

电感电流伪连续模式下 Boost 变换器的分数阶建模与分析*

谭程 梁志珊†

(中国石油大学(北京), 地球物理与信息工程学院, 北京 102249)

(2013年9月18日收到; 2013年12月23日收到修改稿)

基于电感和电容本质上是分数阶的事实, 采用分数阶微积分理论建立了电感电流伪连续模式下 Boost 变换器的区间分数阶数学模型. 依据状态平均建模方法, 建立了 Boost 变换器工作于电感电流伪连续模式下的分数阶状态平均模型. 通过所建的分数阶数学模型对其电感电流和输出电压进行了理论分析以及传递函数的推导, 并比较了与整数阶数学模型的区别. 根据改进的 Oustaloup 分数阶微积分滤波器近似算法, 采用电感和电容的等效分数阶电路模型, 在 Matlab/Simulink 的仿真环境下, 对其数学模型和电路模型进行了仿真对比, 分析了模型误差产生的原因, 验证了所建的分数阶数学模型以及对其理论分析的正确性. 最后, 指出了分数阶 Boost 变换器工作于电感电流伪连续模式与连续模式、断续模式的区别与联系.

关键词: 分数阶, Boost 变换器, 伪连续模式(三态模式), 数值仿真

PACS: 05.45.-a, 45.10.Hj, 84.30.Jc

DOI: 10.7498/aps.63.070502

1 引言

虽然分数阶微积分理论拥有与整数阶微积分几乎一样长的研究历史, 但由于缺乏明显的几何意义, 使其应用一时受到了限制. 直到近年来, 在机械、物理、工程、信息科学、材料科学等领域发现存在分数阶现象, 使得分数阶微积分理论有了实际的应用背景, 从而成为了物理学和工程学的研究热点^[1-3]. 整数阶微积分是相应分数阶微积分的特例情况^[4]. 已有的研究表明, 相比于整数阶的系统模型, 其分数阶模型能更透彻、更准确的反映系统的物理现象^[5].

近年来, 对电感和电容数学建模的研究结果表明: 电感和电容本质上都是分数阶的^[6], 整数阶的电感和电容在实际中并不存在, 基于分数阶微积分理论建立的电感和电容模型更能反映其电特性^[7,8], 以往用来描述电感和电容电特性的整数阶

模型是不够准确的甚至可能是错误的. 然而, 电感和电容又是开关功率变换器电路中不可或缺的电子器件. 以往对开关功率变换器的模型研究都是建立在电感和电容是整数阶基础上的, 显然这与其分数阶的本质是相违背的, 是不科学的, 这不能准确的反映开关功率变换器的动力学特性甚至可能会得出错误的结论. 在已有的研究中, 文献^[9]分析了分数阶电容对功率因数校正变换器的影响, 却没有考虑电感也是分数阶的. 文献^[10]所建立的分数阶 Buck-Boost 变换器的模型也仅考虑了电容是分数阶的. 鉴于电感和电容本质上都是分数阶的事实, 文献^[11]对工作于电感电流连续模式(continuous conduction mode, CCM)下的 Boost 变换器进行了分数阶区间数学模型和分数阶状态平均模型的建立和分析, 但没有进行电路模型的仿真验证且分数阶 CCM Boost 变换器的控制输出传递函数具有右半平面零点(right half plane, RHP)问题; 文献^[12]对工作于电感电流断

* 国家自然科学基金(批准号: 51071176)和中国石油大学(北京)前瞻导向基金(批准号: 2010QZ03)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: lzs1960@cup.edu.cn

续模式 (discontinuous conduction mode, DCM) 下的 Boost 变换器进行了分数阶区间数学模型和分数阶状态平均模型的建立和分析, 但也没有进行电路模型的仿真验证且分数阶 DCM Boost 变换器有电感电流纹波大、带负载能力弱等问题. 而工作于电感电流伪连续模式 (pseudo continuous conduction mode, PCCM) 下的 Boost 变换器 (又称三态 Boost 变换器) 具有比 CCM 模式和 DCM 模式变换器更优良的工作性能^[13]. PCCM 是一种介于 CCM 和 DCM 之间, Boost 变换器的第三种工作模式^[14]. 相对于 CCM Boost 变换器, PCCM Boost 变换器的控制输出传递函数不存在 RHP 问题, 提高了系统的闭环稳定性和动态响应性能; 相对于 DCM Boost 变换器, PCCM Boost 变换器具有电感电流纹波小、带负载能力强的优点. 因此, 对 PCCM Boost 变换器的分数阶模型的研究是一项具有重要理论意义和实际应用价值的课题.

本文以 PCCM Boost 变换器为研究对象, 推导出了 PCCM Boost 变换器的分数阶区间数学模型和分数阶状态平均模型, 对其电感电流和输出电压进行了理论分析以及传递函数的推导, 并基于 Matlab/Simulink 的仿真环境, 通过对推导的数学模型和电路模型进行仿真, 分析了模型误差产生的原因, 验证了分数阶建模与理论分析的正确性. 最后, 指出了分数阶 Boost 变换器工作于电感电流伪连续模式与连续模式、断续模式的区别与联系.

2 PCCM Boost 变换器的分数阶区间数学建模及分析

根据文献^[8]可知, 分数阶电感和分数阶电容的数学模型为

$$\begin{aligned} v_L &= L \frac{d^\alpha i_L}{dt^\alpha}, \\ i_C &= C \frac{d^\beta v_o}{dt^\beta}, \end{aligned} \quad (1)$$

其中, i_L 为流过分数阶电感的电流, v_L 为分数阶电感两端的电压, L 为分数阶电感值, i_C 为流经分数阶电容的电流, v_o 为分数阶电容两端的电压, C 为分数阶电容值, α 和 β 分别为电感和电容的分数阶阶数且 $0 < \alpha, \beta < 1$.

