阻尼最速落径问题和约束与运动定理的联系

丁光涛†

(安徽师范大学物理与电子信息学院, 芜湖 241000)

(2013 年 12 月 2 日收到; 2013 年 12 月 24 日收到修改稿)

研究阻尼的和带有非零初速的最速落径问题; 根据这些问题的讨论, 指出对某些系统运动定理能够作为约束, 而且这种约束是完整的或是非完整的与微分运动定理是可积的或是不可积的相关联.

关键词: 变分法, 最速落径, 运动定理, 约束

PACS: 02.30.Xx, 45.20.D–, 45.20.Jj **DOI:** 10.7498/aps.63.070201

1 引 言

变分法在数学、力学、物理学和工程科学中扮演着重要的角色, 在分析力学的新进展中变分原理仍是热点课题 [1−5]. 最早提出的变分命题就是最速落径问题, 设重力场中不在同一铅垂线上两点, 质点从上一点沿一光滑曲线自由滑动到下一点, 确定下滑时间最短的曲线问题就是最速落径问题, 这是一种最简单的变分问题. 近年来有相当多的对阻尼系统的研究, 主要涉及积分和 Lagrange 力学逆问题 [6−10], 本文将阻尼运动的研究拓展到最速落径变分问题. 为此, 我们从两个方向拓展最速落径问题: 一是质点从始点以某一初速度开始下滑, 而不是从静止自由下滑情况; 二是阻尼媒质中的最速落径问题 [3], 给出了这个问题的求解方法. 在讨论这两个拓展问题时, 指出了约束条件与系统的运动定理以及守恒定律之间的关联, 这实质上是一种新的构成约束的机理, 并且得到如下结论, 即微分形式运动定理的可积和不可积与这种约束的完整和非完整相对应.

2 初速度不为零的最速落径问题

2.1 自由下滑的最速落径问题

质点沿铅垂平面内光滑曲线 $y = y(x)$, 从 A 开始自由下滑到不在同一铅垂线上的 B 点, 取 x 轴为水平轴, y 轴铅垂向下, 质点经过 $P(x, y)$ 点速度为 v, 则该过程经历的时间为

$$T = \int_A^B \frac{\mathrm{d}s}{v} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v}\mathrm{d}x, \tag{1}$$

式中 $y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$. 变量 y 和 v 之间存在关系可以根据动能定理确定

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = mg\mathrm{d}y. \tag{2}$$

设在 A 点 $y = 0$, $v = 0$, 质点质量为 m. 直接积分 (2) 式得到

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy, \tag{3}$$

代入 (1) 式得到

$$T = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}\mathrm{d}x. \tag{4}$$

这就是最速落径问题的泛函, 它的极小值对应的曲线就是最速落径——旋轮线.

2.2 初速度为 v_0 的最速落径问题

设质点开始下滑的速度不为零, 即在 A 点 $y = 0$, $v = v_0$, 则积分式 (2) 得到

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = mgy, \tag{5}$$

这表明变量 y 和 v 之间关系与初始条件相关. 与 (5) 式对应的泛函 (4) 变换为

$$T = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{v_0^2+2gy}}\mathrm{d}x, \tag{6}$$

† 通讯作者. E-mail: dgtb95@sina.com

引入简单的变量变换 $\bar{y}=y+\dfrac{v_0^2}{2g}$, 这个问题就变换成自由下滑的最速落径问题.

3 阻尼媒质中的最速落径问题

由于质点在阻尼媒质中运动, 故质点所受主动力除了重力外, 还有阻尼力 $mR(v)$, 其大小是速度的函数, 方向与速度相反. 这里仍然讨论从 A 点自由下滑, 方程 (1) 成立, 但是联系 v 和 y 的动能定理方程 (2) 应当改写成

$$\mathrm{d}\Big(\frac{1}{2}mv^2\Big)=mg\mathrm{d}y-mR(v)\mathrm{d}s, \tag{7}$$

式中

$$\mathrm{d}s=\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}=\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x. \tag{8}$$

(7) 式与 (2) 式的重要区别在于 (7) 式不能直接积分. 将 y 和 v 看作 x 的函数, 由 (7) 式对 x 求微商得到

$$vv'-gy'+R(v)\sqrt{1+y'^2}=0, \tag{9}$$

式中 $v'=\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$, y 和 v 之间的关系由上述微分方程表示.

