基于时滞耦合映像格子的多耦合边耦合网络级联抗毁性研究*

彭兴钊[1)†] 姚宏[2)] 杜军[1)] 丁超[1)] 张志浩[2)]

1) (空军工程大学航空航天工程学院, 西安 710038)

2) (空军工程大学理学院, 西安 710051)

(2013 年 11 月 14 日收到; 2013 年 12 月 13 日收到修改稿)

现实中各网络之间的耦合促进了网络间的交流, 但也带来了级联故障大范围传播的风险. 考虑到故障的传播一般存在时滞, 并且一个节点可能拥有不止一条耦合边的情况, 本文构建了基于时滞耦合映像格子的多耦合边无标度耦合网络级联故障模型. 研究表明, 对于 BA(Barabási-Albert) 无标度耦合网络, 存在一个阈值 $h_T \approx 3$, 当耦合强度小于此阈值时, 耦合越强抗毁性越弱; 反之, 耦合越强抗毁性反而越强. 另外, 研究发现时滞对耦合网络的影响不仅仅是延长了故障传播的时间, 为采取防护措施争取了时间, 而且也对最终故障规模产生了影响, 具体地, 当层内时滞 τ_1 和层间时滞 τ_2 可取任意值时, 当两者成整数倍关系时其最终故障规模将更大. 本文的研究可为构建高抗毁性的耦合网络或提高耦合网络的级联抗毁性提供参考.

关键词: 耦合网络, 耦合映像格子, 耦合强度, 时滞

PACS: 89.75.Fb, 89.75.Hc, 05.45.Ra **DOI:** 10.7498/aps.63.078901

1 引 言

现实网络中小世界效应 [1] 和无标度特性 [2] 的发现引发了研究复杂网络的热潮, 其内容可归纳为两个领域: 一是对复杂网络结构的研究; 二是对复杂网络中的动力学过程的研究 [3]. 在现实中广泛存在的级联故障就是一种典型的动力学过程, 它描述的是当网络中部分节点或边故障时, 由于级联效应使故障在网络中大范围传播, 最终导致大部分网络甚至整个网络瘫痪的情形 [4], 需要指出这里的故障包括电力网中发电站过载、交通网中路口拥堵、WWW 网中网页链接失效等等. 与人们生产生活密切相关的基础设施网络, 如供水网、通信网、Internet 网、交通网、电力网等, 都存在发生级联故障的可能, 而级联故障一旦发生, 危害将是巨大的, 例如电力网络中一个发电站过载有可能引发更多发电站过载, 从而造成大面积的电网瘫痪, 2003 年发生的北美大停电事故就是级联故障的一个典型案例, 这次停电事故造成的经济损失多达 300 亿美元以上 [5].

由于巨大的现实需求, 自从复杂网络诞生以来, 级联故障便在复杂网络框架下进行了广泛而深入的研究, 涉及到级联故障的建模 [6—9]、攻击手段对级联效应的影响 [6,10]、级联故障的控制与防护 [11—14] 等等, 这些工作大多是在孤立网络框架下完成的. 但是现实世界中的网络并不是完全孤立的, 而是根据一定的功能或逻辑关系耦合在一起 (本文称之为耦合网络), 例如电力网可为计算机网络提供运行所需的电力, 而电力网的发电又需要计算机网络的控制, 这是一种逻辑依赖关系; 火力电网、水力电网、核电网等耦合在一起组成了电力网, 铁路网、公路网、航空网、海运网等构成了交通网, 这是一种功能互联关系. 因而在耦合网络的框架下研究级联故障更具现实意义. 文献 [15—19] 较早地对耦合网络中的级联故障进行了研究, 它们都

* 陕西省自然科学基金 (批准号: 2012JM8035) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: pxz0311@163.com

假设当一层网络节点失效时, 另一层与之耦合的节点也相应失效, 由于假设耦合网络中的最大连通图才能正常发挥作用, 因此孤立节点也被认为是故障的, 初始删除部分节点, 依此原理找出最大的耦合连通片, 因此这是一种拓扑结构的级联故障, 没有考虑节点负荷或节点状态的影响. 文献[20—22]对耦合网络中存在负荷时的级联故障进行了研究, 这些模型的共同特点是网络中存在负荷并可以在网络中根据一定规则进行流动, 负荷超载的节点被认为故障, 这是一种在现实世界中更为广泛的级联故障. 耦合映像格子(coupled map lattices, CML)是一种研究节点状态随时间和空间共同变化的时空动力学的模型, 其特点是具有离散的时间变量和空间变量, 而状态变量保持连续. 如果把网络中的节点看做一个具有时空动力学行为的系统, 那么通过节点自身状态的变化以及节点之间的相互作用, 就可以用CML模型对复杂网络的动力学行为进行研究. 基于这种思想, Wang和Xu[8,23] 利用CML模型对全局耦合网络、小世界网络和无标度网络中的级联故障进行了研究, Cui等[24,25]研究了具有社团结构复杂网络中的级联效应.