Boost 变换器工作于电感电流伪连续模式下的电路原理图和时序脉冲及电感电流波形, 如图 1 所示. 其中, v_{in} 为输入电压, R 为负载电阻, PS_1 为

控制开关管 S_1 通断的周期性脉冲信号, PS_2 为控制开关管 S_2 通断的周期性脉冲信号, 周期均为 T . 则 PCCM Boost 变换器的工作原理为

1) 工作模式 1 ($0 < t < d_1 T$): 周期性脉冲信号 PS_1 为高电平, PS_2 为低电平时, 开关管 S_1 导通、 S_2 关断, 二极管 D_{i1} 承受反向电压而关断, 持续时间为 $d_1 T$.

$$\begin{bmatrix} \frac{d^\alpha i_L}{dt^\alpha} \\ \frac{d^\beta v_o}{dt^\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ v_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} v_{in}. \quad (2)$$

2) 工作模式 2 ($d_1 T < t < (d_1 + d_2) T$): 周期性脉冲信号 PS_1 为低电平, PS_2 为低电平时, 开关管 S_1 关断、 S_2 关断, 二极管 D_{i1} 承受正向电压而导通, 持续时间为 $d_2 T$.

$$\begin{bmatrix} \frac{d^\alpha i_L}{dt^\alpha} \\ \frac{d^\beta v_o}{dt^\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ v_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} v_{in}. \quad (3)$$

3) 工作模式 3 ($(d_1 + d_2) T < t < T$): 周期性脉冲信号 PS_1 为低电平, PS_2 为高电平时, 开关管 S_1 关断、 S_2 导通, 二极管 D_{i1} 承受反向电压而关断, 持续时间为 $d_3 T$, 其中 $d_1 + d_2 + d_3 = 1$.

$$\begin{bmatrix} \frac{d^\alpha i_L}{dt^\alpha} \\ \frac{d^\beta v_o}{dt^\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ v_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} v_{in}. \quad (4)$$

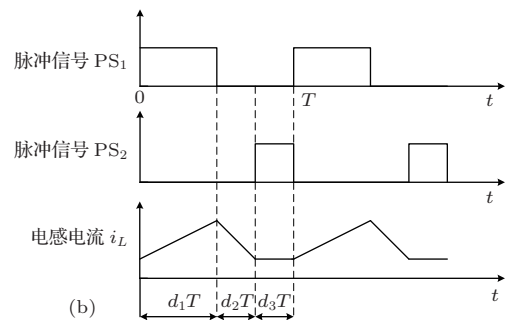
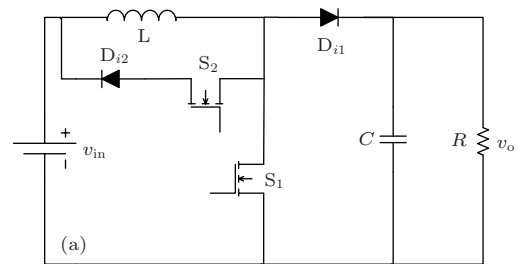


图 1 PCCM Boost 变换器 (a) 电路原理图; (b) 时序脉冲及电感电流波形图

3 PCCM Boost 变换器分数阶状态平均模型的建立与分析

3.1 PCCM Boost 变换器分数阶状态平均模型的建立

根据状态平均法、PCCM Boost 变换器三个工作模式的特点及分数阶微积分的性质^[15], 对(2), (3), (4)式在一个工作周期 T 内求平均, 可推导得到工作于电感电流伪连续模式下的状态平均模型为

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha \langle i_L \rangle}{dt^\alpha} &= \frac{\langle v_{in} \rangle}{L} (d_1 + d_2) - \frac{\langle v_o \rangle}{L} d_2, \\ \frac{d^\beta \langle v_o \rangle}{dt^\beta} &= \frac{\langle i_L \rangle}{C} d_2 - \frac{\langle v_o \rangle}{CR}, \end{aligned} \quad (5)$$

其中, $\langle v_{in} \rangle$, $\langle v_o \rangle$, $\langle i_L \rangle$ 分别为 v_{in} , v_o , i_L 在一个周期内的平均值, 令 V_{in} , V_o , I_L , D_1 , D_2 分别为 v_{in} , v_o , i_L , d_1 , d_2 的直流分量, \hat{v}_{in} , \hat{v}_o , \hat{i}_L , \hat{d}_1 , \hat{d}_2 分别为 v_{in} , v_o , i_L , d_1 , d_2 的交流分量. 因此, 可对 \hat{v}_{in} , \hat{v}_o , \hat{i}_L , \hat{d}_1 , \hat{d}_2 作如下分解:

$$\begin{aligned} \langle v_{in} \rangle &= V_{in} + \hat{v}_{in}, \\ \langle v_o \rangle &= V_o + \hat{v}_o, \\ \langle i_L \rangle &= I_L + \hat{i}_L, \\ d_1 &= D_1 + \hat{d}_1, \\ d_2 &= D_2 + \hat{d}_2, \end{aligned} \quad (6)$$

且

$$\begin{aligned} |\hat{v}_{in}| &\ll V_{in}, \\ |\hat{v}_o| &\ll V_o, \\ |\hat{i}_L| &\ll I_L, \\ |\hat{d}_1| &\ll D_1, \\ |\hat{d}_2| &\ll D_2. \end{aligned} \quad (7)$$

3.2 PCCM Boost 变换器分数阶状态平均模型的分析

将(6)式代入(5)式, 并忽略高阶小量, 即 $\hat{v}_{in}(\hat{d}_1 + \hat{d}_2) \approx 0$, $\hat{v}_o \hat{d}_2 \approx 0$, $\hat{i}_L \hat{d}_2 \approx 0$ 可得

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha (I_L + \hat{i}_L)}{dt^\alpha} &= \frac{V_{in}}{L} (D_1 + D_2) + \frac{V_{in}}{L} (\hat{d}_1 + \hat{d}_2) \\ &+ \frac{\hat{v}_{in}}{L} (D_1 + D_2) - \frac{V_o}{L} D_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &- \frac{\hat{v}_o}{L} D_2 - \frac{V_o}{L} \hat{d}_2, \\ \frac{d^\beta (V_o + \hat{v}_o)}{dt^\beta} &= \frac{I_L}{C} D_2 - \frac{V_o}{RC} + \frac{I_L}{C} \hat{d}_2 \\ &+ \frac{D_2}{C} \hat{i}_L - \frac{\hat{v}_o}{RC}. \end{aligned} \quad (8)$$

将(8)式中的直流分量分离出来, 可得

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha I_L}{dt^\alpha} &= \frac{V_{in}}{L} (D_1 + D_2) - \frac{V_o}{L} D_2, \\ \frac{d^\beta V_o}{dt^\beta} &= \frac{I_L}{C} D_2 - \frac{V_o}{CR}. \end{aligned} \quad (9)$$

根据 Caputo 分数阶导数定义可知^[15], 常数的任意分数阶导数等于零, 则由(9)式可得系统处于稳态时的工作点为

$$\begin{aligned} V_o &= \frac{D_1 + D_2}{D_2} V_{in}, \\ I_L &= \frac{V_o}{RD_2}. \end{aligned} \quad (10)$$

此外, 根据 Caputo 分数阶导数定义, 由(2)式可求得电感电流 i_L 在 $(0, d_1 T)$ 时间内的增加量, 即电感电流纹波 Δi_L 为

$$\Delta \langle i_L \rangle = \frac{\langle v_{in} \rangle (d_1 T)^\alpha}{L \alpha \Gamma(\alpha)}. \quad (11)$$

将(6)式代入(11)式且忽略高阶小量, 并将其直流分量分离后, 可得

$$\Delta i_L = \frac{V_{in} (D_1 T)^\alpha}{L \alpha \Gamma(\alpha)}, \quad (12)$$

其中, $\Gamma(\cdot)$ 为伽马函数^[15]. 可见, 电感电流纹波 Δi_L 不仅与电感 L 、输入电压直流分量 V_{in} 、占空比直流分量 D_1 以及开关周期 T 有关, 而且还与电感的阶数 α 有关, 并且与电感的阶数 α 成反比例关系. 与此同时, 当 $\alpha = 1$ 时, (12)式与用整数阶模型所求得的结果一致.

