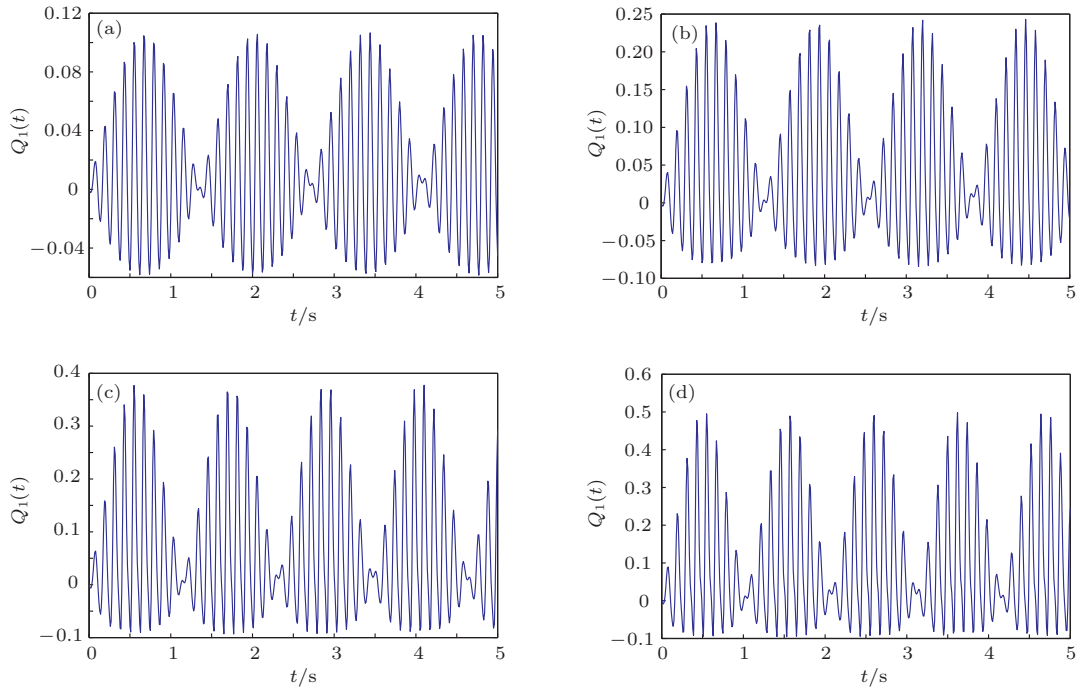


图1  $Q_1(t)$  的时间演化曲线 ( $\omega = 50$ ) (a)  $\varepsilon = 0.5$ ; (b)  $\varepsilon = 1$ ; (c)  $\varepsilon = 1.5$ ; (d)  $\varepsilon = 2$

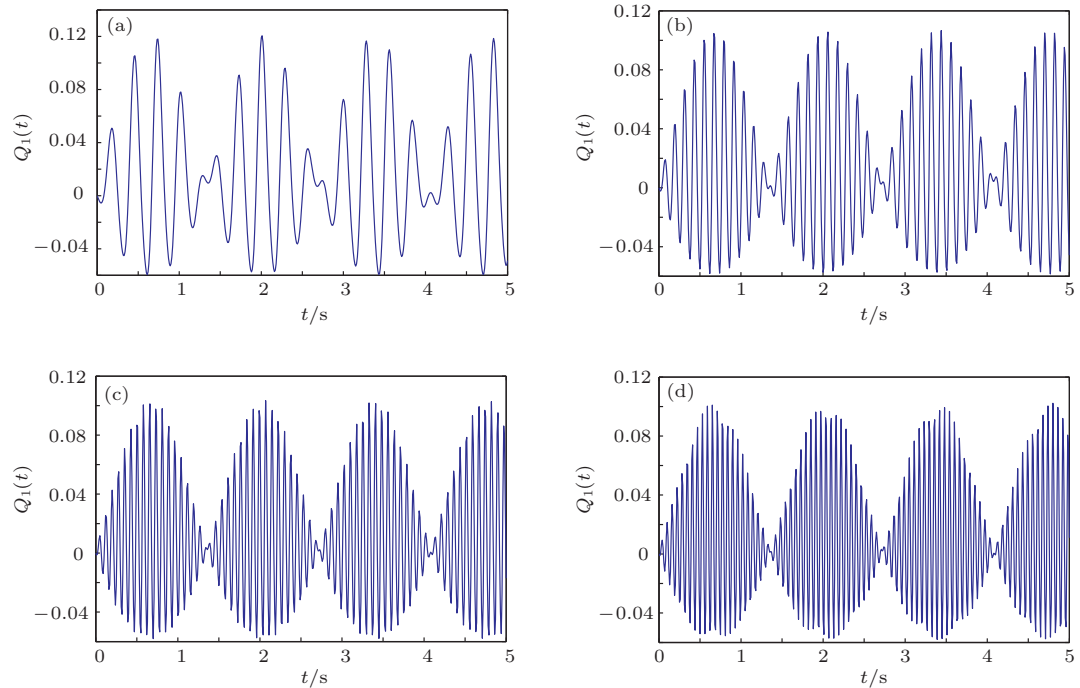


图2  $Q_1(t)$  的时间演化曲线 ( $\varepsilon = 0.5$ ) (a)  $\omega = 20$ ; (b)  $\omega = 50$ ; (c)  $\omega = 80$ ; (d)  $\omega = 100$