现有对耦合网络级联抗毁性研究大都假设网络中节点至多有一条耦合边, 只有文献[16]研究了多耦合边的情形, 但文献[16]研究的是前面提到的拓扑结构级联故障, 未考虑节点的负荷或状态. CML是一种基于节点状态时空变化的模型, 据作者所知, 目前采用CML模型研究网络的级联效应都是在孤立网络框架下进行的, 并且都未考虑故障传播时滞的因素. 基于以上问题, 本文基于CML模型研究多耦合边耦合网络中的级联故障, 主要研究攻击策略、耦合强度和时滞对耦合网络中级联故障的影响.

2 多耦合边耦合网络CML级联故障模型

2.1 多耦合边无标度耦合网络模型

构建的耦合网络模型如图1所示, 它由子网络A和子网络B组成, 子网络A和子网络B中的边称为内部边, 连接子网络A和子网络B的边称为耦合边. 子网络A和子网络B的规模分别为N_{A}和N_{B}. 设子网络A和子网络B之间耦合边的数目为M, 则子网络A和子网络B中每个节点平均拥有的耦合边数目h_{A}和h_{B}分别为M/N_{A}和M/N_{B}. 因此对于每个节点来说, 其所拥有的边数由两部分组成, 即内部边和耦合边, 相应地, 把一个节点的度分为内度和外度, 内度表示一个节点拥有内部边的数目, 用k_{I}表示; 外度表示一个节点拥有耦合边的数目, 用k_{O}表示, 这里我们不再限制每个节点至多有一个耦合边, 因此对于每个节点的外度其取值为$[0, M]$之间的任意整数而不是$\{0, 1\}$. 一个节点的度表示为$k_{\mathrm{T}} = k_{\mathrm{I}} + k_{\mathrm{O}}$.

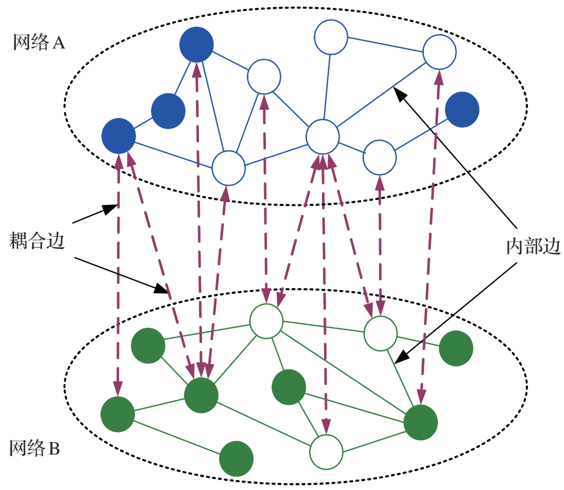

图1 双层相互连接网络模型及级联故障传播示意图

实证研究发现, 现实中绝大部分网络的节点度服从幂律分布[2,4], 即$P(k) \propto k^{-\gamma}$, 这里γ是一个正数, 称为幂律指数, 度分布服从幂律分布的网络称为无标度网络. 我们采用经典的BA(Barabási-Albert)无标度网络模型来生成子网络A和子网络B, BA无标度模型采用增长和优先连接两种机理生成[2]. 为了简化模型, 假设子网络A和子网络B的规模相同, 即$N_{\mathrm{A}} = N_{\mathrm{B}} = N/2$, N为耦合网络总规模, 基于以上假设, 可得到

$$h_c = h_{\mathrm{A}} = h_{\mathrm{B}} = \langle k_{\mathrm{O}} \rangle = 2\sum_{i=1}^{N/2} k_{\mathrm{O}}(i)/N, \tag{1}$$

h_c表示随机选择一个节点所拥有耦合边数目的期望, 因此可用h_c表征耦合网络的子网络之间的耦合强度, h_c越大, 子网络之间的耦合越强.

