广义Hamilton系统的共形不变性与Mei守恒量

刘洪伟†

(东北电力大学理学院, 吉林 132012)

(2013年10月17日收到; 2013年11月13日收到修改稿)

研究广义Hamilton系统在无限小变换下的共形不变性与Mei对称性, 给出系统共形不变性同时是Mei对称性的充分必要条件, 得到广义Hamilton系统共形不变性导致的Mei守恒量, 举例说明结果的应用.

关键词: 广义Hamilton系统, 共形不变性, Mei对称性

PACS: 02.20.Sv, 11.30.–j, 45.20.Jj **DOI:** 10.7498/aps.63.050201

1 引 言

对称性是物理学、力学、数学研究的重要课题. 主要包含Noether对称性[1]、Lie对称性[2]及形式不变性[3] (Mei对称性[4,5]), 三种对称性可直接或间接导致守恒量, 导致的守恒量有Noether守恒量、Hojman守恒量和Mei守恒量. 因目前尚未找到广义Hamilton系统的相应作用量, 致使无法利用Noether对称性来研究其守恒量. 利用Lie对称性和Mei对称性研究广义Hamilton系统的守恒量显得尤为重要. 文献[6, 7]得到了系统的Hojman守恒量, 文献[8]给出了系统的一类不变性与守恒量, 文献[9—12]研究了系统的Mei对称性与Mei守恒量. 自梅先生提出形式不变性以来, 这个对称性理论开始蓬勃发展, 学者们将Mei对称性应用到Lagrange系统[13]、Nielsen方程[14]、Appell方程[15]等, 研究Mei对称性导致的Mei守恒量. 文献[16]利用几何方法研究了Hamilton系统共形不变性的几何结构及其一般对称性关系. 最近, 关于广义Hamilton系统的基本理论研究又有了新的进展, 取得了一些重要成果[17−21]. 其中文献[17]研究了广义Hamilton系统Lie对称性导致的新型守恒量, 文献[18]研究了分数阶广义Hamilton 系统的积分不变量, 文献[19]研究了广义Hamilton 系统的绝热不变量. 对于广义Hamilton系统的共形不变性与Mei对称性关系的研究仍未见到, 本文将对这一课题进行研究, 给出系统共形不变性同时是Mei对称性的充要条件, 共形不变性可以通过Mei对称性导致守恒量, 最后研究了Lorenz方程的Robbins 模型[11]的共形不变性导致的Mei守恒量, 通过这个算例来说明本文方法与结果的应用.

2 系统的运动微分方程

广义Hamilton系统的运动微分方程为

$$\dot{x}_i = J_{ij}\frac{\partial H}{\partial x_j}, \quad (i, j = 1, 2, \cdots, m), \tag{1}$$

其中$H = H(t, x_i)$为Hamilton函数, $J_{ij} = J_{ij}(x_i)$满足条件

$$J_{ij} = -J_{ji}, \tag{2}$$

$$J_{il}\frac{\partial J_{jk}}{\partial x_l} + J_{jl}\frac{\partial J_{ki}}{\partial x_l} + J_{kl}\frac{\partial J_{ij}}{\partial x_l} = 0. \tag{3}$$

令

$$F_i = \dot{x}_i - \alpha_i, \quad (i = 1, 2, \cdots, m). \tag{4}$$

其中$\alpha_i = J_{ij}\dfrac{\partial H}{\partial x_j}$.

3 共形不变性与Mei对称性

引入一般无限小变换

$$t^* = t + \varepsilon\xi_0(t, x_i),$$

† 通讯作者. E-mail: hwliu_99@163.com

 http://wulixb.iphy.ac.cn

$$x_i^*(t^*) = x_i(t) + \varepsilon\xi_i(t, x_i), \tag{5}$$

其中 ε 为无限小参数, ξ_0, ξ_i 为无限小生成元.

