

基于函数矩阵的一类混沌系统同步

林立雄 彭侠夫[†]

(厦门大学信息科学与技术学院自动化系, 厦门 361005)

(2013年12月11日收到; 2014年1月13日收到修改稿)

研究了一类混沌系统的同步问题、基于稳定性理论和极点配置技术, 设计了两个混沌系统之间的同步方案, 实现两个混沌系统之间的同步. 通过函数矩阵, 实现驱动系统和响应系统的状态变量按给定的函数矩阵同步. 同时证明了该方法同样适用于两个混沌系统之间的滞后同步. 通过对 Lorenz 混沌系统和 Lorenz 超混沌系统的数值模拟, 进一步验证了所提方案的有效性.

关键词: 函数矩阵, 混沌同步, 滞后同步

PACS: 05.45.Gg, 05.45.Pq, 05.45.Xt

DOI: 10.7498/aps.63.080504

1 引言

自 Pecora 和 Carroll^[1] 在 1990 年首次提出具有不同初始条件的两个同类混沌系统的同步控制方法以来, 混沌同步控制就引起了学术界和工业界的广泛兴趣. 混沌系统是一类特殊的非线性系统, 它具有初值敏感性、参数波动性、状态轨迹具有吸引子和系统维数通常较低等特点^[2]. 近年来, 由于混沌系统的特性以及混沌同步在信息处理与保密通信领域的重要应用价值, 混沌同步一直是非线性科学的研究热点.

目前, 对于混沌同步问题的研究, 国内外的学者已取得一定的研究成果, 提出了多种混沌同步类型^[3,4], 主要有: 完全同步^[1]、投影同步^[5]、自适应同步^[6,7]、耦合同步^[8]、滞后同步^[9]、相同步^[10]等. 特别地, 1999 年, Mainieri 和 Rehacek 提出的投影同步, 即某些部分耦合线性混沌系统, 其驱动系统和响应系统能被同步到一个给定的常数尺度因子. 但他们只给出了一个预测尺度因子的指导方法, 并未给出确定的理论方法^[11]. Xu 和 Li^[12] 通过在响应系统中引入控制器, 将投影同步的特性扩展到非线性系统中. Hu 和 Xu^[13] 基于 Lyapunov 理论, 提出

了全维混合投影同步 (full state hybrid projective synchronization, FSHPS), 包含了完全同步、反相同步、投影同步. 实际上, 全维混合投影同步为改进函数投影同步^[14]的一个特例. Zhang 等^[15] 则将改进函数投影同步中驱动系统和响应系统同步的尺度因子扩展成复数形式, 实现复数域混沌系统 (complex chaotic systems) 和实数域混沌系统 (real chaotic systems) 之间的同步. 而基于任意伸缩矩阵的混沌同步是由 Grassi 和 Miller^[16] 在 2012 年提出的, 他们将投影同步的常数尺度因子扩展成矩阵形式, 实现每个驱动系统的状态变量同步于响应系统状态变量的线性组合. 本文在上述研究的基础上, 基于函数矩阵和极点配置技术, 设计两个混沌系统之间的同步及其滞后同步, 实现驱动系统状态变量同步于响应系统状态变量的任意组合.

本文第二部分给出基于函数矩阵的混沌同步理论, 并证明对于任意给定的在 $[0, +\infty)$ 内连续可导且有界的 N 阶可逆函数矩阵, 只要满足一定条件即可实现混沌渐近同步, 同时给出基于函数矩阵的混沌系统滞后同步证明; 第三部分分别通过 Lorenz 超混沌系统及 Lorenz 混沌系统, 阐述上述算法的有效性, 并通过改变函数矩阵实现基于常数矩阵的混沌系统同步和全维混合投影同步; 第四部分进行

[†] 通讯作者. E-mail: xfpeng@xmu.edu.cn

总结.

2 基于函数矩阵的同步系统设计

2.1 驱动-响应混沌系统的函数矩阵同步

考虑如下动态系统及其输出方程^[17]:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{C}, \quad (1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t), \quad (2)$$

这里 $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ 为系统的状态向量, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ 为时不变实值矩阵, $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是非线性向量函数, $\mathbf{y}(t)$ 为系统输出, $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 为反馈增益矩阵. 系统(1)包含了几类著名的连续时间混沌系统与超混沌系统, 例如 Lorenz 混沌系统^[18]、Lorenz 超混沌系统^[19]、Chua 混沌电路^[20]、T 混沌系统^[21,22] 和 MCK (Matsumoto-Chua-Kobayashi) 混沌电路^[23] 等.

假设 1

$$\alpha(t) = \begin{bmatrix} \alpha_{11}(t) & \alpha_{12}(t) & \cdots & \alpha_{1n}(t) \\ \alpha_{21}(t) & \alpha_{22}(t) & \cdots & \alpha_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1}(t) & \alpha_{n2}(t) & \cdots & \alpha_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

为 N 阶可逆函数矩阵, 并在 $[0, +\infty)$ 内连续可导并有界.

定义 1 若矩阵 $[\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$ 是满秩的, 且矩阵 $[\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}]$ 的特征值都在左半平面. 则非线性动态系统

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) &= \alpha^{-1}(t)[\mathbf{A}\alpha(t) - \dot{\alpha}(t)]\hat{\mathbf{x}}(t) \\ &\quad + \alpha^{-1}(t)\mathbf{B}\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}(t)) + \alpha^{-1}(t)\mathbf{C} \\ &\quad + \alpha^{-1}(t)\mathbf{B}(\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t)), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\hat{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}(t)) + \mathbf{K}\alpha(t)\hat{\mathbf{x}}(t) \quad (4)$$

与驱动系统(1)达到函数矩阵同步, 其中 $\hat{\mathbf{x}}(t)$ 为系统的状态变量, $\hat{\mathbf{y}}(t)$ 为系统输出.

定义驱动系统(1)与响应系统(3)的同步误差向量为

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \alpha(t)\hat{\mathbf{x}}(t). \quad (5)$$

证明 对于驱动系统(1)与响应系统(3), 如果存在一个函数矩阵 $\alpha(t)$ 满足假设 1, 使得当 $t \rightarrow \infty$

时

$$\begin{aligned} \|e_i(t)\| &= \left\| x_i(t) - \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}(t)\hat{x}_j(t) \right\| \rightarrow 0 \\ (i &= 1, 2, 3, \dots, n), \end{aligned} \quad (6)$$

则意味着每个驱动系统的状态变量 $x_i(t)$ 同步于响应系统的状态变量任意组合

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{ij}(t)\hat{x}_j(t) (i = 1, 2, 3, \dots, n).$$