根据(10)式和(12)式可求得电感电流峰值 $i_{L-\max}$ 和谷值 $i_{L-\min}$ 的表达式分别为

$$i_{L-\max} = \frac{V_o}{RD_2} + \frac{V_{in} (D_1 T)^\alpha}{2L \alpha \Gamma(\alpha)}, \quad (13)$$

$$i_{L-\min} = \frac{V_o}{RD_2} - \frac{V_{in} (D_1 T)^\alpha}{2L \alpha \Gamma(\alpha)}. \quad (14)$$

由于 PCCM Boost 变换器独特的工作模式, 使其在工作模式 1 和工作模式 3 时, 输出电压 v_o 均处于下降过程, 因此可知输出电压纹波 Δv_o 为

$$\Delta v_o = \Delta v_1 + \Delta v_2, \quad (15)$$

其中, Δv_1 为处于工作模式 1 时的电压减少量, Δv_2 为处于工作模式 3 时的电压减少量.

同理, 根据(2)式和(4)式可求得输出电压 v_o 在 $(0, d_1T)$ 和 $((d_1 + d_2)T, T)$ 时间内的减少量, 即输出电压纹波 Δv_o 为

$$\Delta v_o = \left[1 - E_\beta \left(- \frac{(D_1T + D_3T)^\beta}{RC} \right) \right] V_{o-\max}, \quad (16)$$

其中, $E_\beta(\cdot)$ 为 Mittag-Leffle 函数^[15], $V_{o-\max}$ 为输出电压峰值, 其表达式为

$$V_{o-\max} = V_o + \frac{1}{2} \Delta v_o. \quad (17)$$

将(10)式和(16)式代入(17)式可得

$$V_{o-\max} = \frac{D_1 + D_2}{D_2} \times \frac{2V_{in}}{1 + E_\beta \left(- \frac{(D_1T + D_3T)^\beta}{RC} \right)}. \quad (18)$$

将(18)式代入(16)式可得电压输出纹波表达式为

$$\Delta v_o = 2V_{in} \frac{D_1 + D_2}{D_2} \times \frac{1 - E_\beta \left(- \frac{(D_1T + D_3T)^\beta}{RC} \right)}{1 + E_\beta \left(- \frac{(D_1T + D_3T)^\beta}{RC} \right)}. \quad (19)$$

根据电路模型和数学模型的电感电流 i_L 和输出电压 v_o , 可得所建数学模型的误差百分比为

$$bfb_i = \frac{|i_{Ld} - i_{Ls}|}{i_{Ld}}, \quad bfb_v = \frac{|v_{od} - v_{os}|}{v_{od}}, \quad (20)$$

其中, bfb_i 为电感电流模型误差百分比, bfb_v 为输出电压模型误差百分比, i_{Ld} 和 v_{od} 分别为电路模型的电感电流和输出电压, i_{Ls} 和 v_{os} 分别为数学模型的电感电流和输出电压.

可见, 输出电压纹波 Δv_o 不仅与电容 C 、输入电压直流分量 V_{in} 、占空比直流分量 D_1, D_2, D_3 、负载电阻 R 以及开关周期 T 有关, 而且还与电容的阶数 β 有关, 并且与电感的阶数 β 成反比例关系. 与此同时, 当 $\beta = 1$ 时, (19) 式与用整数阶模型所求的结果一致.

3.3 PCCM Boost 变换器分数阶传递函数的分析

将(8)式的交流分量分离出来, 可得

$$\frac{d^\alpha \hat{i}_L}{dt^\alpha} = \frac{V_{in}}{L} (\hat{d}_1 + \hat{d}_2) + \frac{\hat{v}_{in}}{L} (D_1 + D_2)$$

$$- \frac{\hat{v}_o}{L} D_2 - \frac{V_o}{L} \hat{d}_2, \quad \frac{d^\beta \hat{v}_o}{dt^\beta} = \frac{I_L}{C} \hat{d}_2 + \frac{D_2 \hat{i}_L}{C} - \frac{\hat{v}_o}{RC}. \quad (21)$$

因此, 由(21)式可求得输出电压 \hat{v}_o 对输入电压 \hat{v}_{in} 的传递函数 $G_{vv}(s)$ 为

$$G_{vv}(s) = \frac{\hat{v}_o(s)}{\hat{v}_{in}(s)} \Big|_{\hat{d}_1=\hat{d}_2=0} = \frac{D_2 + D_1}{D_2} \frac{1}{\frac{CL}{D_2^2} s^{\alpha+\beta} + \frac{L}{D_2^2 R} s^\alpha + 1}. \quad (22)$$

(22) 式表明当占空比 d_1, d_2 的扰动变量 $\hat{d}_1 = \hat{d}_2 = 0$ 时, 输入电压 v_{in} 的变化对输出电压 v_o 的影响.

输出电压 \hat{v}_o 对占空比 \hat{d}_1 的传递函数 $G_{vd1}(s)$, 即控制输出传递函数为

$$G_{vd1}(s) = \frac{\hat{v}_o(s)}{\hat{d}_1(s)} \Big|_{\hat{v}_{in}=\hat{d}_2=0} = \frac{V_{in}}{D_2} \frac{1}{\frac{CL}{D_2^2} s^{\alpha+\beta} + \frac{L}{D_2^2 R} s^\alpha + 1}. \quad (23)$$

(23) 式表明当输入电压 v_{in} 的扰动变量 $\hat{v}_{in} = 0$, 占空比 d_2 的扰动变量 $\hat{d}_2 = 0$ 时, 占空比 d_1 的变化对输出电压 v_o 的影响.

