

# 新型椭圆形互补隐身斗篷设计\*

罗孝阳 刘道亚 姚丽芳 董建峰†

(宁波大学信息科学与工程学院, 宁波 315211)

(2013年11月14日收到; 2013年12月6日收到修改稿)

基于变换光学理论和互补媒质理论, 提出了新型椭圆形互补隐身斗篷的设计方法, 并得到了本构参数张量表达式. 利用基于有限元算法的电磁仿真软件对该模型进行了全波仿真验证, 结果证实了所得到的表达式的正确性. 这种隐身斗篷不仅能够实现对位于其内部的物体隐身, 而且电磁波能透进隐身斗篷内部进而可以与外界进行通信.

**关键词:** 变换光学, 互补媒质理论, 隐身斗篷

**PACS:** 41.20.Jb, 42.25.Bs, 78.20.Bh

**DOI:** 10.7498/aps.63.084101

## 1 引言

2006年Pendry等<sup>[1]</sup>基于Maxwell方程形式的不变性提出了用坐标变换的方法控制电磁波的传播, 进而提出了隐身斗篷的概念. 外部的电磁波能够平滑地绕过斗篷, 从而达到对斗篷内部物体的隐身. 同年, Leonhardt<sup>[2]</sup>提出了光学保角映射的方法来实现隐身. 该方法将光在物理空间中的传播映射到黎曼空间中, 选取适当的坐标转换函数, 使映射后介质的折射率满足一定的条件, 进而实现电大尺寸物体的透明现象, 并使隐身的不完美性降低到几何光学精度的极限值. 随后Schurig等<sup>[3]</sup>对Pendry提出的理论用射线追踪法进行了验证, 并基于异向介质在微波段实现了隐身斗篷. 随后人们利用坐标变换的方法对隐身斗篷进行了更深入的研究, 包括: 波的旋转装置<sup>[4]</sup>、椭圆形斗篷<sup>[5-9]</sup>、任意形状斗篷<sup>[10,11]</sup>、电磁波透明体<sup>[12]</sup>、电磁波聚焦体<sup>[13]</sup>等. 但是Pendry设计的这种隐身斗篷内部是通信盲区, 位于斗篷内部的物体无法与外界进行信息交流. Ma等<sup>[14]</sup>研究了开口隐身斗篷, 使得斗篷

内部的物体能够与外界进行信息交流, 但是却是牺牲了斗篷的完美隐身特性. 2009年Lai等<sup>[15]</sup>根据互补媒质理论并结合坐标变换的方法设计了外隐身斗篷, 只要在外隐身斗篷的互补层嵌入被隐身的物体的“反物体”就能够实现对外部物体的隐身. 这种隐身斗篷既能够使位于隐身斗篷外的物体隐身, 同时被隐身的物体也可以与外界进行通信. 但是这种外隐身斗篷需要嵌入特定的“反物体”才能够实现隐身, 隐身斗篷不能够隐身吸收电磁波的物体. 除此之外, 外隐身斗篷不能够对导体进行隐身, 因为导体的“反物体”很难定义. 此后Luo等<sup>[16]</sup>采用分层变换的思想研究了多区域隐身斗篷, 这种斗篷既能够对外部物体实现隐身也能够对内部的物体实现隐身, 这样就在一定程度上克服了单一隐身的缺陷. 但是这种多区域内-外隐身斗篷要实现内部与外部通信仍然需要通过“反物体”进行连接. 最近Yang等<sup>[17]</sup>根据互补媒质理论研究了一种互补型的内隐身斗篷, 这种斗篷继承了内隐身斗篷和外隐身斗篷的特性, 位于互补内隐身斗篷内部的物体不仅能够对外界隐身, 而且能够与外界通信.