(6)式可写成(5)式的矩阵形式, 则误差动力系统可表示为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}(t) &= \dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\alpha}(t)\hat{\mathbf{x}}(t) - \alpha(t)\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) \\ &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{C} - \dot{\alpha}(t)\hat{\mathbf{x}}(t) \\ &\quad - \alpha(t)(\alpha^{-1}(t)(\mathbf{A}\alpha(t) - \dot{\alpha}(t))\hat{\mathbf{x}}(t) \\ &\quad + \alpha^{-1}(t)\mathbf{B}\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}(t)) + \alpha^{-1}(t)\mathbf{C} \\ &\quad + \alpha^{-1}(t)\mathbf{B}(\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t))) \\ &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) - \mathbf{A}\alpha(t)\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) \\ &\quad - \mathbf{B}\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}(t)) - \mathbf{B}(\mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) \\ &\quad + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) - \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}(t)) - \mathbf{K}\alpha(t)\hat{\mathbf{x}}(t)) \\ &= \mathbf{A}(\mathbf{x}(t) - \alpha(t)\hat{\mathbf{x}}(t)) \\ &\quad - \mathbf{B}\mathbf{K}(\mathbf{x}(t) - \alpha(t)\hat{\mathbf{x}}(t)) \\ &= \mathbf{A}\mathbf{e}(t) - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{e}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{e}(t). \end{aligned} \quad (7)$$

若矩阵 $[\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$ 是满秩的, 则只要选取适当的反馈增益矩阵 \mathbf{K} , 就可使 $\dot{\mathbf{e}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{e}(t)$ 全局渐近稳定. 当误差动力系统(7)的特征值都具有负实部时, 驱动系统(1)和响应系统(3)的状态变量按给定的函数矩阵同步. 而反馈增益矩阵 \mathbf{K} 参数的选择可通过极点配置技术, 通过随意选定矩阵 $[\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}]$ 的特征值为负实部来确定反馈增益矩阵 \mathbf{K} .

2.2 驱动-响应混沌系统的函数矩阵滞后同步

给出驱动系统(1)滞后同步的响应系统为

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) &= \alpha^{-1}(t)[\mathbf{A}\alpha(t) - \dot{\alpha}(t)]\hat{\mathbf{x}}(t) \\ &\quad + \alpha^{-1}(t)\mathbf{B}\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}(t)) + \alpha^{-1}(t)\mathbf{C} \\ &\quad + \alpha^{-1}(t)\mathbf{B}(\mathbf{y}(t - \tau) - \hat{\mathbf{y}}(t)), \end{aligned} \quad (8)$$

其中, $\tau > 0$ 为驱动系统(1)的时滞.

定义驱动系统(1)与响应系统(3)的同步误差向量为

$$e(t) = x(t - \tau) - \alpha(t)\hat{x}(t), \quad (9)$$

同理, 对于驱动系统(1)与响应系统(8), 如果存在一个函数矩阵 $\alpha(t)$ 满足假设1, 使得当 $t \rightarrow \infty$ 时,

$$\|e_i(t)\| = \left\| x_i(t - \tau) - \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}(t)\hat{x}_j(t) \right\| \rightarrow 0$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots, n), \quad (10)$$

则意味着每个驱动系统的状态变量 $x_i(t - \tau)$ 同步于响应系统的状态变量任意组合 $\sum_{j=1}^n \alpha_{ij}(t)\hat{x}_j(t)$ ($i = 1, 2, 3 \dots n$), 滞后时间为 τ .

(10)式可写成(9)式的矩阵形式, 则误差动力系统可表示为

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \dot{x}(t - \tau) - \dot{\alpha}(t)\hat{x}(t) - \alpha(t)\dot{\hat{x}}(t) \\ &= Ax(t - \tau) + Bf(x(t - \tau)) \\ &\quad + C - \dot{\alpha}(t)\hat{x}(t) \\ &\quad - \alpha(t)(\alpha^{-1}(t)(A\alpha(t) - \dot{\alpha}(t))\hat{x}(t) \\ &\quad + \alpha^{-1}(t)Bf(\hat{x}(t)) + \alpha^{-1}(t)C \\ &\quad + \alpha^{-1}(t)B(y(t - \tau) - \hat{y}(t))) \\ &= Ax(t - \tau) - A\alpha(t)\hat{x}(t) \\ &\quad + Bf(x(t - \tau)) - Bf(\hat{x}(t)) \\ &\quad - B(f(x(t - \tau)) + Kx(t - \tau) \\ &\quad - f(\hat{x}(t)) - K\alpha(t)\hat{x}(t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= A(x(t - \tau) - \alpha(t)\hat{x}(t)) \\ &\quad - BK(x(t - \tau) - \alpha(t)\hat{x}(t)) \\ &= Ae(t) - BKe(t) = (A - BK)e(t), \quad (11) \end{aligned}$$

从上式可以看出, 可以通过随意选定 $[A - BK]$ 的特征值为负实部来确定反馈增益矩阵 K . 说明定义1同样适用于两个混沌系统之间的滞后同步.

特别地, 当 $\alpha_{11}(t) = \alpha_{22}(t) = \dots = \alpha_{nn}(t) = 1$ 且 $\alpha_{ij}(t) = 0, i \neq j$ 时, 驱动系统(1)与响应系统(3)正相完全同步. 当 $\alpha_{11}(t) = \alpha_{22}(t) = \dots = \alpha_{nn}(t) = -1$ 且 $\alpha_{ij}(t) = 0, i \neq j$ 时, 驱动系统(1)与响应系统(3)反相完全同步. 当 $\alpha(t) = \text{diag}(\alpha_{11}(t), \alpha_{22}(t), \dots, \alpha_{nn}(t))$ 时, 驱动系统(1)与响应系统(3)为改进的函数投影同步.

3 数值模拟

3.1 超混沌系统的同步模拟

考虑 Lorenz 超混沌系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= 35x_2(t) - 35x_1(t), \\ \dot{x}_2(t) &= 7x_1(t) - x_1(t)x_3(t) + 12x_2(t) + x_4(t), \\ \dot{x}_3(t) &= x_1(t)x_2(t) - 3x_3(t), \\ \dot{x}_4(t) &= -5x_1(t), \end{aligned} \quad (12)$$

当初始值为 $x_1(0) = 2, x_2(0) = 2, x_3(0) = 10, x_4(0) = 1$ 时, 系统(12)是超混沌的. 将系统(12)改写为(1)式的形式, 可得

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -35 & 35 & 0 & 0 \\ 7 & 12 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \cdot x_3(t) \\ x_1(t) \cdot x_2(t) \end{bmatrix}. \quad (13)$$

将(13)式与(12)式进行比较可得

$$A = \begin{bmatrix} -35 & 35 & 0 & 0 \\ 7 & 12 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

当矩阵 $[B, AB, \dots, A^{n-1}B]$ 是满秩时, 误差动力系统(7)的特征值可以依据定义1取得任何值. 这里取其

特征值分别为 $-1, -30.4398, -4.1872, -1.373$, 通过极点配置技术可得到反馈增益矩阵

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -11 & -13 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

则可得输出方程为

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \cdot x_3(t) \\ x_1(t) \cdot x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -11 & -13 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}. \quad (16)$$