2.2 基于时滞CML的耦合网络级联故障模型

下面建立基于时滞CML的耦合网络级联故障模型. 对于子网络A, 有

$$x_i(t+1) = \Big|(1 - \xi_{\mathrm{A}} - \xi_{\mathrm{AB}}) f(x_i(t))$$

$$+\xi_{\mathrm{A}}\sum_{j=1,j\neq i}^{N_{\mathrm{A}}}a_{i,j}f(x_j(t-\tau_{\mathrm{A}}))/k_{\mathrm{I}}(i)$$
$$+\xi_{\mathrm{AB}}\sum_{k=1}^{N_{\mathrm{B}}}c_{ik}f(y_k(t-\tau_{\mathrm{AB}}))/k_{\mathrm{O}}(i)\Big|,$$
$$i=1,2,\cdots,N_{\mathrm{A}}. \tag{2}$$

对于子网络B, 有

$$\begin{aligned}y_n(t+1)=&\Big|(1-\xi_{\mathrm{B}}-\xi_{\mathrm{BA}})f(y_n(t))\\&+\xi_{\mathrm{B}}\sum_{k=1,k\neq n}^{N_{\mathrm{B}}}b_{n,k}f(y_k(t-\tau_{\mathrm{B}}))/k_{\mathrm{I}}(n)\\&+\xi_{\mathrm{BA}}\sum_{j=1}^{N_{\mathrm{A}}}c_{nj}f(x_j(t-\tau_{\mathrm{BA}}))/k_{\mathrm{O}}(n)\Big|,\\&n=1,2,\cdots,N_{\mathrm{B}}.\end{aligned} \tag{3}$$

其中, $x_i(t)$, $y_n(t)$分别表示子网络A的第i个节点和子网络B的第n个节点在t时刻的状态. $a_{i,j}$和$b_{n,k}$分别为子网络A和子网络B的邻接矩阵, 在子网络A中, 如果节点i和节点j有边相连, 则$a_{i,j}=1$, 否则$a_{i,j}=0$; 同理, 在子网络B中, 如果节点n和节点k有边相连, 则$b_{n,k}=1$, 否则$b_{n,k}=0$. $k_{\mathrm{I}}(i)$和$k_{\mathrm{O}}(i)$分别表示子网络A中节点i的内度和外度, $k_{\mathrm{I}}(n)$和$k_{\mathrm{O}}(n)$表示子网络B中节点n的内度和外度. ξ_{A}, ξ_{B}分别为子网络A和子网络B中的内部节点之间的状态耦合强度, ξ_{AB}和ξ_{BA}为子网络A和子网络B的耦合节点之间的状态耦合强度. τ_{A}, τ_{B}, τ_{AB}和τ_{BA}为节点之间通过状态耦合的时滞, τ_{A}和τ_{B}称为层内时滞, τ_{AB}和τ_{BA}称为层间时滞. 本文规定有$\xi_{\mathrm{A}}=\xi_{\mathrm{B}}=\xi_1$, $\xi_{\mathrm{AB}}=\xi_{\mathrm{BA}}=\xi_2$, $\tau_{\mathrm{A}}=\tau_{\mathrm{B}}=\tau_1$, $\tau_{\mathrm{AB}}=\tau_{\mathrm{BA}}=\tau_2$. 那么(2)式、(3)式重写如下:

$$\begin{aligned}x_i(t+1)=&\Big|(1-\xi_1-\xi_2)f(x_i(t))\\&+\xi_1\sum_{j=1,j\neq i}^{N_{\mathrm{A}}}a_{i,j}f(x_j(t-\tau_1))/k_{\mathrm{I}}(i)\\&+\xi_2\sum_{k=1}^{N_{\mathrm{B}}}c_{ik}f(y_k(t-\tau_2))/k_{\mathrm{O}}(i)\Big|,\\&i=1,2,\cdots,N_{\mathrm{A}},\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}y_n(t+1)=&\Big|(1-\xi_1-\xi_2)f(y_n(t))\\&+\xi_1\sum_{k=1,k\neq n}^{N_{\mathrm{B}}}b_{n,k}f(y_k(t-\tau_1))/k_{\mathrm{I}}(n)\\&+\xi_2\sum_{j=1}^{N_{\mathrm{A}}}c_{nj}f(x_j(t-\tau_2))/k_{\mathrm{O}}(n)\Big|,\\&n=1,2,\cdots,N_{\mathrm{B}}.\end{aligned} \tag{5}$$

这里, 非线性函数f表征节点自身的动态行为, 本文选择Logistic映射: $f(x)=\lambda x(1-x)$, $\lambda\leqslant 4$. 绝对值符号保证各节点状态非负. 本文取$\lambda=4$, 此时各节点状态是混沌的.