输出电压 \hat{v}_o 对占空比 \hat{d}_2 的传递函数 $G_{vd2}(s)$ 为

$$G_{vd2}(s) = \frac{\hat{v}_o(s)}{\hat{d}_2(s)} \Big|_{\hat{v}_{in}=\hat{d}_1=0} = \frac{L(D_1 + D_2)}{D_2^2 R} s^\alpha - \frac{D_1 V_{in}}{D_2^2} = \frac{CL}{D_2^2} s^{\alpha+\beta} + \frac{L}{D_2^2 R} s^\alpha + 1. \quad (24)$$

(24) 式表明当输入电压 v_{in} 的扰动变量 $\hat{v}_{in} = 0$, 占空比 d_1 的扰动变量 $\hat{d}_1 = 0$ 时, 占空比 d_2 的变化对输出电压 v_o 的影响.

输出电流 \hat{i}_L 对输入电压 \hat{v}_{in} 的传递函数 $G_{iv}(s)$ 为

$$G_{iv}(s) = \frac{\hat{i}_L(s)}{\hat{v}_{in}(s)} \Big|_{\hat{d}_1=\hat{d}_2=0} = \frac{(RCs^\beta + 1)(D_2 + D_1)}{RD_2^2} = \frac{CL}{D_2^2} s^{\alpha+\beta} + \frac{L}{D_2^2 R} s^\alpha + 1. \quad (25)$$

(25) 式表明当占空比 d_1, d_2 的扰动变量 $\hat{d}_1 = \hat{d}_2 = 0$ 时, 输入电压 v_{in} 的变化对电感电流 i_L 的影响.

输出电流 \hat{i}_L 对占空比 \hat{d}_1 的传递函数 $G_{id_1}(s)$ 为

$$G_{id_1}(s) = \frac{\hat{i}_L(s)}{\hat{d}_1(s)} \Big|_{\hat{v}_{in}=\hat{d}_2=0} = \frac{\frac{V_{in}}{RD_2^2}(RCs^\beta + 1)}{\frac{CL}{D_2^2}s^{\alpha+\beta} + \frac{L}{D_2^2R}s^\alpha + 1}. \quad (26)$$

(26) 式表明当输入电压 v_{in} 的扰动变量 $\hat{v}_{in} = 0$, 占空比 d_2 的扰动变量 $\hat{d}_2 = 0$ 时, 占空比 d_1 的变化对电感电流 i_L 的影响。

输出电流 \hat{i}_L 对占空比 \hat{d}_2 的传递函数 $G_{id_2}(s)$ 为

$$G_{id_2}(s) = \frac{\hat{i}_L(s)}{\hat{d}_2(s)} \Big|_{\hat{v}_{in}=\hat{d}_1=0} = -\frac{\frac{CD_1V_{in}}{D_2^3}s^\beta + \frac{(2D_1 + D_2)V_{in}}{RD_2^3}}{\frac{CL}{D_2^2}s^{\alpha+\beta} + \frac{L}{D_2^2R}s^\alpha + 1}. \quad (27)$$

(27) 式表明当输入电压 v_{in} 的扰动变量 $\hat{v}_{in} = 0$, 占空比 d_1 的扰动变量 $\hat{d}_1 = 0$ 时, 占空比 d_2 的变化对电感电流 i_L 的影响。

根据 (23) 式可知, 分数阶 PCCM Boost 变换器的控制输出传递函数不存在 RHP 问题. 当电感和电容的分数阶阶数 α, β 都等于 1 时, (22)—(27) 式所示的分数阶传递函数与文献 [14,16] 所描述的整数阶传递函数相一致, 进一步说明了整数阶系统是其分数阶系统的特例情况, 且在频域和时域响应中, α, β 这两个参数对 PCCM Boost 变换器系统的动力学特性也产生了极大的影响。

4 数值仿真

4.1 分数阶电感和电容的等效电路模型

根据文献 [17], 基于分抗链 [15] 和改进的 Oustaloup 滤波器的分数阶微积分算法 [18], 可以得到分数阶电感和分数阶电容的等效电路模型, 如图 2 和图 3 所示. 当 $L_\alpha = 3 \text{ mH}$, $\alpha = 0.8$ 时, 图 2 中各电阻值分别为 $R_{L1} = 7.16 \text{ k}\Omega$, $R_{L2} = 340.84 \Omega$, $R_{L3} = 34.25 \Omega$, $R_{L4} = 3.54 \Omega$, $R_{L5} = 367 \text{ m}\Omega$, $R_{L6} = 38 \text{ m}\Omega$, $R_{L7} = 4 \text{ m}\Omega$, $R_{L8} = 0.4 \text{ m}\Omega$, $R_{L9} = 42 \mu\Omega$, $R_{L10} = 5 \mu\Omega$; 各电感值分别为 $L_1 = 95 \mu\text{H}$, $L_2 = 77 \mu\text{H}$, $L_3 = 131.6 \mu\text{H}$, $L_4 = 231.6 \mu\text{H}$, $L_5 = 408 \mu\text{H}$, $L_6 = 719.4 \mu\text{H}$, $L_7 = 1.268 \text{ mH}$, $L_8 = 2.235 \text{ mH}$, $L_9 = 3.934 \text{ mH}$.

当 $C_\beta = 100 \mu\text{H}$, $\beta = 0.8$ 时, 图 3 中各电阻值分别为 $R_{C1} = 20 \text{ m}\Omega$, $R_{C2} = 160 \text{ m}\Omega$, $R_{C3} = 1.5 \Omega$, $R_{C4} = 14.6 \Omega$, $R_{C5} = 141 \Omega$, $R_{C6} = 1.36 \text{ k}\Omega$, $R_{C7} = 13.131 \text{ k}\Omega$, $R_{C8} = 126.742 \text{ k}\Omega$, $R_{C9} = 1.222 \text{ M}\Omega$, $R_{C10} = 102.85 \text{ M}\Omega$; 各电容值分别为 $C_1 = 6.5 \mu\text{F}$, $C_2 = 13.98 \mu\text{F}$, $C_3 = 24.5 \mu\text{F}$, $C_4 = 43.2 \mu\text{F}$, $C_5 = 76.2 \mu\text{F}$, $C_6 = 134.2 \mu\text{F}$, $C_7 = 236.6 \mu\text{F}$, $C_8 = 417 \mu\text{F}$, $C_9 = 736 \mu\text{F}$, $C_{10} = 560 \mu\text{F}$.