由 (3) 和 (4) 式可得到系统 (13) 的响应系统及其输出方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1(t) \\ \dot{\hat{x}}_2(t) \\ \dot{\hat{x}}_3(t) \\ \dot{\hat{x}}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11}(t) & \alpha_{12}(t) & \alpha_{13}(t) & \alpha_{14}(t) \\ \alpha_{21}(t) & \alpha_{22}(t) & \alpha_{23}(t) & \alpha_{24}(t) \\ \alpha_{31}(t) & \alpha_{32}(t) & \alpha_{33}(t) & \alpha_{34}(t) \\ \alpha_{41}(t) & \alpha_{42}(t) & \alpha_{43}(t) & \alpha_{44}(t) \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} -35 & 35 & 0 & 0 \\ 7 & 12 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11}(t) & \alpha_{12}(t) & \alpha_{13}(t) & \alpha_{14}(t) \\ \alpha_{21}(t) & \alpha_{22}(t) & \alpha_{23}(t) & \alpha_{24}(t) \\ \alpha_{31}(t) & \alpha_{32}(t) & \alpha_{33}(t) & \alpha_{34}(t) \\ \alpha_{41}(t) & \alpha_{42}(t) & \alpha_{43}(t) & \alpha_{44}(t) \end{bmatrix} \\ - \begin{bmatrix} \alpha_{11}(t) & \alpha_{12}(t) & \alpha_{13}(t) & \alpha_{14}(t) \\ \alpha_{21}(t) & \alpha_{22}(t) & \alpha_{23}(t) & \alpha_{24}(t) \\ \alpha_{31}(t) & \alpha_{32}(t) & \alpha_{33}(t) & \alpha_{34}(t) \\ \alpha_{41}(t) & \alpha_{42}(t) & \alpha_{43}(t) & \alpha_{44}(t) \end{bmatrix} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \\ \hat{x}_3(t) \\ \hat{x}_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11}(t) & \alpha_{12}(t) & \alpha_{13}(t) & \alpha_{14}(t) \\ \alpha_{21}(t) & \alpha_{22}(t) & \alpha_{23}(t) & \alpha_{24}(t) \\ \alpha_{31}(t) & \alpha_{32}(t) & \alpha_{33}(t) & \alpha_{34}(t) \\ \alpha_{41}(t) & \alpha_{42}(t) & \alpha_{43}(t) & \alpha_{44}(t) \end{bmatrix}^{-1} \quad (17)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \cdot \hat{x}_3(t) \\ \hat{x}_1(t) \cdot \hat{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11}(t) & \alpha_{12}(t) & \alpha_{13}(t) & \alpha_{14}(t) \\ \alpha_{21}(t) & \alpha_{22}(t) & \alpha_{23}(t) & \alpha_{24}(t) \\ \alpha_{31}(t) & \alpha_{32}(t) & \alpha_{33}(t) & \alpha_{34}(t) \\ \alpha_{41}(t) & \alpha_{42}(t) & \alpha_{43}(t) & \alpha_{44}(t) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t)),$$

$$\hat{\mathbf{y}}(t) = \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \cdot \hat{x}_3(t) \\ \hat{x}_1(t) \cdot \hat{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -11 & -13 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11}(t) & \alpha_{12}(t) & \alpha_{13}(t) & \alpha_{14}(t) \\ \alpha_{21}(t) & \alpha_{22}(t) & \alpha_{23}(t) & \alpha_{24}(t) \\ \alpha_{31}(t) & \alpha_{32}(t) & \alpha_{33}(t) & \alpha_{34}(t) \\ \alpha_{41}(t) & \alpha_{42}(t) & \alpha_{43}(t) & \alpha_{44}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \\ \hat{x}_3(t) \\ \hat{x}_4(t) \end{bmatrix}, \quad (18)$$

其中, $\boldsymbol{\alpha}(t) = \begin{bmatrix} \alpha_{11}(t) & \alpha_{12}(t) & \alpha_{13}(t) & \alpha_{14}(t) \\ \alpha_{21}(t) & \alpha_{22}(t) & \alpha_{23}(t) & \alpha_{24}(t) \\ \alpha_{31}(t) & \alpha_{32}(t) & \alpha_{33}(t) & \alpha_{34}(t) \\ \alpha_{41}(t) & \alpha_{42}(t) & \alpha_{43}(t) & \alpha_{44}(t) \end{bmatrix}$ 取为假设 1 中的函数矩阵.

由定义 1 可得, 驱动系统 (13) 和响应系统 (17) 的状态变量按给定的函数矩阵 $\boldsymbol{\alpha}(t)$ 同步, 为了验证方法的有效性, $\boldsymbol{\alpha}(t)$ 取为如下矩阵:

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = \begin{bmatrix} 1 + 0.5 \sin(2t) & 3 & 0 & 4 + \sin(2t) \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

由(6)式和(19)式可得

$$\|x_1(t) - (1 + 0.5 \sin(2t))\hat{x}_1(t) - 3\hat{x}_2(t) - (4 + \sin(2t))\hat{x}_4(t)\| \rightarrow 0, \quad (20)$$

由(20)式可知, 驱动系统(13)状态变量 $x_1(t)$ 同步于响应系统(17)状态变量的组合 $((1 + 0.5 \sin(2t))\hat{x}_1(t) + 3\hat{x}_2(t) + (4 + \sin(2t))\hat{x}_4(t))$. 同理

可以得到 $\|x_2(t) - 2\hat{x}_2(t)\| \rightarrow 0$. 响应系统状态变量 $\hat{x}_2(t)$ 为驱动系统状态变量 $x_2(t)$ 的 $\frac{1}{2}$. 驱动-响应系统的动态行为模拟结果如图1所示. 图1左列即为典型Lorenz的超混沌吸引子, 右列为其响应系统. 从右列图可以看出, 响应系统的超混沌吸引子完全异于驱动系统的超混沌吸引子, 实际上是由于驱动系统状态变量同步于响应系统状态变量的组合. 系