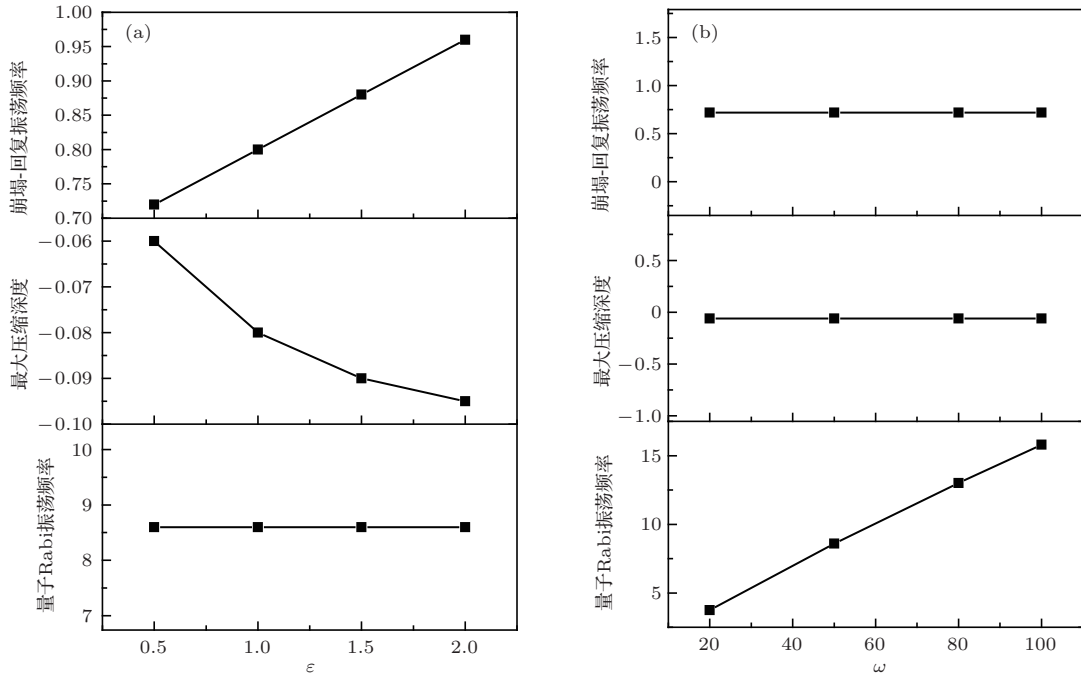


图3 量子Rabi振荡频率、最大压缩深度和崩溃-回复振荡频率分别随(a)  $\epsilon$ 和(b)  $\omega$ 的变化规律

由于  $Q_1(t)$  和  $Q_2(t)$  具有对称性, 我们只对  $Q_1(t)$  进行了数值计算, 如图 1—3 所示. 计算中参数的取值如下:  $N_1 = 200$ ,  $u_0 = 4$ ,  $E_2 = \omega + 0.5$ ,  $E_3 = 2\omega$ ,  $n = 1$ ,  $r = 0.5$ .

从图 1 和图 2 中可以看出, 双模原子激光均出现周期性的压缩, 并且具有原子发射和吸收光子造成的量子Rabi振荡和崩溃-回复现象两种形式的振荡. 图 1 和图 2 分别给出了  $Q_1(t)$  随  $\epsilon$  和  $\omega$  的变化情况. 当保持  $\omega$  不变而  $\epsilon$  改变时, 原子激光的最大压缩深度和崩溃-回复振荡频率随  $\epsilon$  的增大而增大, 而量子Rabi振荡频率保持不变, 如图 3(a) 所示. 当保持  $\epsilon$  不变而  $\omega$  改变时, 量子Rabi振荡频率随  $\omega$  增大而增大, 而最大压缩深度和崩溃-回复振荡频率均保持不变, 如图 3(b) 所示.

## 4 结 论

本文研究了  $\Xi$  型三能级原子玻色-爱因斯坦凝聚体单模光场相互作用系统中双模原子激光的压缩性质, 并讨论了光场与原子间的相互作用强度  $\epsilon$  和光场圆频率  $\omega$  对原子激光压缩性质的影响. 结果表明: 双模原子激光能被周期性压缩, 并且具有原子发射和吸收光子造成的量子Rabi振荡和崩溃-回复现象两种形式的振荡. 最大压缩深度和崩溃-回复振荡频率主要依赖于光场与原子间的相互作用强度, 且随光场与原子间相互作用强度的增大而增大; 而量子Rabi振荡频率主要由光场圆频率决

定, 且随光场圆频率的增大而增大.