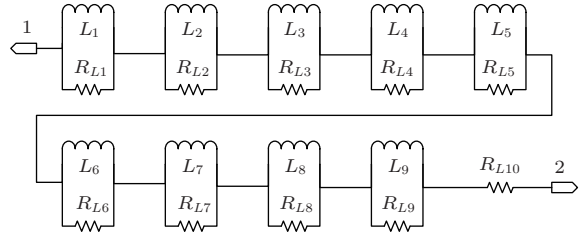


图 2 分数阶电感等效电路模型

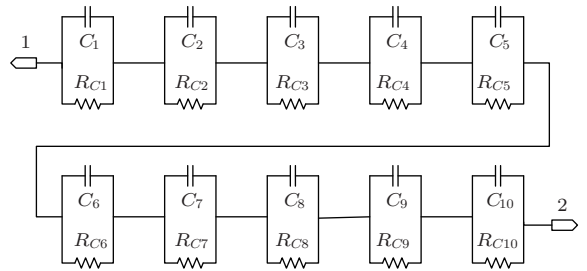


图 3 分数阶电容等效电路模型

4.2 分数阶 PCCM Boost 变换器的状态平均模型与电路模型的仿真对比

文献 [11] 和文献 [12] 虽然分别建立了分数阶 CCM Boost 变换器的数学模型和分数阶 DCM Boost 变换器的数学模型, 并进行了仿真, 但由于 PCCM Boost 变换器独特的工作模式, 使得文献 [11] 和文献 [12] 所建立的仿真数学模型并不能适用于 PCCM Boost 变换器的数学模型仿真. 因此, 必须根据 PCCM Boost 变换器自身的特点, 并根据文献 [18] 所提出的改进的 Oustaloup 滤波器的分数阶微积分算法和 (5) 式重新构建 Matlab/Simulink 数学模型, 如图 4 所示. 其中, Fractional Ints^{-α} 为分数阶积分单元, 其内部结构如文献 [11] 所示. 在改进的 Oustaloup 滤波器的分数阶微积分算法中, 存在三个关键参数: 拟合频率下限 ω_b 、拟合频率上限 ω_h 、滤波器阶数 $2N + 1$. 而在对实际分数阶系统进行数值仿真时, 需根据系统的频率范围选择拟合

频率段 (ω_b, ω_h) 和 N 值, 一般取 $\omega_b \cdot \omega_h = 1$. 选取电路参数为 $v_{in} = 24 \text{ V}$, $L = 3 \text{ mH}$, $C = 100 \text{ }\mu\text{F}$, $d_1 = 0.4$, $d_2 = 0.2$, $f = 50 \text{ kHz}$. 由于开关频率 $f = 50 \text{ kHz}$, 即 $\omega = 2\pi f = 3.14 \times 10^5 \text{ rad/s}$, 考虑还有高于开关频率的高频谐波存在, 因而拟合频率的选取需满足条件 $\omega_h > 3.14 \times 10^5 \text{ rad/s}$. 因此, 选取 $\omega_h = 1 \times 10^6 \text{ rad/s}$, $\omega_b = 1 \times 10^{-6} \text{ rad/s}$, $N = 10$. 根据分数阶电感和电容的等效电路模型所建立的电路仿真模型, 如图 5 所示.

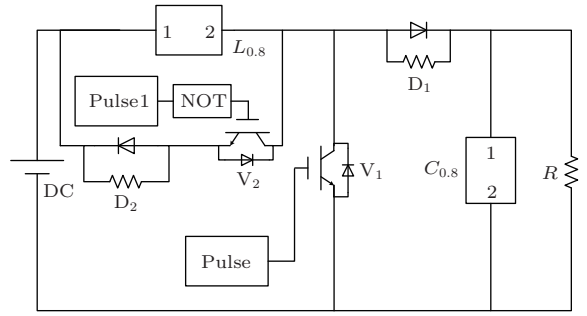


图5 分数阶 PCCM Boost 变换器 Simulink 电路仿真模型

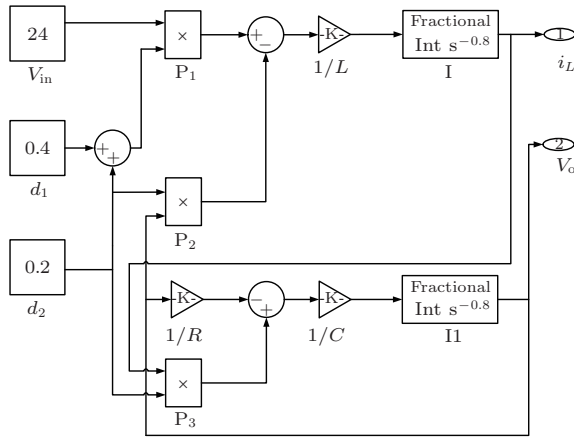


图4 分数阶 PCCM Boost 变换器 Simulink 数学仿真模型

当取 $\alpha=0.8$, $\beta=0.8$ 时, 根据文献 [11], 可求得分数阶 Boost 变换器工作于临界状态时的负载电阻值为 $R = 1671.687 \text{ }\Omega$, 则当 $R < 1671.687 \text{ }\Omega$ 时, 可保证系统工作于伪连续模式. 因此, 选取 $R = 50 \text{ }\Omega$. 当 PCCM Boost 变换器处于稳定运行状态时, 其电路模型的电感电流 i_L 和输出电压 v_o 的波形分别如图 6 (a) 和 (b) 所示. 显然, 此种情况下 Boost 变换器工作于电感电流伪连续模式. 对其电路模型的电感电流 i_L 和输出电压 v_o 在一个开关周期 T 内进行平均, 并与其数学模型的电感电流 i_L 和输出电压 v_o 进行比较, 如图 7 (a) 和 (b) 所示. 由图 7 结果可知, 对 PCCM Boost 变换器所建的分数阶数学模型

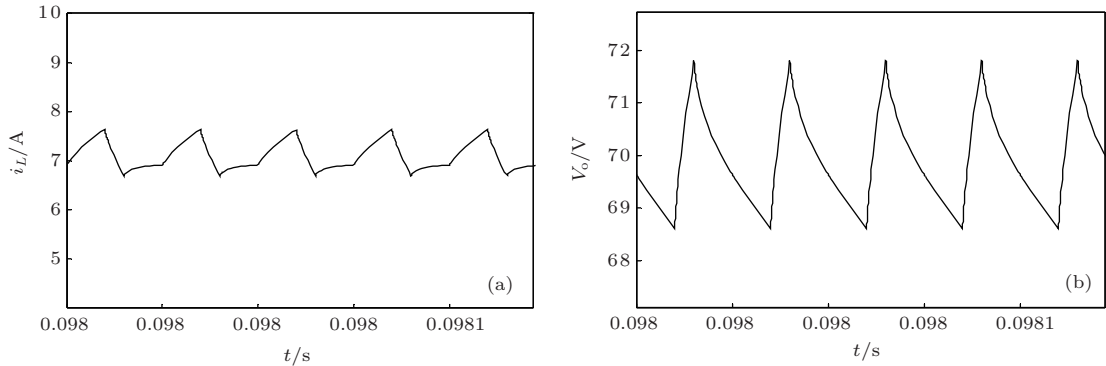


图6 分数阶 PCCM Boost 变换器电路模型仿真波形 (a) 电感电流 i_L ; (b) 输出电压 v_o .