对互补隐身斗篷几何形状的研究主要是圆柱

\* 国家自然科学基金(批准号: 61078060)、宁波市新型光电功能材料及器件创新团队(批准号: 2009B21007)和宁波大学王宽诚幸福基金资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: dongjianfeng@nbu.edu.cn

形, 这是因为圆柱形斗篷的结构具有高度的对称性. 此外也有研究任意几何形状的互补隐身斗篷, 并给出了斗篷本构参数一般表达式. 本文研究了一种新型的椭圆互补隐身斗篷, 采用了非正交椭圆坐标系对椭圆形互补斗篷的本构参数进行了推导, 并利用基于有限元算法的电磁仿真软件对该模型进行了全波仿真验证. 得到的椭圆形互补斗篷的本构参数表达式也可以用于实现圆形互补隐身斗篷.

## 2 理论分析与本构参数的推导

根据坐标变换的方法, 原坐标空间变换到新的坐标空间后, 新坐标空间的相对介电常数  $\varepsilon'$  和相对磁导率  $\mu'$  可以由以下表达式给出:

$$\begin{cases} \varepsilon' = \frac{\mathbf{A}\varepsilon\mathbf{A}^T}{\det(\mathbf{A})}, \\ \mu' = \frac{\mathbf{A}\mu\mathbf{A}^T}{\det(\mathbf{A})}, \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $\varepsilon$  和  $\mu$  分别为原坐标空间中的相对介电常数和相对磁导率,  $\mathbf{A}$  为 Jacobian 矩阵, 其内部分量  $A_{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j}$ , 是变换空间坐标对原空间坐标的导数.

在新椭圆形坐标系下的椭圆方程为

$$\left(\frac{x}{\alpha r}\right)^2 + \left(\frac{y}{\beta r}\right)^2 = 1, \quad (2)$$

其中椭圆沿  $x$  轴方向的半轴长度为  $\alpha r$ ; 沿  $y$  轴方向的半轴长度为  $\beta r$ ;  $\alpha, \beta \geq 1$ , 用来描述椭圆的纵横比;  $r$  为椭圆上任意一点到原点的距离. 新椭圆坐标系  $x^i(r, \varphi, z)$  与笛卡儿坐标系  $x^i(x, y, z)$  之间的关系为

$$x^{i'} = \begin{cases} r = \sqrt{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y}{\beta}\right)^2}, \\ \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{\alpha y}{\beta x}\right) \quad (i' = 1, 2, 3), \\ z = z. \end{cases} \quad (3)$$

这种新椭圆柱坐标系与圆柱坐标系类似, 常数  $r$  在  $x$ - $y$  平面上表示一系列轴比为  $\beta/\alpha$  的椭圆, 而常数  $\varphi$  表示一系列径向线. 该椭圆坐标系是非正交坐标系, 只有在  $\beta/\alpha = 1$  的时候才为正交坐标系, 而此时的坐标系是圆柱坐标系.

在新椭圆形坐标系下的坐标变换一般可表示为

$$r' = f(r), \quad \varphi' = \varphi, \quad z' = z, \quad (4)$$

其中  $f(r)$  是关于  $r$  的连续函数. 根据坐标变换的方法, 将式 (4) 式代入到 (1) 式, 得到斗篷相对介电常数和相对磁导率的一般表达式为

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{rr} &= \mu'_{rr} \\ &= \frac{rm}{r'} + \left(\frac{rm}{r'} - 1\right)g^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi, \end{aligned} \quad (5a)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{r\varphi} &= \mu'_{r\varphi} = (r' - rm) \left(\frac{\beta}{\alpha} \cos^2 \varphi + \frac{\alpha}{\beta} \sin^2 \varphi\right) \\ &\quad \times g \sin \varphi \cos \varphi, \end{aligned} \quad (5b)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{\varphi r} &= \mu'_{\varphi r} \\ &= \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{rm}\right) \left(\frac{\alpha}{\beta} \cos^2 \varphi + \frac{\beta}{\alpha} \sin^2 \varphi\right) \\ &\quad \times g \sin \varphi \cos \varphi, \end{aligned} \quad (5c)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{rr} &= \mu'_{rr} \\ &= \frac{r'}{rm} + \left(\frac{r'}{rm} - 1\right)g^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi, \end{aligned} \quad (5d)$$