## 参考文献

- [1] Anderson M H, Ensher J R, Matthews M R, Wieman C E 1995 *Science* **269** 198
- [2] Davis K B, Mewes M O, Andrews M R, Druten N J, Durfee D S, Kurn D M, Ketterle W 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 3969
- [3] Fried D G, Killian T C, Willmann L, Landhuis D, Moss S C, Kleppner D, Greytak T J 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 3811
- [4] Mewes M O, Andrews M R, Kurn D M, Durfee D S, Townsend C G, Ketterle W 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 582
- [5] Anderson B P, Kasevich M A 1998 *Science* **282** 1686
- [6] Hagley E W, Deng L, Kozuma M, Wen J, Helmerson K, Rolston S L, Phillips W D 1999 *Science* **283** 1706
- [7] Kuang L M, Ouyang Z W 2000 *Phys. Rev. A* **61** 023604
- [8] You L, Lewenstein M, Cooper J 1995 *Phys. Rev. A* **51** 4712
- [9] Sun C P, Zhan H, Miao Y X, Li J M 1998 *Commun. Theor. Phys.* **29** 161
- [10] Jing H, Chen J L, Ge M L 2001 *Phys. Rev. A* **63** 15601
- [11] Zhou M, Huang C J 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2514 (in Chinese)[周明, 黄春佳 2002 物理学报 **51** 2514]
- [12] Zhou M, Fang J Y, Huang C J 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1916 (in Chinese)[周明, 方家元, 黄春佳 2003 物理学报 **52** 1916]
- [13] Zhou M, Huang C J 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 54 (in Chinese)[周明, 黄春佳 2004 物理学报 **53** 54]
- [14] Zhang J M, Liu W M, Zhou D L 2008 *Phys. Rev. A* **77** 033620

- [15] Li Z G, Fei S M, Wang Z D, Liu W M 2009 *Phys. Rev. A* **79** 024303
- [16] Li Z G, Fei S M, Alberverio S, Liu W M 2009 *Phys. Rev. A* **80** 034301
- [17] Li Z G, Zhao M J, Fei S M, Liu W M 2010 *Phys. Rev. A* **81** 042312
- [18] Li M, Sun J X 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 2702 (in Chinese)[李明, 孙久勋 2006 物理学报 **55** 2702]
- [19] Li M 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 063201 (in Chinese)[李明 2011 物理学报 **60** 063201]
- [20] Li M, Tang T, Chen D H 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 073203 (in Chinese)[李明, 唐涛, 陈鼎汉 2011 物理学报 **60** 073203]
- [21] Li M, Chen D H, Chen C L 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 183201 (in Chinese)[李明, 陈鼎汉, 陈翠玲 2013 物理学报 **62** 183201]
- [22] Zhou M, Huang C J 2009 *Acta Opt. Sin.* **29** 1096 (in Chinese) [周明, 黄春佳 2009 光学学报 **29** 1096]
- [23] Zhou M, Huang C J 2006 *Acta Opt. Sin.* **26** 1575 (in Chinese) [周明, 黄春佳 2006 光学学报 **26** 1575]
- [24] Ni G J, Chen S Q 2000 *Advanced Quantum Mechanics* (Shanghai: Fudan University Press) p372 (in Chinese) [倪光炯, 陈苏卿 2000 高等量子力学 (上海: 复旦大学出版社) 第 372 页]
- [25] Peng J S, Li G X 1996 *Introduction of Modern Quantum Optics* (Beijing: Science Press) p185 (in Chinese) [彭金生, 李高翔 1996 近代量子光学导论 (北京: 科学出版社) 第 185 页]

## Squeezing properties of two-mode atom laser in a system of $\Xi$ -type three-level atomic Bose-Einstein condensate interacting with single-mode light field\*

Nong Chun-Xuan<sup>1)</sup> Li Ming<sup>1)†</sup> Chen Cui-Ling<sup>2)‡</sup>

1) (College of Science, Guilin University of Technology, Guilin 541004, China)

2) (College of Mathematics and Statistics, Guangxi Normal University, Guilin 541004, China)

( Received 20 September 2013; revised manuscript received 6 November 2013 )

### Abstract

The squeezing properties of the two-mode atom laser in a system of  $\Xi$ -type three-level atomic Bose-Einstein condensate interacting with single-mode squeezed coherent light field are studied. The results show that the two-mode atom laser can be squeezed periodically, and has two types of oscillations: quantum Rabi oscillation and collapse-revival oscillation. The maximum depth of squeezing and the collapse-revival frequency of the atom laser depend greatly on the interaction intensity between the light field and atoms, and the quantum Rabi frequency is largely determined by the frequency of the light field.

**Keywords:** Bose-Einstein condensate, three-level atoms, single-mode squeezed coherent state, two-mode atom laser

**PACS:** 32.80.Qk, 42.50.-p

**DOI:** 10.7498/aps.63.043202

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11364010), the Scientific Research Fund of the Education Department of Guangxi Province, China (Grant No. 200103YB058), and the Doctoral Research Foundation of Guilin University of Technology, China.

† Corresponding author. E-mail: [liming928@163.com](mailto:liming928@163.com)

‡ Corresponding author. E-mail: [mathchen@163.com](mailto:mathchen@163.com)