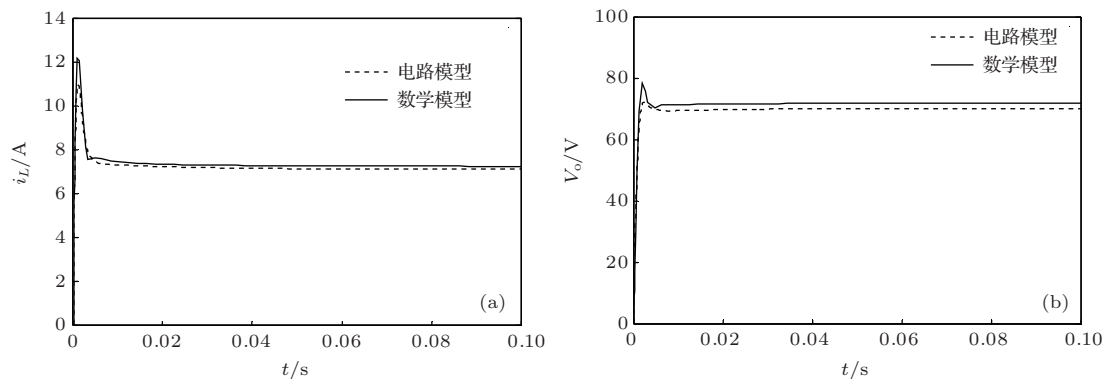


图7 分数阶 PCCM Boost 变换器电路模型与数学模型仿真波形比较 (a) 电感电流 i_L ; (b) 输出电压 v_o .

是正确的. 根据图 6(a) 可测量出 $\Delta i_L = 0.842$ A, $i_{L-\min} = 6.800$ A, $i_{L-\max} = 7.642$ A, $I_L = 7.211$ A. 根据图 6(b) 可测量出 $\Delta v_o = 3.200$ V, $v_{o-\min} = 68.610$ V, $v_{o-\max} = 71.810$ V, $V_o = 70.210$ V. 根据 (10) 式、(12) 式、(13) 式和 (14) 式可分别计算出 $\Delta i_L = 0.720$ A, $i_{L-\min} = 6.840$ A, $i_{L-\max} = 7.560$ A, $I_L = 7.200$ A; 根据 (10) 式、(18) 式和 (19) 式可分别计算出 $\Delta v_o = 2.288$ V, $v_{o-\min} = 70.856$ V, $v_{o-\max} = 73.144$ V, $V_o = 72.000$ V. 可知, 对数学模型的理论分析和电路模型的仿真结果基本一致, 从而表明对工作于伪连续模式下 Boost 变换器理论分析的正确性.

4.3 整数阶 PCCM Boost 变换器状态平均模型与电路模型的仿真对比

当把图 4 中的分数阶积分单元换为整数阶积分单元时, 即采用了整数阶数学模型来描述 PCCM Boost 变换器, 则其整数阶 Matlab/Simulink 数学仿真模型如图 8 所示; 当用整数阶电感和电容取代图 5 中的分数阶电感和电容时, 则其整数阶电路模型如图 9 所示, 其电路模型的电感电流 i_L 和输出电

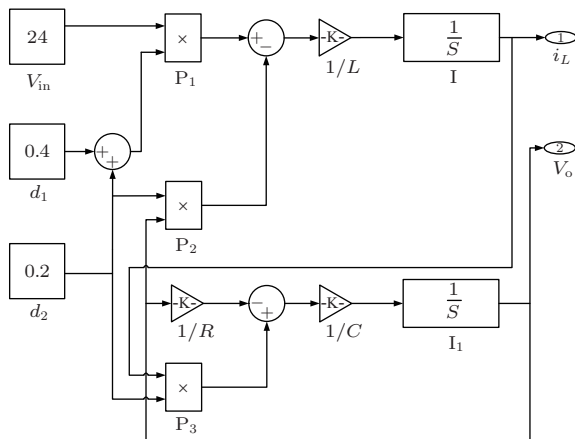


图 8 整数阶 PCCM Boost 变换器 Simulink 数学仿真模型

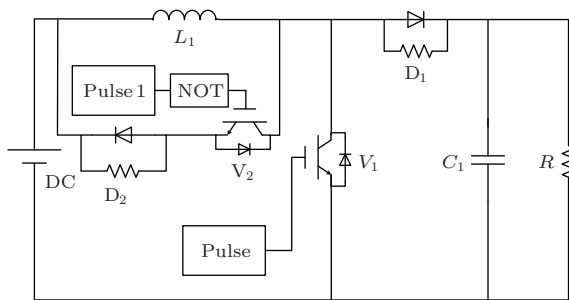


图 9 整数阶 PCCM Boost 变换器 Simulink 电路仿真模型

压 v_o 的波形分别如图 10(a) 和 (b) 所示. 可见, 系统工作于电感电流伪连续模式. 对其电路模型的电感电流 i_L 和输出电压 v_o 在一个开关周期 T 内进行平均, 并和其数学模型的电感电流 i_L 和输出电压 v_o 进行比较, 如图 11(a) 和 (b) 所示. 根据图 10(a) 可测量出 $\Delta i_L = 0.063$ A, $i_{L-\min} = 7.092$ A, $i_{L-\max} = 7.155$ A, $I_L = 7.124$ A; 根据图 10(b) 可测量出 $\Delta v_o = 0.230$ V, $v_{o-\min} = 70.042$ V, $v_{o-\max} = 70.650$ V, $V_o = 70.540$ V. 根据 (10) 式、(12) 式、(13) 式和 (14) 式可分别计算出 $\Delta i_L = 0.064$ A, $i_{L-\min} = 7.168$ A, $i_{L-\max} = 7.232$ A, $I_L = 7.200$ A; 根据 (10) 式、(18) 式和 (19) 式可分别计算出 $\Delta v_o = 0.240$ V, $v_{o-\min} = 71.880$ V, $v_{o-\max} = 72.120$ V, $V_o = 72.000$ V.