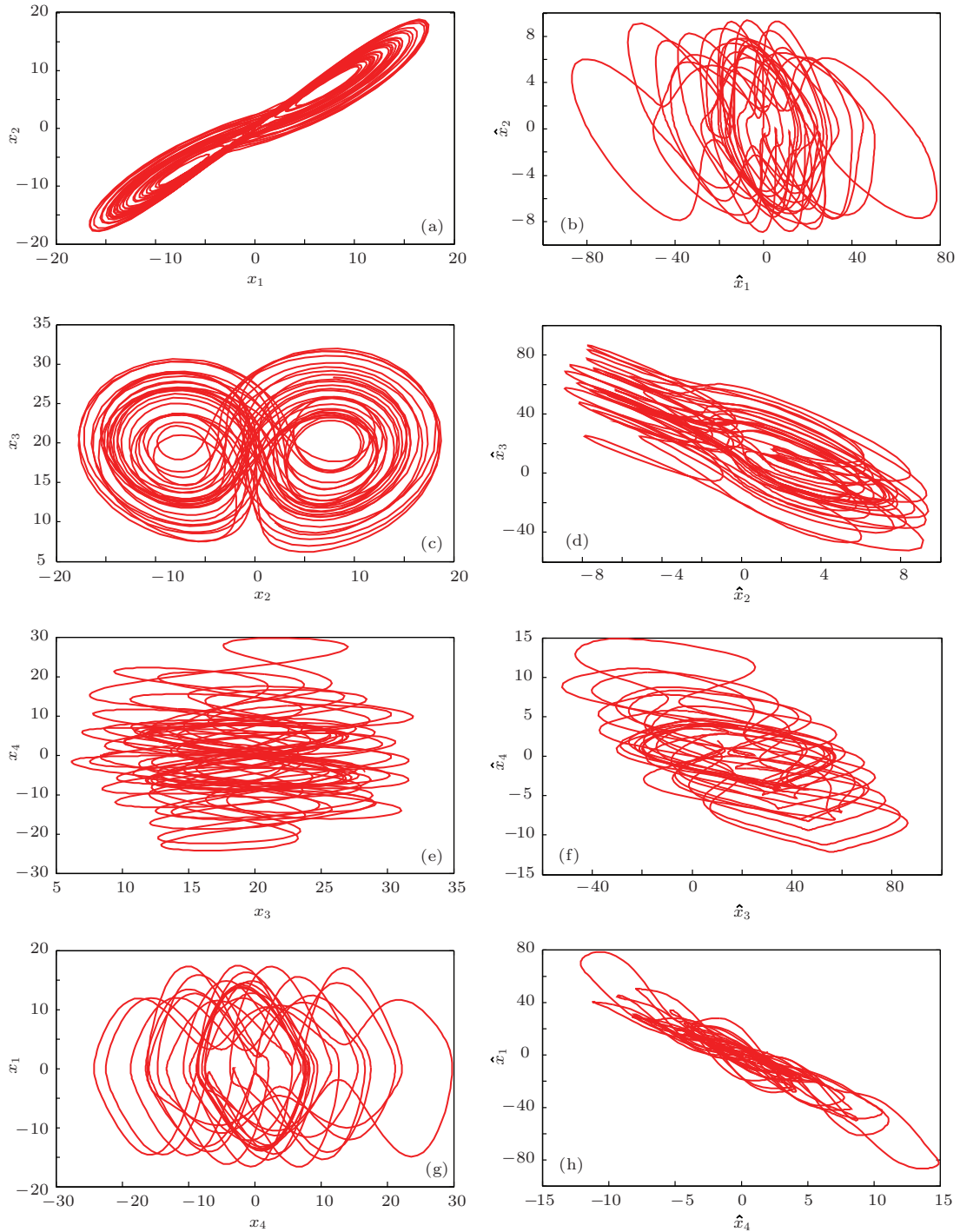


图1 驱动系统(左)与响应系统(右)的混沌吸引子在各平面的投影 驱动系统: (a) 平面 x_1-x_2 ; (c) 平面 x_2-x_3 ; (e) 平面 x_3-x_4 ; (g) 平面 x_4-x_1 ; 响应系统: (b) 平面 $\hat{x}_1-\hat{x}_2$; (d) 平面 $\hat{x}_2-\hat{x}_3$; (f) 平面 $\hat{x}_3-\hat{x}_4$; (h) 平面 $\hat{x}_4-\hat{x}_1$

统(13)和(17)的同步模拟结果如图2所示. 由图2可见, $x_2(t)$ 与 $\hat{x}_2(t)$ 获得了同步, 它们的振幅之间成比例关系, 而 $x_1(t)$, $x_3(t)$ 和 $x_4(t)$ 由于同步于响应系统状态变量的组合, 因此从图上看不出其

与 $\hat{x}_1(t)$, $\hat{x}_3(t)$ 和 $\hat{x}_4(t)$ 之间的同步关系. 图3为同步误差向量随时间 t 的变化. 由图3可知, 随着时间 $t \rightarrow \infty$, 基于函数矩阵的同步误差向量渐近稳定 $e \rightarrow 0$.

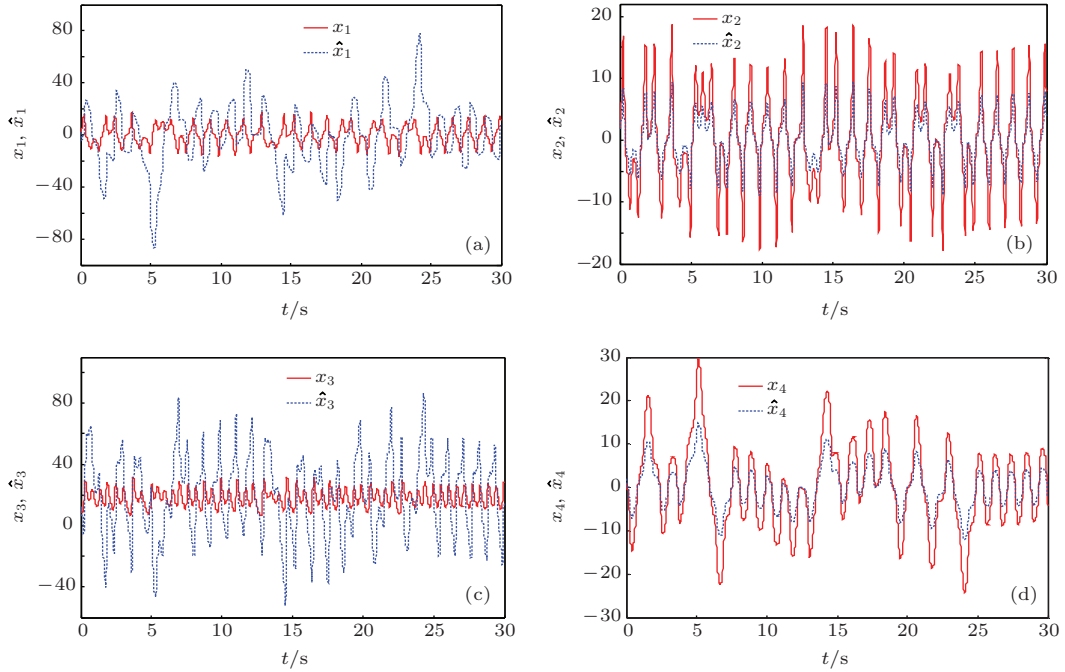


图2 状态变量同步过程 (a) $x_1(t)$, $\hat{x}_1(t)$ 的响应曲线; (b) $x_2(t)$, $\hat{x}_2(t)$ 的响应曲线; (c) $x_3(t)$, $\hat{x}_3(t)$ 的响应曲线; (d) $x_4(t)$, $\hat{x}_4(t)$ 的响应曲线