初始时, 各节点状态在(0, 1)之间, 很显然如果没有节点状态异常, 那么节点状态将永远保持在(0, 1)之间. 为了研究由于单个节点故障引发的级联效应, 在s时刻向子网络A中某个节点c施加一个外部扰动$R\geqslant 1$, 如下式所示:

$$\begin{aligned}&x_c(s)\\&=\Big|(1-\xi_1-\xi_2)f(x_c(s-1))\\&\quad+\xi_1\sum_{j=1,j\neq c}^{N_{\mathrm{A}}}a_{c,j}f(x_j(s-1-\tau_1))/k_{\mathrm{I}}(c)\\&\quad+\xi_2\sum_{k=1}^{N_{\mathrm{B}}}c_{ck}f(y_k(s-1-\tau_2))/k_{\mathrm{O}}(c)\Big|+R.\end{aligned} \tag{6}$$

在这种情况下, 节点c在s时刻, 其状态$x_c(s)>1$, 那么称节点c在s时刻发生故障, 节点以后的任意时刻状态恒为0, 即$x_c(t)\equiv 0$, $t>s$. 在第$s+1$时刻, 在子网络A和子网络B中与节点c直接相邻的节点都将受到s时刻c节点的状态$x_c(s)$的影响, 如图1所示. 此时子网络A和子网络B中的节点状态仍按(4)和(5)式演化, 如果某节点状态值大于1, 则此节点故障, 如此循环, 故障在网络中扩散, 直到没有节点故障或整个网络都发生故障为止. 子网络A和子网络B中的级联故障最终规模用I_{A}和I_{B}表示, 采用归一化后的指标$S_{\mathrm{A}}=\dfrac{2I_{\mathrm{A}}}{N}$, $S_{\mathrm{B}}=\dfrac{2I_{\mathrm{B}}}{N}$和$S=\dfrac{I_{\mathrm{A}}+I_{\mathrm{B}}}{N}$表征级联故障对子网络A、子网络B以及整个耦合网络的故障程度.

3 基于时滞CML的多耦合边耦合网络的级联抗毁性分析

3.1 不同攻击策略下耦合网络的级联抗毁性

为了触发网络中的级联故障, 我们只攻击子网络A中的一个节点. 当某节点受到攻击时, 相当于该节点受到一个幅值为R的扰动, R表示扰动的强弱. 一般而言, 有两种攻击策略[6,8,26]: 一种是随机攻击, 即随机选取一个节点进行攻击; 另一种是蓄意攻击, 即攻击网络中关键节点, 这里面存在如何定义关键节点的问题, 由于是攻击子网络A中的一

个节点, 本文考虑两种蓄意攻击策略, 即攻击子网络A中内度最大节点或攻击子网络A中总度(内度和外度之和)最大节点. 下面研究在这三种攻击策略下耦合网络的抗毁性.

不考虑网络时滞, 设定 $\xi_1 = 0.5$, $\xi_2 = 0.2$, $N = 1000$, $m_0 = m = 3$, $h_c = 2$. 根据所述三种攻击策略, 得到的 S-R 曲线如图2 所示.