引入无限小生成元向量

$$X^{(0)} = \xi_0\frac{\partial}{\partial t} + \xi_k\frac{\partial}{\partial x_k},$$

其一次扩展为

$$X^{(1)} = X^{(0)} + \left(\dot{\xi}_k - \dot{x}_k\dot{\xi}_0\right)\frac{\partial}{\partial \dot{x}_k}.$$

定义1 对于 F_i, 在无限小变换(5)下, 若存在矩阵 ℓ_i^k 满足

$$X^{(1)}(F_i) = \ell_i^k F_k, \tag{6}$$

则称一阶微分方程是共形不变的, 其中 ℓ_i^k 为共形因子, (6)式称为共形不变性的确定方程.

定义2 对于系统(1), 如果动力学函数 $H = H(t, x_i)$ 在无限小变换(5)下有

$$H^* = H(t^*, x_i^*) = H + \varepsilon X^{(0)}(H) + O\left(\varepsilon^2\right), \tag{7}$$

使得系统(1)保持形式不变, 即

$$\dot{x}_i = J_{ij}\frac{\partial H^*}{\partial x_j}, \tag{8}$$

这种不变性称为广义Hamilton系统的Mei对称性.

对于系统(1), 如果动力学函数 $H = H(t, x_i)$ 在无限小变换(5)下的生成元 ξ_0, ξ_i 满足方程

$$J_{ij}\frac{\partial\left(X^{(0)}(H)\right)}{\partial x_j} = 0, \tag{9}$$

则广义Hamilton系统具有Mei对称性.

命题1 对于方程(1), 如果在无限小变换(5)下, 若存在矩阵 Γ_i^k 满足

$$X^{(1)}(F_i) - J_{ij}\frac{\partial\left(X^{(0)}(H)\right)}{\partial x_j} = \Gamma_i^k F_k, \tag{10}$$

则方程(1)具有共形不变性, 同时还是Mei对称性的充分必要条件为 $\Gamma_i^k = \ell_i^k$. 其中 ℓ_i^k 为共形不变性的共形因子.

证明 由于方程(1)具有Mei对称性, 满足(9)式, 如果存在矩阵 Γ_i^k 满足(10)式, 则(10)式化为

$$X^{(1)}(F_i) = \Gamma_i^k F_k. \tag{11}$$

由定义1知, 系统(1)的共形因子 $\ell_i^k = \Gamma_i^k$.

反之亦然, 由定义(1)式和(10)式, 容易验证

$$\left(\ell_i^k - \Gamma_i^k\right)F_k = J_{ij}\frac{\partial\left(X^{(0)}(H)\right)}{\partial x_j}, \tag{12}$$

若 $\ell_i^k = \Gamma_i^k$, 得到(9)式成立, 因而系统具有Mei对称性.

命题2 对于方程(1), 如果无限小变换(5)的生成元 ξ_0, ξ_i 满足

$$\frac{\partial\xi_i}{\partial t} + \left(\frac{\partial\xi_i}{\partial x_k} - \delta_i^k\dot{\xi}_0\right)\alpha_k - X^{(0)}(\alpha_i) - J_{ij}\frac{\partial\left(X^{(0)}(H)\right)}{\partial x_j} = 0, \tag{13}$$

则(10)式中的矩阵 Γ_i^k 为

$$\Gamma_i^k = \frac{\partial\xi_i}{\partial x_k} - \delta_i^k\dot{\xi}_0. \tag{14}$$