$$\varepsilon'_{zz} = \mu'_{zz} = \frac{r}{r'm}, \quad (5e)$$

其中,  $m = \partial f/\partial r$ ,  $g = (\alpha/\beta - \beta/\alpha)$  为常数, 用于描述椭圆的对称性, 也称为椭圆的形状因子. 当  $g$  的值为负时, 椭圆为垂直椭圆; 当  $g$  的值为正时, 椭圆为水平椭圆; 当  $g = 0$  时, 椭圆就简化为圆形.  $g$  的值越是趋近于零, 椭圆的对称性就越高. (5a)–(5e) 式表明新椭圆柱坐标系下斗篷的本构参数张量不是对称的, 这是因为新椭圆柱坐标系不是对称的. 当形状因子  $g = 0$  时, 斗篷变为圆柱形斗篷, 此时的相对介电常数张量和相对磁导率张量就变为

$$\varepsilon' = \mu' = \begin{pmatrix} \frac{rm}{r'} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r'}{rm} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r}{r'm} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

新椭圆坐标系下的本构参数与笛卡儿坐标系下的本构参数之间的关系为

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{xx} &= \mu'_{xx} = \varepsilon'_{rr} \cos^2 \varphi + \varepsilon'_{\varphi\varphi} \sin^2 \varphi \\ &\quad - \left(r' \varepsilon_{\varphi r} + \frac{\varepsilon'_{r\varphi}}{r'}\right) \sin \varphi \cos \varphi, \end{aligned} \quad (7a)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{xy} &= \mu'_{xy} = \frac{\alpha}{\beta} \left[ (\varepsilon'_{rr} - \varepsilon'_{\varphi\varphi}) \sin \varphi \cos \varphi \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\varepsilon'_{r\varphi}}{r'} \cos^2 \varphi - r' \varepsilon'_{\varphi r} \sin^2 \varphi\right) \right], \end{aligned} \quad (7b)$$

$$\varepsilon'_{yx} = \mu'_{yx} = \frac{\beta}{\alpha} \left[ (\varepsilon'_{rr} - \varepsilon'_{\varphi\varphi}) \sin \varphi \cos \varphi \right.$$

$$+ \left( -\frac{\varepsilon'_{r\varphi}}{r'} \sin^2 \varphi + r' \varepsilon'_{\varphi r} \cos^2 \varphi \right) \Big], \quad (7c)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{yy} = \mu'_{yy} = \varepsilon'_{rr} \sin^2 \varphi + \varepsilon'_{\varphi\varphi} \cos^2 \varphi \\ + \left( r' \varepsilon_{\varphi r} + \frac{\varepsilon'_{r\varphi}}{r'} \right) \sin \varphi \cos \varphi, \end{aligned} \quad (7d)$$

$$\varepsilon'_{zz} = \mu'_{zz} = \frac{r}{r'm}. \quad (7e)$$

将(5a)—(5e)式代入到(7a)—(7e)式可以得到  $\varepsilon'_{xy} = \varepsilon'_{yx} = \mu'_{xy} = \mu'_{yx}$ , 这表明笛卡儿坐标系下斗篷的本构参数是对称的, 这是由于笛卡儿坐标系是正交对称坐标系.

椭圆形互补斗篷的模型如图1所示, 图中  $a, b, c$  分别为新椭圆坐标系下的坐标参数. 椭圆形互补隐身斗篷由三个同心椭圆环构成, 分为三个功能不同的区域, 最内层 ( $0 < r < a$ ) 的蓝色区域为隐身区域, 中间灰色的环形区域 ( $a < r < b$ ) 为互补层区域, 最外层 ( $b < r < c$ ) 为恢复层区域. 整个变换过程可分为两个步骤: 首先, 将互补区域折叠到隐身区域进行光学相消; 然后用恢复层对相消区域进行光路恢复.