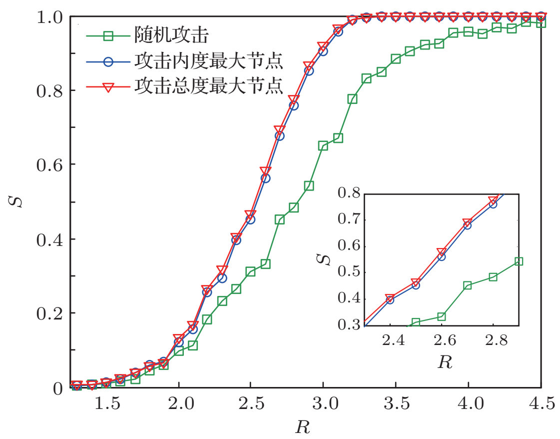

图2 三种攻击策略下的 S-R 曲线

对应每个扰动 R, S 表示耦合网络的最终故障规模. 图2中每个 R 对应的 S 值为1000次仿真结果得到的最终故障规模的平均值. 从图2中主图可以很明显的看出, 当扰动幅值 R 一定时, 攻击内度或总度最大节点对网络所造成的损坏相差不大, 但这两种蓄意攻击策略对网络所造成的破坏要远大于随机攻击对网络的破坏, 这与孤立网络所得结论是一致的, 即孤立无标度网络具有对随机攻击的鲁棒性和蓄意攻击的脆弱性. 图2的插图为一个局部放大图, 可以看出攻击总度最大节点对耦合网络所造成的损害要稍大于攻击内度最大节点. 在后面的仿真中, 统一采用攻击网络A中内度最大节点.

3.2 耦合强度对耦合网络级联抗毁性的影响

根据前面所述, h_c 表示耦合网络中一个节点平均拥有的耦合边数目, 它表征了耦合网络的子网络之间的耦合强度, h_c 越大表示耦合强度越强, 因此称之为耦合强度. 下面对耦合强度 h_c 如何影响耦合网络的级联抗毁性进行仿真分析.

仍不考虑时滞的影响, 设定 $\xi_1 = 0.5$, $\xi_2 = 0.2$, $N = 1000$, $m_0 = m = 3$. 当 h_c 分别取0.01, 0.05, 0.2, 1, 2.5时, S-R 曲线如图3所示, 当 h_c 分别取3, 4, 5.5, 7, 8.5时, S-R 曲线如图4所示. 图3和图4均为仿真1000次所得结果的平均值.

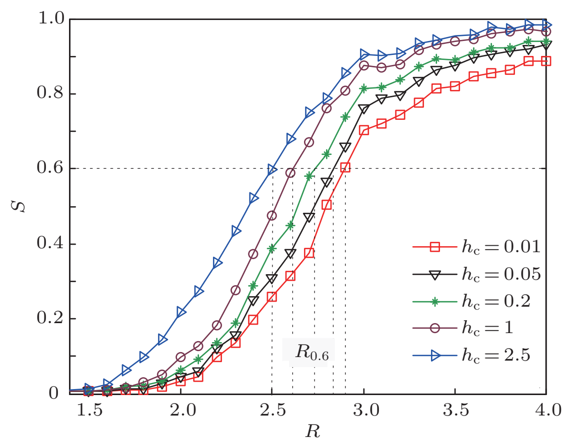

图3 h_c 分别取0.01, 0.05, 0.2, 1, 2.5时的 S-R 曲线

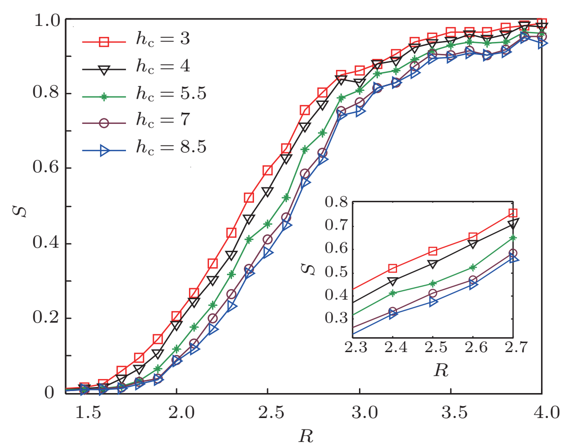

图4 h_c 分别取3, 4, 5.5, 7, 8.5时的 S-R 曲线

从图3中看出, 当 $h_c \leqslant 2.5$ 时, 在扰动 R 一定时, 随着 h_c 值的不断增大, 网络平均故障规模 S 越来越大, 由于 h_c 的大小表征了耦合网络的子网络之间耦合强度的强弱, 因此当 $h_c \leqslant 2.5$ 时, 耦合强度越大, 网络的抗毁性越弱. 从图4主图和局部放大的插图中可以看出, 当 $h_c \geqslant 3$ 时, 在扰动 R 一定时, 随着 h_c 值的不断增大, 网络平均故障规模 S 逐渐变小, 因此当 $h_c \geqslant 3$ 时, 耦合强度越大, 网络的抗毁性反而越强. 因此我们推测: 在 $2.5 \leqslant h_c \leqslant 3$ 之间, 存在一个阈值 $h_{\rm T}$, 当 $h_c \leqslant h_{\rm T}$, 增大子网络之间的耦合强度将降低耦合网络的抗毁性; 而当 $h_c \geqslant h_{\rm T}$ 时, 增大子网络之间的耦合强度将增强耦合网络的抗毁性. 为进一步验证这一推测, 定义一个 R_α, 它表示当网络平均故障规模 S 达到某一 α 值所对应的 R 值, 如图3所示, 以 $\alpha = 0.6$ 为例, 当 $h_c = 2.5$ 时, 其 S-R 曲线与直线 $S = 0.6$ 交点对应