(3) 和 (5) 式由 (2) 式直接积分导出, 并且利用初始条件式确定了积分常数, 这两个方程都相当于变量 y 和 v 之间的一个完整约束, 因此可以在泛函中消去变量 v. (9) 式也来自于动能定理 (7), 可以看作 y 和 v 之间的一个非完整约束条件, 因此, 阻尼最速落径问题就是带有非完整约束条件的变分问题, 这种问题可以引入不定乘子来求解.

引入不定乘子 λ, 则从 (1) 和 (9) 式导出如下泛函:

$$T^*=\int_{x_1}^{x_2}\Big\{\frac{\sqrt{1+y'^2}}{v}+\lambda(vv'-gy'+R(v)\sqrt{1+y'^2})\Big\}\mathrm{d}x. \tag{10}$$

对应的 Lagrange 函数为

$$L^*=\frac{\sqrt{1+y'^2}}{v}+\lambda\Big(vv'-gy'+R(v)\sqrt{1+y'^2}\Big), \tag{11}$$

L^* 中不显含 y 和 x, 故由此得到一个循环积分

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\Big(\frac{1}{v}+\lambda R\Big)-\lambda g=c \tag{12}$$

和一个 Jacobi 积分

$$\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}\Big(\frac{1}{v}+\lambda R\Big)=h. \tag{13}$$

从上述两个积分可以导出新的积分

$$\Big(\frac{1}{v}+\lambda R\Big)^2=(c+\lambda g)^2+h^2. \tag{14}$$

解 (14) 式, 可以得到 λ 和 v 之间的函数关系

$$\lambda=\lambda(v). \tag{15}$$

由 Lagrange 函数 (11), 可以导出对应于变量 v 的运动方程

$$\lambda' v+\sqrt{1+y'^2}\Big(\frac{1}{v^2}-\lambda\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}v}\Big)=0. \tag{16}$$

从 (12) 和 (13) 式可以得到

$$y'=\frac{c+\lambda g}{h}. \tag{17}$$

由 (12) 和 (16) 式可以导出

$$\lambda' v(c+\lambda g)=y'\Big(\lambda\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}v}-\frac{1}{v^2}\Big)\Big(\frac{1}{v}+\lambda R\Big). \tag{18}$$

从 (17) 和 (18) 式导出

$$\mathrm{d}x=\frac{hv\mathrm{d}\lambda}{\Big(\frac{1}{v}+\lambda R\Big)\Big(\lambda\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}v}-\frac{1}{v^2}\Big)},$$
$$\mathrm{d}y=\frac{(c+\lambda g)v\mathrm{d}\lambda}{\Big(\frac{1}{v}+\lambda R\Big)\Big(\lambda\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}v}-\frac{1}{v^2}\Big)}. \tag{19}$$

将 (15) 式 $\lambda=\lambda(v)$ 代入 (19) 式后, 积分得到以 v 为参数的阻尼最速落径参数方程

$$x=f_1(v,h,c)+c_1, y=f_2(v,h,c)+c_2. \tag{20}$$

积分常数由端点条件

$$x=x_1, y=y_1; x=x_2, y=y_2 \tag{21}$$

确定.

4 约束与运动定理相联系的意义

经典力学中约束是重要的概念, 尤其在分析力学中可以说是奠基性的概念, 然而在涉及约束特别是非完整约束的一些基本问题时仍然存在分歧和争议, 文献 [9] 及其中收录的大量参考文献, 充分反映了我国力学界从上个世纪 80 年代末以来, 在这个领域里的争鸣、讨论和取得的多方面进展. 但是, 传统的对约束的研究更多地集中在约束的数学层面上, 例如, 约束方程、Pfaff 约束的可积性、微分约束的几何性质以及变分微分的交换性等问题上, 然而, 约束不是单纯的数学问题, 而是综合的力学物理学问题, 80 年代以来的讨论说明仅仅在数学层面上研究约束是不够的, 应当重视约束力的分析, 重视约束条件的实现方式以及约束的力学和物理本质的研究. 关于第一积分作为非完整约束的研

究[10], 实际上已经把约束和系统的动力学规律联系起来, 本文在一定意义上是上述研究过程的继续, 得到的结论表明有些系统的约束条件, 并不是来自具体机构的限制, 不是来自控制机理的调节, 不是来自特殊类型力的作用, 而是正常系统力学运动规律的表现; 不仅一些系统的某些运动积分可以看作约束, 而且直接从运动定理就能够构成约束, 特别是微分形式的运动定理是否能够直接积分分别对应着完整和非完整约束, 显然, 这是一种新型的约束.