证明 计算差值

$$\begin{aligned}
&X^{(1)}(F_i) - J_{ij}\frac{\partial\left(X^{(0)}(H)\right)}{\partial x_j}\\
&= \left\{X^{(0)} + \left(\dot{\xi}_k - \dot{x}_k\dot{\xi}_0\right)\frac{\partial}{\partial\dot{x}_k}\right\}(\dot{x}_i - \alpha_i)\\
&\quad - J_{ij}\frac{\partial\left(X^{(0)}(H)\right)}{\partial x_j}\\
&= -X^{(0)}(\alpha_i) + \left(\dot{\xi}_i - \dot{x}_i\dot{\xi}_0\right) - J_{ij}\frac{\partial\left(X^{(0)}(H)\right)}{\partial x_j}\\
&= -X^{(0)}(\alpha_i) + \frac{\partial\xi_i}{\partial t} + \frac{\partial\xi_i}{\partial x_k}\dot{x}_k - \dot{x}_i\dot{\xi}_0\\
&\quad - J_{ij}\frac{\partial\left(X^{(0)}(H)\right)}{\partial x_j}\\
&= \left(\frac{\partial\xi_i}{\partial x_k} - \delta_i^k\dot{\xi}_0\right)F_k + \frac{\partial\xi_i}{\partial t} + \left(\frac{\partial\xi_i}{\partial x_k} - \delta_i^k\dot{\xi}_0\right)\alpha_k\\
&\quad - X^{(0)}(\alpha_i) - J_{ij}\frac{\partial\left(X^{(0)}(H)\right)}{\partial x_j}.
\end{aligned}$$

将(13)式代入上式得

$$\begin{aligned}
&X^{(1)}(F_i) - J_{ij}\frac{\partial\left(X^{(0)}(H)\right)}{\partial x_j}\\
&= \left(\frac{\partial\xi_i}{\partial x_k} - \delta_i^k\dot{\xi}_0\right)F_k,
\end{aligned} \tag{15}$$

于是有

$$\Gamma_i^k = \frac{\partial\xi_i}{\partial x_k} - \delta_i^k\dot{\xi}_0. \tag{16}$$

命题3 如果广义Hamilton系统共形不变性的无限小生成元 ξ_0, ξ_i 满足(10)式, 并且存在规范函数 $G_{\mathrm{M}} = G_{\mathrm{M}}(t, x_i)$ 满足下面的方程:

$$\begin{aligned}
&X^{(0)}(x_i)\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_i}{\mathrm{d}t} + \xi_i\frac{\bar{\mathrm{d}}\left\{X^{(0)}(x_i)\right\}}{\mathrm{d}t} - X^{(0)}(H)\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_0}{\mathrm{d}t}\\
&- \frac{\partial\left(X^{(0)}(H)\right)}{\partial t}\xi_0 + \frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}G_{\mathrm{M}} = 0,
\end{aligned} \tag{17}$$

则广义Hamilton系统共形不变性导致下面的Mei守恒量:

$$I = X^{(0)}(x_i)\xi_i - X^{(0)}(H)\xi_0 + G_{\mathrm{M}} = \mathrm{const}, \tag{18}$$

其中 $\dfrac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial}{\partial t} + \alpha_k\dfrac{\partial}{\partial x_k}$.

证明 将(18)式两端对时间求导数, 并将(17)式代入得

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}I = \xi_i\frac{\bar{\mathrm{d}}\{X^{(0)}(x_i)\}}{\mathrm{d}t} + X^{(0)}(x_i)\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_i}{\mathrm{d}t}$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\partial X^{(0)}(H)}{\partial t}\xi_0-\frac{\partial X^{(0)}(H)}{\partial x_i}\dot{x}_i\xi_0\\
&-X^{(0)}(H)\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_0}{\mathrm{d}t}+\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}G_{\mathrm{M}}\\
=&\ \xi_i\frac{\bar{\mathrm{d}}\{X^{(0)}(x_i)\}}{\mathrm{d}t}+X^{(0)}(x_i)\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_i}{\mathrm{d}t}\\
&-\frac{\partial\left(X^{(0)}(H)\right)}{\partial t}\xi_0-\frac{\partial\left(X^{(0)}(H)\right)}{\partial x_i}\dot{x}_i\xi_0\\
&-X^{(0)}(H)\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_0}{\mathrm{d}t}-X^{(0)}(x_i)\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_i}{\mathrm{d}t}\\
&-\xi_i\frac{\bar{\mathrm{d}}\{X^{(0)}(x_i)\}}{\mathrm{d}t}+X^{(0)}(H)\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_0}{\mathrm{d}t}\\
&+\frac{\partial\left(X^{(0)}(H)\right)}{\partial t}\xi_0\\
=&-\frac{\partial\left(X^{(0)}(H)\right)}{\partial x_i}\dot{x}_i\xi_0\\
=&\ J_{ki}\frac{\partial\left(X^{(0)}(H)\right)}{\partial x_i}\frac{\partial H}{\partial x_k}\xi_0.
\end{aligned}
$$