的横坐标约为2.5, 即 $R_{0.6}=2.5$, 它具体的含义是: 当 $R<R_{0.6}=2.5$ 时, 耦合网络的平均故障规模将小于 $\alpha=0.6$, 而当 $R>R_{0.6}=2.5$ 时, 耦合网络的平均故障规模将大于 $\alpha=0.6$. 显而易见, R_α 越大表明当扰动 R 幅值要达到一较大值时才能使网络故障达到相应规模, 因而网络的抗毁性也就越强. 图5为当 α 取不同值时, 对应的 R_α-h_c 曲线.

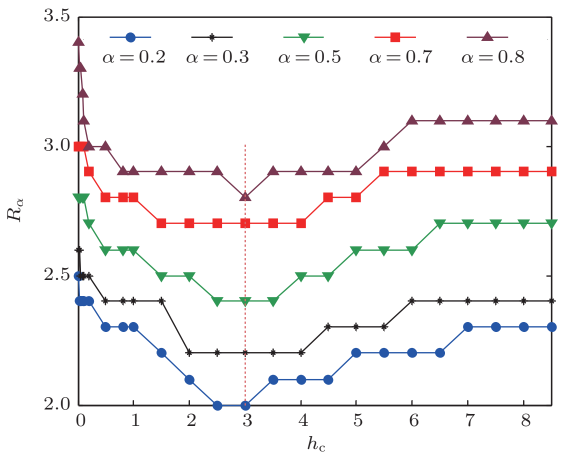

图5　当 α 取不同值时, 对应的 R_α-h_c 曲线

从图5可知, 确实存在一个阈值 $h_{\rm T}$, 当 $h_c\leqslant h_{\rm T}$ 时, h_c 越大, R_α 越小, 因此耦合网络的抗毁性越弱; 当 $h_c\geqslant h_{\rm T}$ 时, h_c 越大, R_α 越大, 因此耦合网络的抗毁性越强. 从图5中可看出这个阈值 $h_{\rm T}$ 约为3, 即 $h_{\rm T}\approx 3$. 很明显, 如果假设每个节点至多有一个耦合边, 此时 $h_c\leqslant 1$, 那么在这种情况下将只能得到片面的结论.

3.3　时滞对耦合网络抗毁性的影响

首先令 $\tau_1=\tau_2=\tau$, 设 $\xi_1=0.5$, $\xi_2=0.2$, $N=1000$, $m_0=m=3$, $h_c=4$, 当 τ 取0, 4, 8时在第10时刻向子网络A中内度最大节点加入幅值 R 为4的扰动, 孤立网络A和耦合网络的子网络A的故障规模 $S_{\rm A}$ 随时间的变化趋势如图6所示. 当 τ 分别取0, 2, 4, 6, 8时, 所造成的耦合网络故障规模 S 随时间 t 的变化趋势如图7所示.

由图6可知, 由于子网络A与子网络B相耦合, 这种耦合因素的存在增加了网络的脆弱性, 时滞 τ 的存在和大小不改变这种影响. 从图7主图可知, 时滞 τ 越大, 网络达到最终故障规模的时间越长, 即时滞的存在延长了故障传播的时间, 为采取相应的防护措施争取了时间. 当从图7插图可看出, 当时滞 τ 不同时, 网络最终故障规模是不同的. 我们对不同 τ 时的 R_α-τ 曲线进行了分析, 得到的曲线是振荡的, 没有任何规律. 因此, 我们不再限制 $\tau_1=\tau_2$, 而是研究 τ_1 和 τ_2 可取任意值时二者对耦合网络抗毁性的影响. 首先固定 $\tau_1=3$, 变化 τ_2, 得到不同 α 值时的 R_α-τ_2 曲线如图8所示.