根据上述互补隐身斗篷的设计原理, 椭圆形互补隐身斗篷互补层的边界条件为

$$f(0) = b, \quad f(a) = a, \quad (8)$$

对于变换函数  $f(r)$  可以有很多种, 在这里取  $f(r) = \frac{a-b}{a}r + b$ .

恢复层的边界条件为

$$\begin{aligned} f(0) &= b, \\ f(b) &= c, \end{aligned} \quad (9)$$

在这里变换函数取为  $f(r) = \frac{c-b}{c}r + b$ . 将(8)式和(9)式分别代入到(5a)—(5e)式和(7a)—(7e)式即可得到椭圆形互补隐身斗篷的本构参数表达式.

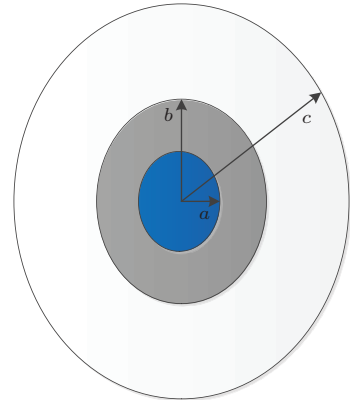


图1 椭圆形互补斗篷模型

### 3 仿真实验与讨论

为了进一步验证上述的推导, 对所得到的本构参数进行验证. 取  $a = 0.5 \text{ m}, b = 1 \text{ m}, c = 2 \text{ m}, \alpha = 1, \beta = 1.2$ , 考虑用 TE 平面波入射到斗篷中, 入射频率为  $0.6 \text{ GHz}$ . 用基于有限元算法的电磁仿真软件进行全波仿真. 图2(a)是在斗篷内部没有放置物体得到的仿真结果, 图2(b)是斗篷内部放置物体后得到的仿真结果. 从图2(a), (b)的仿真结果可以看出, 椭圆形互补斗篷周围的电场分布没有发生扰动, 能够对位于斗篷内部的物体隐身, 同时电磁波能够进入到斗篷的内部.

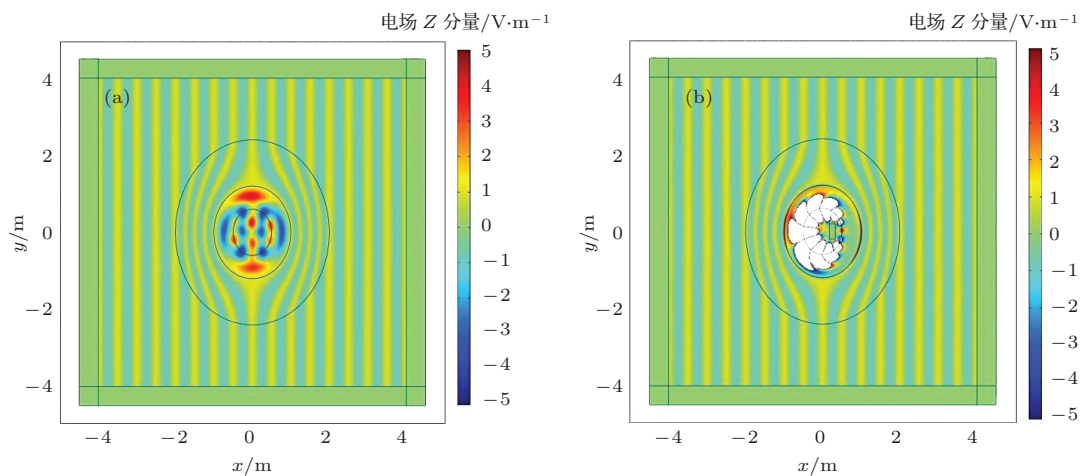


图2 (网刊彩色) 椭圆形互补斗篷的表面电场分布 (a) 斗篷内部没有放置物体; (b) 斗篷内部放置物体

为了进一步验证斗篷的隐身性能, 在  $(-3.5, -3.5)$  处放置一个电流为  $1\text{ A}$  的线电流源用于产生柱面波, 仿真结果如图 3 所示. 图 3(a), (b) 分别为斗篷内部没有放置物体和放置物体 ( $\epsilon = 4, \mu = 1$ ) 后的仿真结果. 从仿真结果可以看出, 放置物体后电磁波在斗篷的周围没有发生扰动并且电磁波能够到达隐身斗篷的内部. 这表明所设计的椭圆形互补隐身斗篷能够接收来自斗篷外部的柱面波, 同时位于斗篷内部的物体也能够达到对外界的隐身.