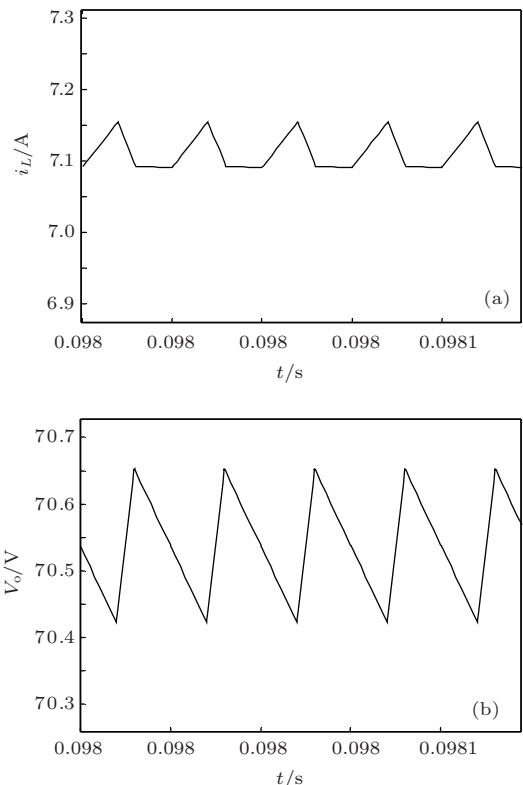


图 10 整数阶 PCCM Boost 变换器电路模型仿真波形 (a) 电感电流 i_L ; (b) 输出电压 v_o

对比整数阶 $\alpha = 1, \beta = 1$ 和分数阶 $\alpha = 0.8, \beta = 0.8$ PCCM Boost 变换器的数值仿真结果, 可知电感电流直流分量 I_L 和输出电压直流分量 V_o 没有发生变化; 而电感电流纹波 Δi_L 、电感电流峰值 $i_{L-\max}$ 和谷值 $i_{L-\min}$ 、输出电压纹波 Δv_o 、输出电压的峰值 $v_{o-\max}$ 和谷值 $v_{o-\min}$ 以及动态响应过程中的上升时间、延迟时间、调节时间、峰值时间、超调量都发生了很大的变化. 这就表明用整数阶模

型描述本应该用分数阶模型描述的PCCM Boost变换器, 将会在电感电流纹波 Δi_L 、电感电流峰值 $i_{L-\max}$ 和谷值 $i_{L-\min}$ 、输出电压纹波 Δv_o 、输出电压的峰值 $v_{o-\max}$ 和谷值 $v_{o-\min}$ 以及动态响应过程中的上升时间、延迟时间、调节时间、峰值时间、

超调量等方面得到错误的结果. 因此, 基于实际电感和电容本质上都是分数阶的事实, 为了能够更好的描述工作于电感电流伪连续模式下Boost变换器的动力学特性, 须采用其分数阶形式的数学模型.

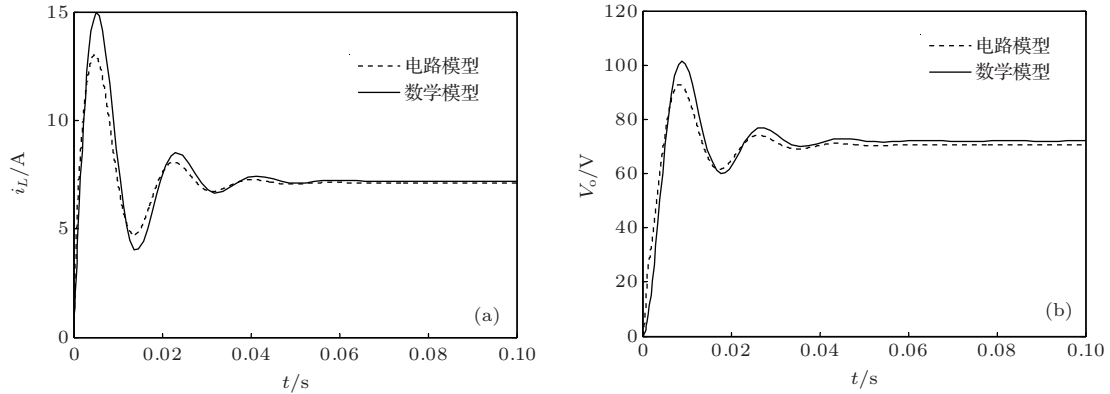


图 11 整数阶 PCCM Boost 变换器电路模型与数学模型仿真波形比较 (a) 电感电流 i_L ; (b) 输出电压 v_o

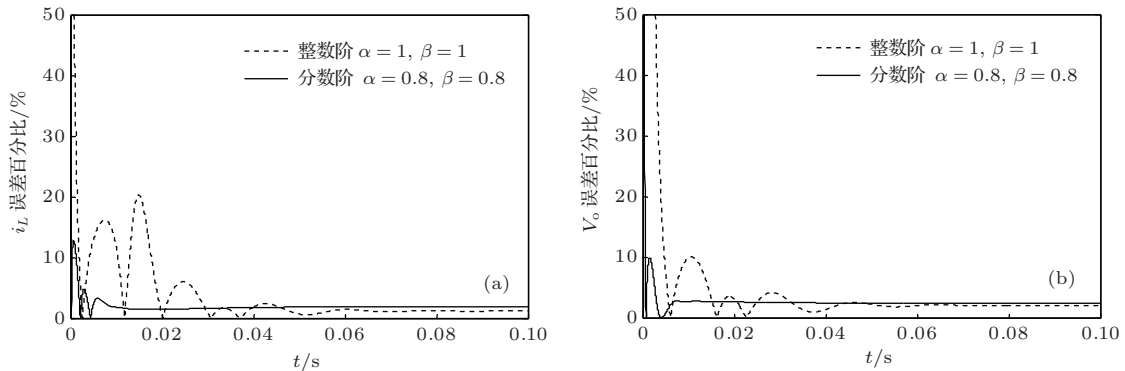


图 12 模型误差百分比 (a) 电感电流 i_L ; (b) 输出电压 v_o

4.4 模型误差分析

根据(20)式可得模型误差百分比曲线, 如图12所示. 由文献[19]可知, 状态空间平均法仅是平均法的一阶近似, 所建的状态空间模型仅能近似的表示电路模型. 因此, 图12所示的模型误差百分比是合理的, 所建立的PCCM Boost变换器的分数阶数学模型是正确的. 根据图12可知, 模型误差与电感阶数 α 和电容阶数 β 有关. 因此, 须采用分数阶数学模型来描述PCCM Boost变换器的动力学特性.