由 (9) 式得

$$
\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}I=0.
$$

4 Lorenz-Robbins模型的共形不变性与Mei守恒量

研究Lorenz方程的Robbins模型

$$
\begin{aligned}
&\dot{x}_1=-x_2x_3+\varepsilon(1-x_1),\\
&\dot{x}_2=x_1x_3-\varepsilon x_2,\\
&\dot{x}_3=x_2-\varepsilon\sigma x_3.
\end{aligned}
\tag{19}
$$

当取 $\varepsilon=0$ 时, 它是一个三维广义Hamilton系统, Hamilton函数为

$$
\begin{aligned}
&H=x_1+\frac{1}{2}x_3^2,\\
&(J_{ij})=\begin{pmatrix}0&0&-x_2\\0&0&x_1\\x_2&-x_1&0\end{pmatrix},
\end{aligned}
\tag{20}
$$

试研究其共形不变性导致的Mei守恒量.

系统 (20) 的运动微分方程为

$$
\begin{aligned}
&\dot{x}_1=-x_2x_3,\\
&\dot{x}_2=x_1x_3,\\
&\dot{x}_3=x_2.
\end{aligned}
\tag{21}
$$

令

$$
\begin{aligned}
&F_1=\dot{x}_1+x_2x_3,\\
&F_2=\dot{x}_2-x_1x_3,\\
&F_3=\dot{x}_3-x_2.
\end{aligned}
\tag{22}
$$

考虑时间不变的特殊无限小变换, 即

$$
t^*=t,\quad x_i^*(t^*)=x_i(t)+\varepsilon\xi_i(t,x_i),
\tag{23}
$$

无限小生成元向量及其一次扩展分别为

$$
\begin{aligned}
&X^{(0)}=\xi_k\frac{\partial}{\partial x_k},\\
&X^{(1)}=X^{(0)}+\dot{\xi}_k\frac{\partial}{\partial \dot{x}_k}=\xi_k\frac{\partial}{\partial x_k}+\dot{\xi}_k\frac{\partial}{\partial \dot{x}_k}.
\end{aligned}
$$

首先计算

$$
X^{(0)}(H)=\xi_k\frac{\partial H}{\partial x_k}=\xi_1+x_3\xi_3.
\tag{24}
$$

$$
\begin{aligned}
&X^{(1)}(F_1)=\xi_2x_3+\xi_3x_2+\dot{\xi}_1,\\
&X^{(1)}(F_2)=-x_3\xi_1-x_1\xi_3+\dot{\xi}_2,\\
&X^{(1)}(F_3)=-\xi_2+\dot{\xi}_3.
\end{aligned}
\tag{25}
$$

将 (24) 式, (25) 式代入 (10) 式左端得

$$
\begin{aligned}
&X^{(1)}(F_1)-J_{1j}\frac{\partial\left(X^{(0)}(H)\right)}{\partial x_j}\\
=&\ \xi_2x_3+\xi_3x_2+\dot{\xi}_1+x_2\frac{\partial(\xi_1+x_3\xi_3)}{\partial x_3},\\
&X^{(1)}(F_2)-J_{2j}\frac{\partial\left(X^{(0)}(H)\right)}{\partial x_j}\\
=&-x_3\xi_1-x_1\xi_3+\dot{\xi}_2-x_1\frac{\partial(\xi_1+x_3\xi_3)}{\partial x_3},\\
&X^{(1)}(F_3)-J_{3j}\frac{\partial\left(X^{(0)}(H)\right)}{\partial x_j}\\
=&-\xi_2+\dot{\xi}_3-x_2\frac{\partial(\xi_1+x_3\xi_3)}{\partial x_1}\\
&+x_1\frac{\partial(\xi_1+x_3\xi_3)}{\partial x_2},
\end{aligned}
\tag{26}
$$