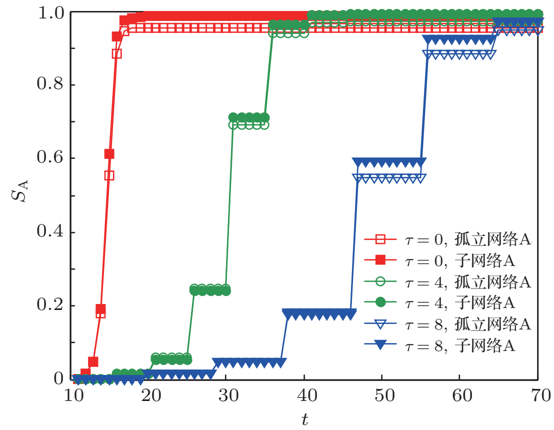

图6　孤立网络A和耦合网络的子网络A的故障规模 $S_{\rm A}$ 随时间的变化趋势

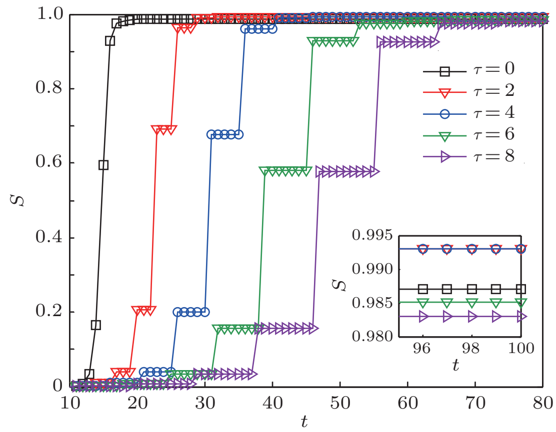

图7　耦合网络故障规模 S 随时间 t 的变化趋势

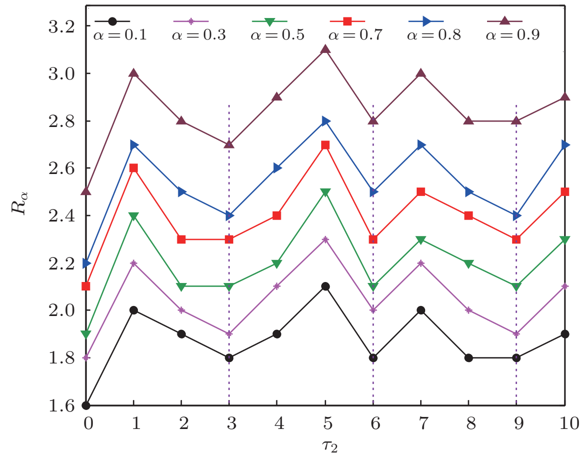

图8　$\tau_1=3$ 时的 R_α-τ_2 曲线

根据3.2节的分析, R_α越大, 耦合网络抗毁性越强. 从图8可以看出, 对于$\tau_1=3$的情况, 对应不同的α值, τ_2分别在3, 6, 9时R_α值达到最小, 也就是当τ_2/τ_1的比值为整数时, 耦合网络的抗毁性最弱. 同理, 当固定τ_2时, 我们也得到了类似的结论. 因此前面分析的$\tau_1=\tau_2=3$时耦合网络抗毁性只是一个在$\tau_1=\tau_2$条件下的特例. 这个结论提示我们, 为了增强耦合网络的抗毁性, 应尽量使τ_1和τ_2不成倍数关系.

4 结 论

本文考虑时滞因素, 研究了基于时滞CML模型的多耦合边耦合网络的级联抗毁性, 具有比以往模型更广泛的代表性. 我们的研究表明: 耦合因素的存在使耦合网络相比于孤立网络更加脆弱, 但并不是耦合强度越大网络的抗毁性越弱, 而是存在一个阈值h_T, 当耦合强度小于这个阈值时, 耦合强度越大抗毁性越弱, 反之, 耦合强度越大抗毁性越强; 时滞的存在也对耦合网络的级联抗毁性产生了巨大影响, 首先是延长了故障发生的时间, 为防止故障的进一步传播争取了时间, 其次是影响了最终故障规模, 具体的是当τ_1和τ_2任意取值时, 当τ_1和τ_2成倍数时网络的最终故障规模要比它们不成倍数时要大. 因此为构建或提高耦合网络的抗毁性, 应该适当选择耦合强度和时滞参数.