5 结 论

本文基于分数阶微积分理论, 建立了PCCM Boost变换器的分数阶数学模型并进行了相应的理

论分析; 通过对其数学模型和电路模型的仿真对比, 可得出如下结论

1) 所建的PCCM Boost变换器的分数阶数学模型可以准确的描述其电路模型.

2) 对于分数阶PCCM Boost变换器, 所建分数阶数学模型的误差是由于状态平均法只是平均法的近似而产生的, 且其模型误差百分比与电感 L 的分数阶阶数 α 和电容 C 的分数阶阶数 β 有关, 即在其他参数不变的情况下, 随着电感 L 的分数阶阶数 α 和电容 C 的分数阶阶数 β 的增大而减小.

3) 分数阶PCCM Boost变换器的数学模型形式上虽然和分数阶DCM Boost变换器一样, 但由于PCCM Boost变换器不同于DCM Boost变换器的工作特点, 使得DCM Boost变换器分数阶模型得出的结论并不能直接应用于PCCM Boost变换

器的分数阶模型理论分析.

4) 分数阶 PCCM Boost 变换器的数学模型形式上虽然和分数阶 CCM Boost 变换器不一样, 但通过理论分析及仿真验证, 可知 CCM Boost 变换器分数阶模型得出的结论能够直接应用于 PCCM Boost 变换器的分数阶模型理论分析.

5) 对于分数阶 PCCM Boost 变换器, 在其他参数不变的情况下, 其动态响应过程随着电感 L 的分数阶阶数 α 和电容 C 的分数阶阶数 β 的增大而增大, 即其阶跃响应的上升时间、延迟时间、调节时间、峰值时间、超调量都将增大.

综上所述, 基于电感和电容本质上是分数阶的事实, 本文所建的 PCCM Boost 变换器的分数阶数学模型是正确的, 能够真实的反映 PCCM Boost 变换器的动力学特性.

参考文献

- [1] Yang S P, Zhang R X 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6837 (in Chinese)[杨世平, 张若洵 2008 物理学报 **57** 6837]
- [2] Zhang C F, Gao J F, Xu L 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5124 (in Chinese)[张成芬, 高金峰, 徐磊 2007 物理学报 **56** 5124]
- [3] Li C L, Yu S M, Luo X S 2012 *Chin. Phys. B* **21** 172
- [4] Kenneth S M, Bertram R 1993 *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations* (New Jersey: John Wiley & Sons) p21
- [5] Shockooh A, Suarez L 1999 *Journal of Vibration and Control*. **5** 331
- [6] Bohannan G W 2002 *Proceedings of the 41st IEEE International Conference on Decision and Control, Tutorial Workshop 2: Fractional Calculus Applications in Automatic Control and Robotics* Las Vegas, USA, December 10–13, 2002 p1
- [7] Westerlund S, Ekstam L 1994 *IEEE Trans. Dielectr. Electr. Insulat.* **1** 826
- [8] Westerlund S 2002 *Dead matter has memory* (Kalmar, Sweden: Causal Consulting)chapt. 7
- [9] Ahmad W 2003 *Proceedings of the 2003 International Symposium on Circuits and Systems Bangkok, Thailand, May 25–28, 2003* **3** p5
- [10] Martinez R, Bolea Y, Grau A, Martinez H 2009 *IEEE Conference on Emerging Technologies & Factory Automation* Palma de Mallorca, Spain, September 22–25, 2009 p1
- [11] Wang F Q, Ma X K 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 070506 (in Chinese)[王发强, 马西奎 2011 物理学报 **60** 070506]
- [12] Wang F Q, Ma X K 2013 *Scientia Sinica Technological.* **43** 368 (in Chinese)[王发强, 马西奎 2013 中国科学: **43** 368]
- [13] Ma D S, Ki W H 2007 *IEEE Trans. Circuit and Systems II: Express Briefs.* **54** 825
- [14] Kanakasabai V, Ramesh O, Dipti S 2002 *IEEE Trans. Power Electronics.* **17** 677
- [15] Podlubny I 1999 *Fractional differential equations* (New York: Academic Press) chapt 1–2,4
- [16] Yu H K 2010 *M. S. Thesis.* (Sichuan: Southeast Jiaotong University) (in Chinese) [于海坤 2010 硕士学位论文 (四川: 西南交通大学)]
- [17] Wang F Q, Ma X K 2013 *Chin. Phys. B* **22** 236
- [18] Xue D Y, Chen Y Q 2007 *MATLAB Solutions to Mathematical Problems in Control* (Beijing: Tsinghua University Press) p435 (in Chinese) [薛定宇, 陈阳泉 2007 控制数学问题的 MATLAB 求解 (北京: 清华大学出版社) 第 435 页]
- [19] Cao W S, Yang Y X 2007 *Journal of System Simulation.* **19** 1329 (in Chinese) [曹文思, 杨育霞 2007 系统仿真学报 **19** 1329]

Modeling and simulation analysis of fractional-order Boost converter in pseudo-continuous conduction mode*

Tan Cheng Liang Zhi-Shan[†]

(College of Geophysics and Information Engineering, China University of Petroleum (Beijing), Beijing 102249, China)

(Received 18 September 2013; revised manuscript received 23 December 2013)

Abstract

Based on the fact that the inductor and the capacitor are fractional in nature, the fractional order mathematical model of the Boost converter in pseudo-continuous conduction mode is established by using fractional order calculus theory. According to the state average modeling method, the fractional order state average model of Boost converter in pseudo-continuous conduction mode is built. In view of the mathematical model, the inductor current and the output voltage are analyzed and the transfer functions are derived. Then the differences between the integer order and the fractional order mathematical models are analyzed. On the basis of the improved Oustaloup fractional order calculus for filter approximation algorithm and the model of fractional order inductance and capacitance, the simulation results have been compared between the mathematical model and circuit model with Matlab/Simulink software; the origins of model error are analyzed and the correctness of the modeling in fractional order and the theoretical analysis is verified. Finally, the differences and the relations of Boost converter among the continuous conduction mode, the discontinuous conduction mode, and the pseudo-continuous conduction mode are indicated.

Keywords: fractional order, Boost converter, pseudo continuous conduction mode(tri-state mode), numerical simulation

PACS: 05.45.-a, 45.10.Hj, 84.30.Jc

DOI: [10.7498/aps.63.070502](https://doi.org/10.7498/aps.63.070502)

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 51071176), and the China University of Petroleum(Beijing) Frontier Foundation (Grant No. 2010QZ03).

[†] Corresponding author. E-mail: lzs1960@cup.edu.cn