5 结 论

1) 本文讨论了经典最速落径问题的两种拓展问题: 一是下滑初速不为零的最速落径问题, 指出通过简单的坐标变换, 这种问题就转化为自由下滑的最速落径问题; 二是受到阻尼力作用的最速落径问题, 我们完善了文献[3]中求解该问题的步骤和方法.

2) 在讨论最速落径问题的过程中, 发现这也是一种约束条件下的变分问题. 在相关泛函被积式中所出现的力学变量之间存在的约束条件, 实质上是运动定理的表现, 其中有些可以直接积分而成为有限形式, 甚至就是守恒定律, 对应的守恒量数值由初始条件确定; 有些不能直接积分, 保持着微分或微商形式. 这些变量之间的动力学关系构成了系统变量之间的约束条件, 其中传统的最速落径问题中, 可以直接积分成为有限形式, 是完整约束; 而阻尼最速落径问题中不能积分成为有限形式, 是非完整约束.

3) 阻尼最速落径问题中出现的约束是一种新型的约束, 这种系统内在的约束条件, 源于系统力学运动规律, 文献[11]指出“当应用基本原理推导系统运动微分方程时, 约束本身的性质有极大影响. ······ 因此, 必须研究和区分约束的类型.” “按约束的实现可分为被动约束与主动约束. 被动约束是靠接触或摩擦被动地实现的. 主动约束是靠辅助能源主动地实现的, 如伺服约束. ”然而, 本文指出的约束不同于上述主动和被动约束. 这种新型的约束对系统运动形式, 以及选取研究系统运动的方法有什么影响; 以及在力学和物理学层面上约束本质的多样性, 与非完整力学中处理非完整约束的多种模型之间, 是否存在相关性, 存在什么样的相关性等问题都值得进一步深入研究.

参考文献

[1] Courant R, Hilbert D (translated by Qian M, Guo D R) 1958 *Methods of Mathematical Physics* Vol. I (Beijing:Science Press) pp129–135 (in Chinese) [柯朗 R, 希伯尔特 D 著 (钱敏郭敦仁译)1958 数学物理方法卷 I (北京: 科学出版社) 第 129—135 页]

[2] Goldstein H, Poole C, Safko J 2005 *Classical Mechanics* (3rd Ed.) (Beijing: Higher Education Press)

[3] Smirnov V E (translated by Chen C Z) 1958 *Textbook of Higher Mathematics* Vol. IV-I (Beijing: People Education Press) pp232–234 (in Chinese) [斯米尔诺夫 V E 著 (陈传璋译)1958 高等数学教程第四卷第一分册 (北京: 人民教育出版社) 第 232—234 页]

[4] Zhang H B, Chen L Q, Liu R W 2005 *Chin. Phys. B* **14** 1063

[5] Zhang H B, Chen L Q, Gu S L, Liu C Z 2007 *Chin. Phys.* **16** 582

[6] Musielak Z E 2008 *J. Phys. A: Math. Their.* **41** 055205

[7] Cieslinski J L, Nikiciuk T 2010 *J. Phys. A: Math. Their.* **43** 175205

[8] Ding G T 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 044503 (in Chinese)[丁光涛 2011 物理学报 **60** 044503]

[9] Ding G T 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 020204 (in Chinese)[丁光涛 2012 物理学报 **61** 020204]

[10] Ding G T 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 064501 (in Chinese)[丁光涛 2013 物理学报 **62** 064501]

[11] Luo S K, Zhang Y F 2008 *Advances in the Study of Dynamics of Constrained Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [罗绍凯, 张永发 2008 约束系统动力学研究进展 (北京: 科学出版社)]

Damped brachistochrone problem and the relation between constraint and theorem of motion

Ding Guang-Tao†

(*College of Physics and Electronic Information, Anhui Normal University, Wuhu 241000, China*)

(Received 2 December 2013; revised manuscript received 24 December 2013)

Abstract

The damped brachistochrone problem and that with non-zero initial velocity are studied. Based on the discussion of these problems, one may take theorems of motion as constraints for some systems, and whether the constraints are holonomic or nonholonomic is related to the fact that the differential theorems of motion are integrable or non-integrable.

Keywords: variational calculus, brachistochrone, theorem of motion, constraint

PACS: 02.30.Xx, 45.20.D–, 45.20.Jj **DOI:** 10.7498/aps.63.070201

† Corresponding author. E-mail: dgtb95@sina.com