取生成元

$$
\xi_1=x_2x_3,\quad \xi_2=-x_1x_3,\quad \xi_3=-x_2.
\tag{27}
$$

于是, (26) 式化为

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix}
X^{(1)}(F_1)-J_{1j}\dfrac{\partial\left(X^{(0)}(H)\right)}{\partial x_j}\\
X^{(1)}(F_2)-J_{2j}\dfrac{\partial\left(X^{(0)}(H)\right)}{\partial x_j}\\
X^{(1)}(F_3)-J_{3j}\dfrac{\partial\left(X^{(0)}(H)\right)}{\partial x_j}
\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}x_3F_2+x_2F_3\\-x_3F_1-x_1F_3\\-F_2\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & x_3 & x_2 \\ -x_3 & 0 & -x_1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}, \tag{28}$$

由(28)式知,

$$\Gamma_i^k = \begin{pmatrix} 0 & x_3 & x_2 \\ -x_3 & 0 & -x_1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

事实上, Γ_i^k 也为系统(20)的共形不变性的共形因子. 取上述生成元(27)式, 有

$$\begin{pmatrix} X^{(1)}(F_1) \\ X^{(1)}(F_2) \\ X^{(1)}(F_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_2 x_3 + \xi_3 x_2 + \dot{\xi}_1 \\ -x_3\xi_1 - x_1\xi_3 + \dot{\xi}_2 \\ -\xi_2 + \dot{\xi}_3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} x_3F_2 + x_2F_3 \\ -x_3F_1 - x_1F_3 \\ -F_2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & x_3 & x_2 \\ -x_3 & 0 & -x_1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix},$$

由定义(1)知, 共形因子为

$$\ell_i^k = \begin{pmatrix} 0 & x_3 & x_2 \\ -x_3 & 0 & -x_1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

于是,

$$\Gamma_i^k = \ell_i^k = \begin{pmatrix} 0 & x_3 & x_2 \\ -x_3 & 0 & -x_1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{29}$$

对于生成元(27)式, 由命题1知, 系统具有共形不变性的同时还具有Mei对称性.

对于上述生成元(27)式, 我们可以验证(13)式成立, 即

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial t} + \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} - \delta_i^k \dot{\xi}_0\right)\alpha_k - X^{(0)}(\alpha_i)$$
$$- J_{ij}\frac{\partial\left(X^{(0)}H\right)}{\partial x_j} = 0.$$

利用命题2, 可直接计算得

$$\Gamma_i^k = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} - \delta_i^k \dot{\xi}_0 = \begin{pmatrix} 0 & x_3 & x_2 \\ -x_3 & 0 & -x_1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{30}$$

显然结果(30)与(29)式相同, 此时系统(20)在特殊无限小变换(27)下具有共形不变性的同时还具有Mei对称性.

接下来研究系统(20)的共形不变性通过Mei对称性导致的Mei守恒量. 计算

$$X^{(0)}(x_i) = \xi_i, \quad \frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_1 = x_1x_3^2 + x_2^2,$$
$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_2 = x_2x_3^2 - x_1x_2, \quad \frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_3 = -x_1x_3, \tag{31}$$

将(31)式代入(17)式, 得

$$2x_2x_3(x_1 + x_1^2 + x_2^2) + \frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}G_{\mathrm{M}} = 0. \tag{32}$$

注意到(32)式有解,

$$G_{\mathrm{M}} = 2x_1^3 + 2x_1x_2^2 - x_2^2. \tag{33}$$

将(31)式和(33)式代入(18)式, 得到系统(20)的Mei守恒量为

$$I = \left(x_1^2 + x_2^2\right)\left(2x_1 + x_3^2\right) = \mathrm{const}. \tag{34}$$

5 结 论

本文研究了广义Hamilton系统的共形不变性与Mei对称性的关系, 给出了系统共形不变性同时是Mei对称性的充分必要条件, 得到了共形不变性通过Mei对称性导致的Mei守恒量, 最后以Lorenz方程的Robbins模型为例来说明本文方法与结果的应用.