参考文献

[1] Watts D J, Strogatz S H 1998 *Nature* **393** 440

[2] Barabási A L, Albert R 1999 *Science* **286** 509

[3] Liu G, Li Y S 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 108901 (in Chinese)[刘刚, 李永树 2012 物理学报 **61** 108901]

[4] Boccaletti S, Latora V, Moreno Y, Chavez M, Hwanga D U 2006 *Phys. Rep.* **424** 175

[5] Zhao L, Park K, Lai Y C 2004 *Phys. Rev. E* **70** 035101(R)

[6] Motter A E, Lai Y C 2002 *Phys. Rev. E* **66** 065102

[7] Crucitti P, Latora V, Marchiori M 2004 *Phys. Rev. E* **69** 045104(R)

[8] Wang X F, Xu J 2004 *Phys. Rev. E* **70** 056113

[9] Wang J W 2012 *Physica A* **391** 4004

[10] Wang J W, Rong L L, Zhang L, Zhang Z Z 2008 *Physica A* **387** 6671

[11] Ash J, Newth D 2007 *Physica A* **380** 673

[12] Motter A E 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 098701

[13] Dou B L, Wang X G, Zhang S Y 2010 *Physica A* **389** 2310

[14] Hu K, Hu T, Tang Y 2010 *Chin. Phys. B* **19** 080206

[15] Buldyrev S V, Parshani R, Paul G, Stanley H E, Havlin S 2010 *Nature* **464** 1025

[16] Shao J, Buldyrev S V, Havlin S, Stanley H E 2011 *Phys. Rev. E* **83** 036116

[17] Gao J X, Buldyrev S V, Stanley H E, Havlin S 2012 *Nature Physics.* **8** 40

[18] Li W, Bashan A, Buldyrev S V, Stanley H E, Havlin S 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 228702

[19] Huang X Q, Shao S, Wang H J, Buldyrev S V, Stanley H E, Havlin S 2013 *EPL* **101** 18002

[20] Brummitt C D, D Souza R M, Leicht E A 2012 *PNAS* **109** E680

[21] Tan F, Xia Y X, Zhang W P, Jin X Y 2013 *EPL* **102** 28009

[22] Qiu Y Z 2013 *Physica A* **392** 1920

[23] Xu J, Wang X F 2005 *Physica A* **349** 685

[24] Cui D, Gao Z Y, Zhao X M 2008 *Chin. Phys. B* **17** 1703

[25] Cui D, Gao Z Y, Zheng J F 2009 *Chin. Phys. B* **18** 992

[26] Holme P, Kim B J, Yoon C N, Han S K 2002 *Phys. Rev. E* **65** 056109

Study on cascading invulnerability of multi-coupling-links coupled networks based on time-delay coupled map lattices model*

Peng Xing-Zhao[1)†] Yao Hong[2)] Du Jun[1)] Ding Chao[1)] Zhang Zhi-Hao[2)]

1) (*Aeronautics and Astronautics Engineering College, Air Force Engineering University, Xi'an 710038, China*)

2) (*Science College, Air Force Engineering University, Xi'an 710051, China*)

(Received 14 November 2013; revised manuscript received 13 December 2013)

Abstract

The couplings among different networks facilitate their communications, while at the same time they also bring the risk of enhancing the wide spread of cascading failures to the coupled networks. Given that there is usually the time-delay during the spread of failures and more than one coupling link a node might possess, a cascading failure model for scale-free multi-coupling-link coupled networks is built in this paper, based on time-delay coupled map lattices (CML) model, which may be wider representative than previous models. Our research shows that in BA (Barabási-Albert) scale-free coupled networks, there is a threshold $h_{\mathrm{T}} \approx 3$: when the coupling strength is bellow this threshold, the stronger coupling strength corresponds to a lower invulnerability; and vice versa, the stronger coupling strength would bring a higher invulnerability. In addition, our studies show that the presence of time-delay not only prolongs the failure spreading time during which measures can be taken to suppress cascading failures, but also has a significant influence on the eventual cascading size, for detail, if intra-layer time-delay τ_1 and inter-layer time-delay τ_2 can have any values, then the multiples of the two numbers will cause larger cascading size. We hope our research can provide a reference for building high-invulnerable coupled networks or the increase of the invulnerability of the coupled networks.

Keywords: coupled networks, coupled map lattices, coupling strength, time-delay

PACS: 89.75.Fb, 89.75.Hc, 05.45.Ra **DOI:** 10.7498/aps.63.078901

* Project supported by the Shaanxi Science Foundation of China (Grant No. 2012JM8035).

† Corresponding author. E-mail: pxz0311@163.com