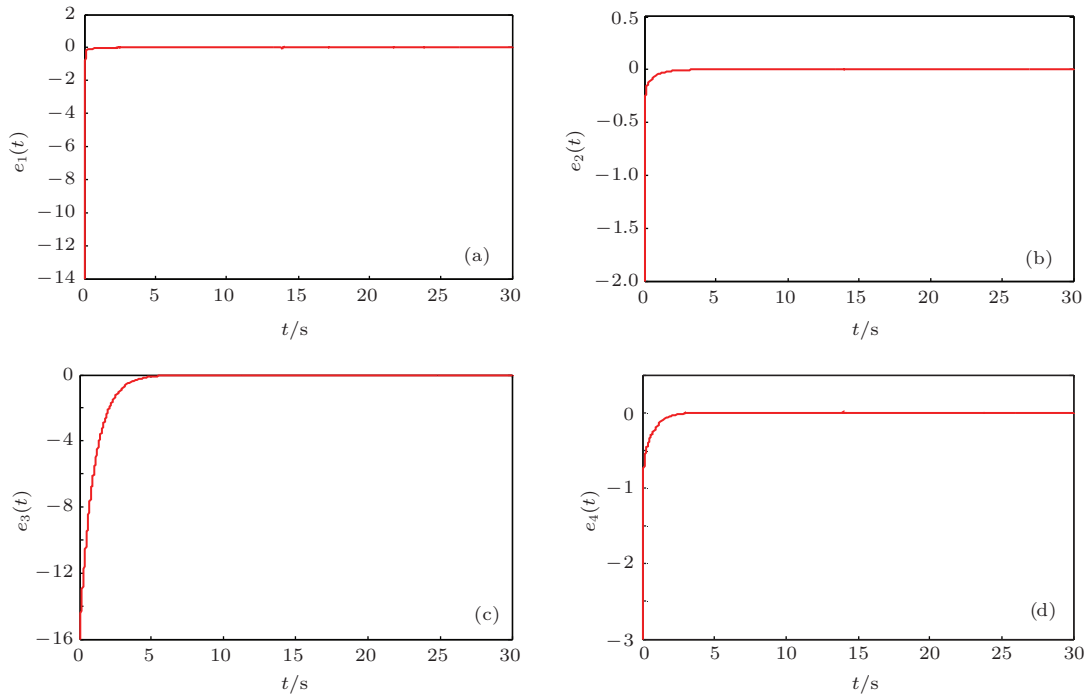


图3 同步误差曲线 (a) $e_1(t)$ 的响应曲线; (b) $e_2(t)$ 的响应曲线; (c) $e_3(t)$ 的响应曲线; (d) $e_4(t)$ 的响应曲线

若函数矩阵 $\alpha(t)$ 取为常数矩阵

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (21)$$

则每个驱动系统的状态变量同步于响应系统状态变量的线性组合, 与文献 [9] 中所得到的结论一致. 驱动-响应系统的同步模拟结果如图 4 所示. 由图 4 可知, $x_2(t)$ 与 $\hat{x}_2(t)$, $x_4(t)$ 与 $\hat{x}_4(t)$ 分别获得了完全同步. 驱动系统 (13) 状态变量 $x_1(t)$ 同步于响应系统 (17) 状态变量的线性组合 ($\hat{x}_1(t) + 3\hat{x}_2(t) + 4\hat{x}_4(t)$). 图 5 为同步误差曲线, 由图 5 可知, 基于常数矩阵的同步误差向量渐近稳定 $e \rightarrow 0$.

同理, 若取函数矩阵 $\alpha(t)$ 为对角矩阵 $\alpha =$

$\text{diag}(2, -1, 1, \frac{1}{2})$, 则驱动系统 (13) 与响应系统 (17) 之间为全维混合投影同步, 实现了驱动系统与响应系统对应状态变量之间的投影同步. 其同步模拟结果与同步误差曲线分别如图 6 和 7 所示. 从图 6 可以看出 $x_2(t)$ 与 $\hat{x}_2(t)$ 获得了反相同步, $x_3(t)$ 与 $\hat{x}_3(t)$ 获得了正相同步, 同样基于对角矩阵的同步误差向量渐近稳定 $e \rightarrow 0$.

由以上分析可以看出, 取不同的函数矩阵可以得到不同的混沌同步, 这与第二部分的理论分析结果一致. 基于函数矩阵的混沌系统同步中, 驱动系统与响应系统的同步因子扩展成函数矩阵, 其新特性可以独立地确定不同的函数矩阵, 从而可使混沌系统每个对应的状态变量按照任意组合达到同步, 使同步方式更加灵活, 同时不可预料的函数矩阵可以增加保密通信的安全性.

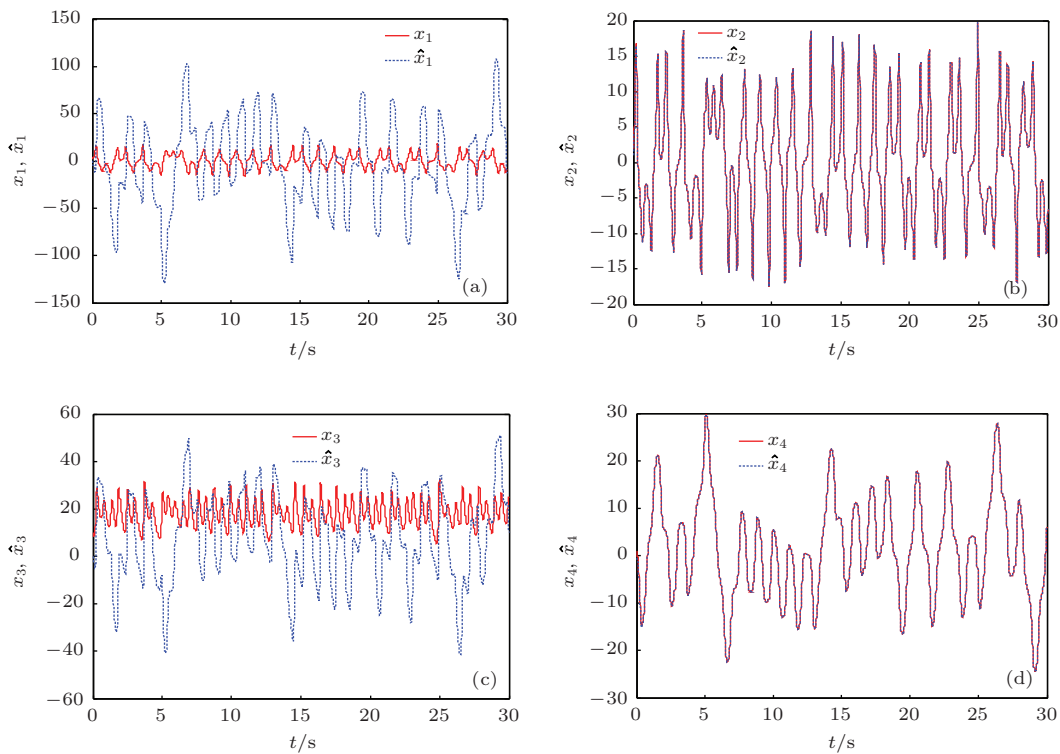


图 4 函数矩阵为常数矩阵时的状态变量同步过程 (a) $x_1(t)$, $\hat{x}_1(t)$ 的响应曲线; (b) $x_2(t)$, $\hat{x}_2(t)$ 的响应曲线; (c) $x_3(t)$, $\hat{x}_3(t)$ 的响应曲线; (d) $x_4(t)$, $\hat{x}_4(t)$ 的响应曲线