参考文献

[1] Noether A E 1918 *Nachr. Akad. Wiss. Gottingen: Math. Phys.* **2** 235

[2] Lutzky M 1979 *J. Phys A: Math Gen.* **12** 973

[3] Mei F X 2000 *J. Beijing Inst. Technol.* **9** 120

[4] Fang J H 2003 *Commun. Theor. Phys.* **40** 269

[5] Luo S K 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2941 (in Chinese)[罗绍凯 2003 物理学报 **52** 2941]

[6] Mei F X 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1048 (in Chinese)[梅凤翔 2003 物理学报 **52** 1048]

[7] Liu C, Liu S X, Mei F X, Guo Y X 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6709 (in Chinese)[刘畅, 刘世兴, 梅凤翔, 郭永新 2008 物理学报 **57** 6709]

[8] Wu H B 2004 *Tran. of Beijing Inst. of Technol.* **24** 20 (in Chinese)[吴惠彬 2004 北京理工大学学报 **24** 20]

[9] Jia L Q, Zheng S W 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3829 (in Chinese) [贾利群, 郑世旺 2006 物理学报 **55** 3829]

[10] Jiang W A, Luo S K 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 060201 (in Chinese)[姜文安, 罗绍凯 2011 物理学报 **60** 060201]

[11] Mei F X 2004 *Symmetries and Conserved Quantities of Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔 2004 约束力学系统的对称性与守恒量 (北京: 北京理工大学出版社)]

[12] Guo X Y, Liu H W, Xu Z H 2013 *Journal of Northeast Dianli University* **33** 162 (in Chinese) [郭秀英, 刘洪伟, 徐中海 2013 东北电力大学学报 **33** 162]

[13] Fang J H, Ding N, Wang P 2007 *Chin. Phys.* **16** 887

[14] Cui J C, Zhang Y Y, Jia L Q 2009 *Chin. Phys. B* **18** 1731

[15] Jia L Q, Xie Y L, Zhang Y Y, Yang X F 2010 *Chin. Phys. B* **19** 110301

[16] Robert M L, Matthew P 2001 *J. Geom. Phys.* **39** 276

[17] Luo S K, Li Z J, Peng W, Li L 2013 *Acta Mech.* **224** 71

[18] Luo S K, Li L 2013 *Nonlinear Dyn.* **73** 339

[19] Jiang W A, Luo S K 2012 *Nonlinear Dyn.* **67** 475

[20] Luo S K, Li L 2013 *Nonlinear Dyn.* **73** 639

[21] Li L, Peng W, Xu Y L, Luo S K 2013 *Nonlinear Dyn.* **72** 663

Conformal symmetry and Mei conserved quantity for a generalized Hamilton system

Liu Hong-Wei[†]

(*School of Sciences Northeast Dianli University, Jilin 132012, China*)

(Received 17 October 2013; revised manuscript received 13 November 2013)

Abstract

In this paper, the conformal invariance and Mei symmetry for a generalized Hamilton system under infinitesimal transformations are discussed in details. A necessary and sufficient condition for conformal invariance of systems to be Mei symmetry is given. We get the Mei conserved quantities of the conformal invariance. Finally, an example is given to illustrate the application of the result.

Keywords: generalized Hamilton system, conformal invariance, Mei symmetry

PACS: 02.20.Sv, 11.30.–j, 45.20.Jj **DOI:** 10.7498/aps.63.050201

† Corresponding author. E-mail: hwliu_99@163.com