3.2 混沌系统的滞后同步模拟

考虑经典的 Lorenz 系统:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= 10x_2(t) - 10x_1(t), \\ \dot{x}_2(t) &= 28x_1(t) - x_1(t)x_3(t) - x_2(t), \end{aligned}$$

$$\dot{x}_3(t) = x_1(t)x_2(t) - \frac{8}{3}x_3(t), \quad (22)$$

当初始值为 $x_1(0) = 0.01$, $x_2(0) = 0$, $x_3(0) = 0$ 时, Lorenz 系统是混沌的. 将系统 (22) 改写为 (1) 式的形式, 可得

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 28 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \cdot x_3(t) \\ x_1(t) \cdot x_2(t) \end{bmatrix}. \quad (23)$$

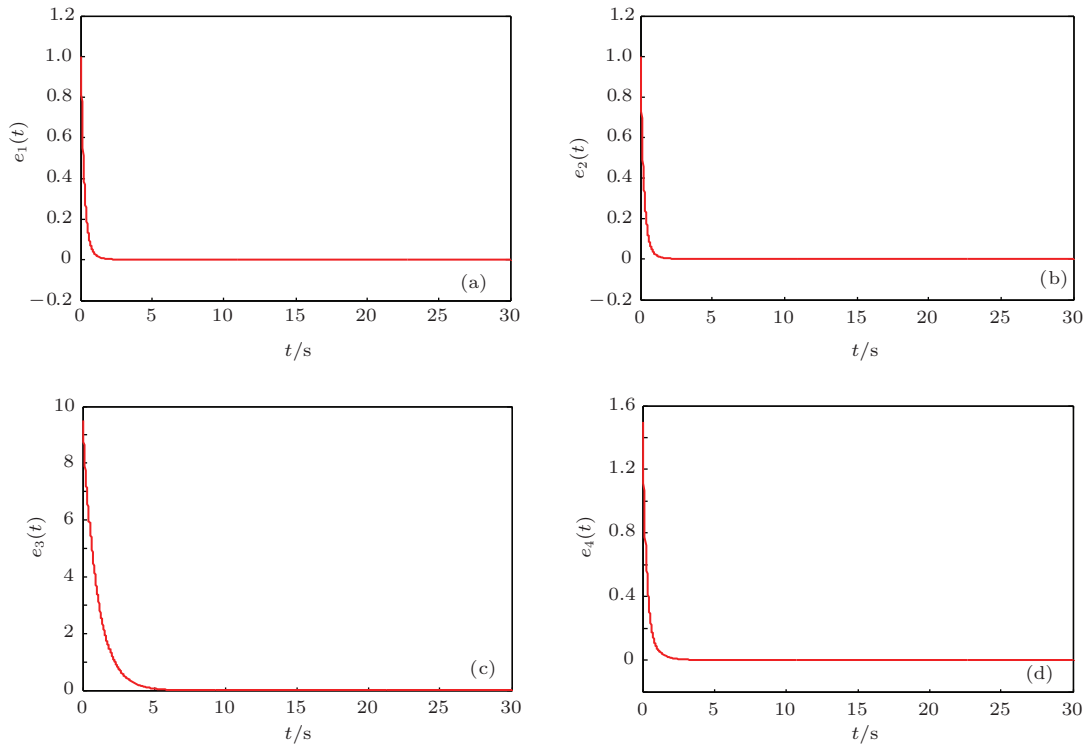


图5 函数矩阵为常数矩阵时的同步误差曲线 (a) $e_1(t)$ 的响应曲线; (b) $e_2(t)$ 的响应曲线; (c) $e_3(t)$ 的响应曲线; (d) $e_4(t)$ 的响应曲线

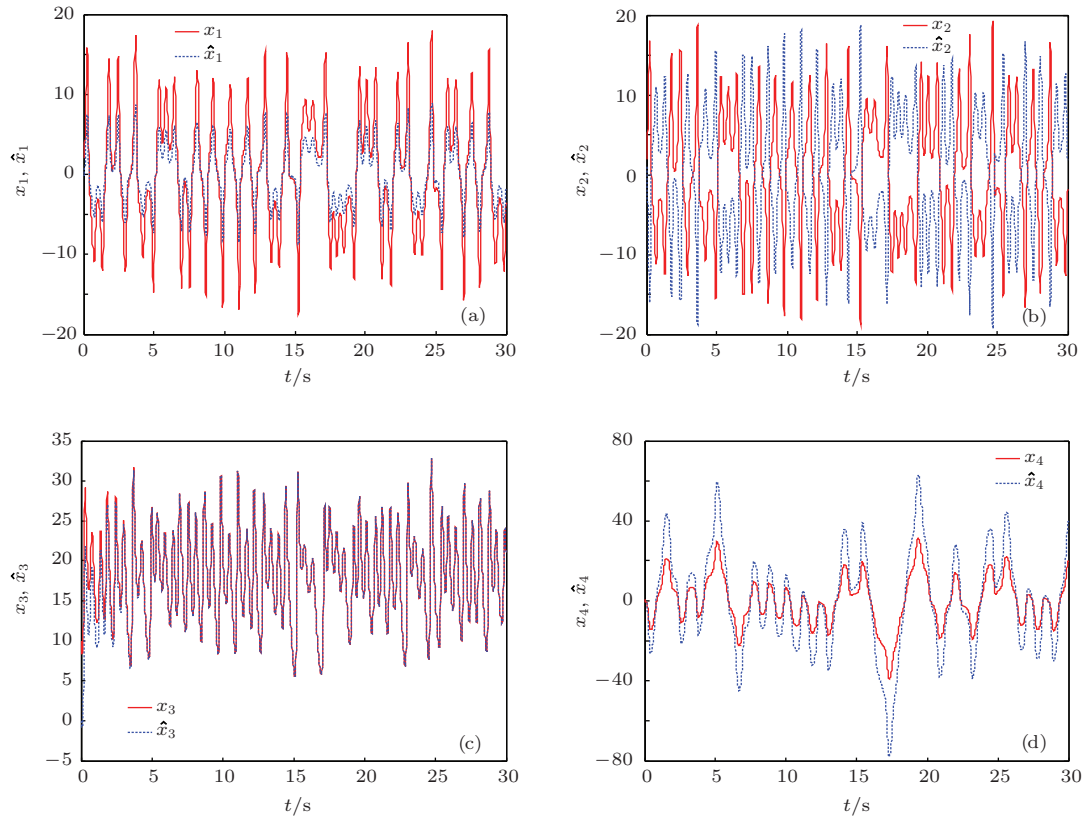


图6 函数矩阵为对角矩阵时的状态变量同步过程 (a) $x_1(t)$, $\hat{x}_1(t)$ 的响应曲线; (b) $x_2(t)$, $\hat{x}_2(t)$ 的响应曲线; (c) $x_3(t)$, $\hat{x}_3(t)$ 的响应曲线; (d) $x_4(t)$, $\hat{x}_4(t)$ 的响应曲线

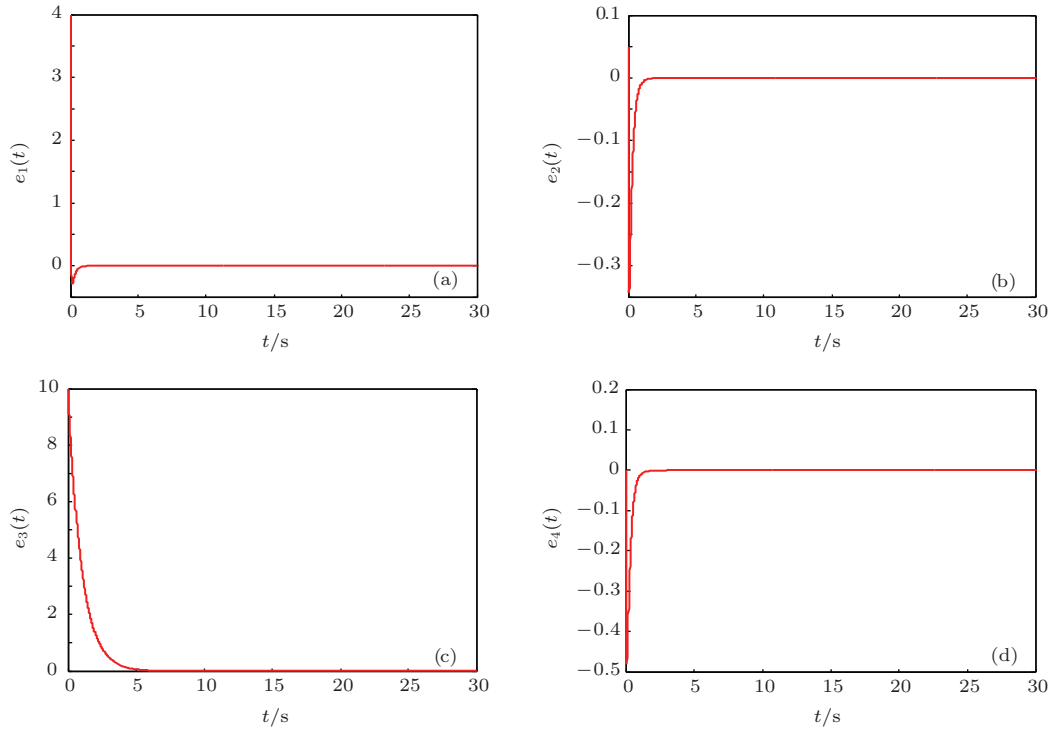


图7 函数矩阵为对角矩阵时的同步误差曲线 (a) $e_1(t)$ 的响应曲线; (b) $e_2(t)$ 的响应曲线; (c) $e_3(t)$ 的响应曲线; (d) $e_4(t)$ 的响应曲线

将 (23) 式与 (22) 式进行比较可得

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 28 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (24)$$

这里取误差动力系统 (11) 的特征值分别为: $-1, -41.11, -1$, 通过极点配置技术可得到反馈增益矩阵为

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 31.11 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{3} \end{bmatrix}, \quad (25)$$

则可得输出方程为

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \cdot x_3(t) \\ x_1(t) \cdot x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 31.11 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}. \quad (26)$$

由 (8) 式和 (4) 式可得到系统 (23) 的响应系统及其输出方程为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1(t) \\ \dot{\hat{x}}_2(t) \\ \dot{\hat{x}}_3(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \alpha_{11}(t) & \alpha_{12}(t) & \alpha_{13}(t) \\ \alpha_{21}(t) & \alpha_{22}(t) & \alpha_{23}(t) \\ \alpha_{31}(t) & \alpha_{32}(t) & \alpha_{33}(t) \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 28 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11}(t) & \alpha_{12}(t) & \alpha_{13}(t) \\ \alpha_{21}(t) & \alpha_{22}(t) & \alpha_{23}(t) \\ \alpha_{31}(t) & \alpha_{32}(t) & \alpha_{33}(t) \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. - \begin{bmatrix} \alpha_{11}(t) & \alpha_{12}(t) & \alpha_{13}(t) \\ \alpha_{21}(t) & \alpha_{22}(t) & \alpha_{23}(t) \\ \alpha_{31}(t) & \alpha_{32}(t) & \alpha_{33}(t) \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \\ \hat{x}_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11}(t) & \alpha_{12}(t) & \alpha_{13}(t) \\ \alpha_{21}(t) & \alpha_{22}(t) & \alpha_{23}(t) \\ \alpha_{31}(t) & \alpha_{32}(t) & \alpha_{33}(t) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\quad \times \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \cdot \hat{x}_3(t) \\ \hat{x}_1(t) \cdot \hat{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11}(t) & \alpha_{12}(t) & \alpha_{13}(t) \\ \alpha_{21}(t) & \alpha_{22}(t) & \alpha_{23}(t) \\ \alpha_{31}(t) & \alpha_{32}(t) & \alpha_{33}(t) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (\mathbf{y}(t - \tau) - \hat{\mathbf{y}}(t)), \quad (27) \end{aligned}$$

$$\hat{y}(t) = \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \cdot \hat{x}_3(t) \\ \hat{x}_1(t) \cdot \hat{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 31.11 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11}(t) & \alpha_{12}(t) & \alpha_{13}(t) \\ \alpha_{21}(t) & \alpha_{22}(t) & \alpha_{23}(t) \\ \alpha_{31}(t) & \alpha_{32}(t) & \alpha_{33}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \\ \hat{x}_3(t) \end{bmatrix}, \quad (28)$$

其中,

$$\alpha(t) = \begin{bmatrix} \alpha_{11}(t) & \alpha_{12}(t) & \alpha_{13}(t) \\ \alpha_{21}(t) & \alpha_{22}(t) & \alpha_{23}(t) \\ \alpha_{31}(t) & \alpha_{32}(t) & \alpha_{33}(t) \end{bmatrix}$$

取为假设1中的函数矩阵.

在基于函数矩阵的混沌系统滞后同步中, 响应系统(27)的状态变量按给定的函数矩阵 $\alpha(t)$ 滞后同步于驱动系统(23)的状态变量, 即响应系统(27)按给定的函数矩阵跟随驱动系统(23)演变, 但在时间上滞后于驱动系统 τ . 为了验证方法的有效性, 滞后时间取为 $\tau = 2$, $\alpha(t)$ 取为如下矩阵:

$$\alpha(t) = \begin{bmatrix} 1 + 0.5 \sin(2t) & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}. \quad (29)$$

由(10)式和(29)式可得

$$\|x_1(t - \tau) - (1 + 0.5 \sin(2t))\hat{x}_1(t) - 3\hat{x}_2(t)\| \rightarrow 0. \quad (30)$$

由(30)式可知, 驱动系统(23)的状态变量 $x_1(t - \tau)$ 同步于响应系统(27)状态变量的组合 $((1 + 0.5 \sin(2t))\hat{x}_1(t) + 3\hat{x}_2(t))$. 同理可得 $\|x_2(t - \tau) - 2\hat{x}_2(t)\| \rightarrow 0$, 响应系统的状态变量 $\hat{x}_2(t)$ 为驱动系统状态变量 $x_2(t - \tau)$ 的1/2. 系统(23)和(27)的滞后同步模拟结果如图8所示. 由图8可以看到, 响应系统状态变量滞后于驱动系统状态变量. 图9为滞后同步误差向量随时间 t 的变化. 由图9可知, 随着时间的增加, 基于函数矩阵的滞后同步误差向量渐近趋于零, 说明驱动系统与响应系统达到滞后完全渐近同步.

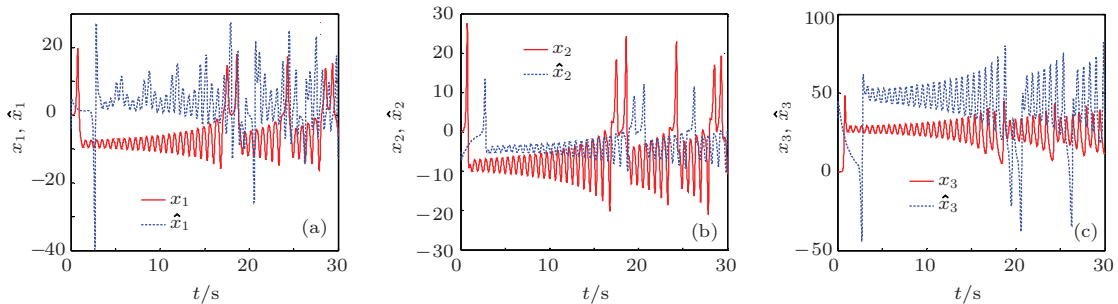


图8 滞后同步过程 (a) $x_1(t), \hat{x}_1(t)$ 响应曲线; (b) $x_2(t), \hat{x}_2(t)$ 的响应曲线; (c) $x_3(t), \hat{x}_3(t)$ 的响应曲线

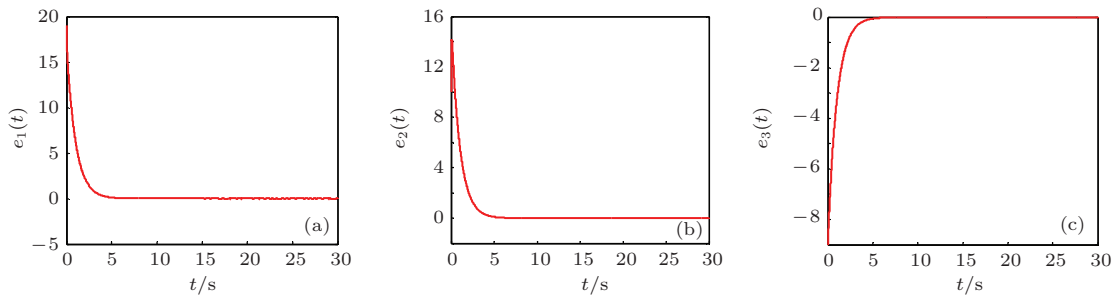


图9 滞后同步误差曲线 (a) $e_1(t)$ 的响应曲线; (b) $e_2(t)$ 的响应曲线; (c) $e_3(t)$ 的响应曲线

4 结 论

本文研究了基于函数矩阵的混沌同步问题. 本文的优点是利用线性系统稳定性理论和极点配置

技术, 实现两个混沌系统之间的函数矩阵同步, 并将其应用于混沌系统的滞后同步中. 通过上述理论, 可在安全保密通信中多一层时间尺度上的保障. 数值模拟结果表明: 基于函数矩阵的混沌系统

同步与滞后同步的误差向量都渐近趋于0, 说明驱动系统与响应系统之间实现渐近函数矩阵同步, 进一步验证了理论的正确性与方法的有效性. 本文方法可适用于含有更多状态变量的混沌系统之间的同步.

参考文献

- [1] Pecora L M, Canoll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
- [2] Han D, Zhu F L 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 120513 (in Chinese)[韩冬, 朱芳来 2013 物理学报 **62** 120513]
- [3] Zhao L D, Hu J B, Liu X H 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2305 (in Chinese)[赵灵冬, 胡建兵, 刘旭辉 2010 物理学报 **59** 2305]
- [4] Wang X Y, Wu X J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 605 (in Chinese)[王兴元, 武相军 2006 物理学报 **55** 605]
- [5] Mainieri R, Rehaced J 1999 *Phys. Rev. Lett.* **82** 3042
- [6] Li Z, Han C Z 2002 *Chin. Phys.* **11** 666
- [7] Li Z, Han C Z 2002 *Chin. Phys.* **11** 9
- [8] Gao X, Yu J B 2005 *Chaos Soliton. Fract.* **26** 141
- [9] Rosenblum M G, Pikovsky A S, Kurths J 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 4193
- [10] Akcakaya M, Nehorai A 2010 *IEEE Trans. Signal Process.* **58** 4994
- [11] Du H Y 2012 *Function Projective Synchronization of Chaotic Theory and Its Application in Secure Communication* (Heilongjiang: Heilongjiang University Press) p10 (in Chinese) [杜洪越 2012 混沌函数投影同步理论及其保密通信应用 (黑龙江: 黑龙江大学出版社) 第10页]
- [12] Xu D, Li Z 2002 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **12** 1395
- [13] Hu M F, Xu Z Y, Rong Z 2008 *Commun. Nonlinear Sci.* **13** 456
- [14] Li G H 2007 *Chaos Soliton. Fract.* **32** 1786
- [15] Zhang F F, Liu S T, Yu W Y 2013 *Chin. Phys. B* **22** 120505
- [16] Grassi G, Miller D A 2012 *Appl. Math. Comput.* **218** 6118
- [17] Meng J, Wang X Y 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5142 (in Chinese)[孟娟, 王兴元 2007 物理学报 **56** 5142]
- [18] Lorenz E N 1963 *J. Atmos. Sci.* **20** 130
- [19] Wang X Y, Wang M J 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5136 (in Chinese)[王兴元, 王明军 2007 物理学报 **56** 5136]
- [20] Ogorzalek M 1993 *IEEE Trans. Circuits I* **40** 693
- [21] Tigan G H 2005 *Scientific Bulletin of the Politehnica University of Timisoara* **50** 61
- [22] Wang Z, Sun W 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 020511 (in Chinese)[王震, 孙卫 2013 物理学报 **62** 020511]
- [23] Matsumoto T, Chua L O, Kobayashi K 1986 *IEEE Trans. Circuits I* **33** 1143

Synchronizing chaotic systems based on an arbitrary function matrix

Lin Li-Xiong Peng Xia-Fu[†]

(Department of Automation, Xiamen University, Xiamen 361005, China)

(Received 11 December 2013; revised manuscript received 13 January 2014)

Abstract

In this paper, we introduce a type of chaotic synchronization, where two chaotic systems are synchronized based on a function matrix. In particular, each drive system state synchronizes with a certain combination of response system states. Based on linear system theory and the pole placement technique, the scheme is given and illustrated with hyperchaotic Lorenz system and Lorenz chaotic system. Numerical simulations are carried out to verify the effectiveness of the proposed scheme.

Keywords: function matrix, chaos synchronization, lag synchronization

PACS: 05.45.Gg, 05.45.Pq, 05.45.Xt

DOI: 10.7498/aps.63.080504

[†] Corresponding author. E-mail: xfpeng@xmu.edu.cn