接下来进一步考虑当斗篷内部出现破损或者老化时对斗篷的性能所产生的影响. 首先考虑椭圆形互补隐身斗篷的互补层出现破损时对斗篷性能的影响. 图 4(a), (b) 分别为斗篷互补层出现破损没有放置物体和出现破损放置物体 ( $\epsilon = 4, \mu = 1$ ) 后的仿真结果. 从仿真结果可以看出, 当斗篷的互补层出现一定程度的破损时, 进入到斗篷内部的电

磁波减弱, 内部物体与外界通信效果将变差, 但是位于斗篷内部的物体仍然能够对外界完美隐身. 当互补层全部破损时, 即没有互补层存在, 这时电磁波将无法进入斗篷内部, 此时的斗篷就将变为 Pendry 所设计的封闭式斗篷.

椭圆形互补隐身斗篷的恢复层出现一定程度的破损时的仿真结果如图 5 所示. 从仿真结果可以看出, 当恢复层出现一定程度的破损时斗篷周围的电场分布出现扰动, 电磁波仍然能够进入到斗篷的内部. 当在斗篷内部放置物体时, 斗篷表面的电场分布与未放置物体时的电场分布相同, 这表明斗篷的恢复层出现一定程度的破损时依然能够对位于内部的物体达到良好的隐身效果, 这是由于互补层与物体的散射相消. 以上的仿真结果证实了本文用新椭圆坐标系推导的互补隐身斗篷的本构参数的正确性.

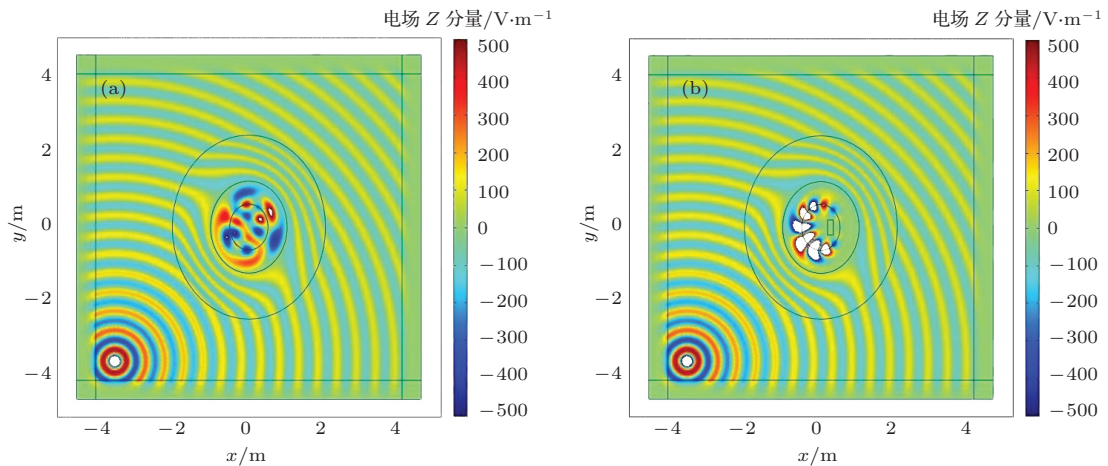


图 3 (网刊彩色) 柱面波照射下斗篷表面的电场分布 (a) 斗篷内没有放置物体; (b) 斗篷内放置物体 ( $\epsilon = 4, \mu = 1$ )

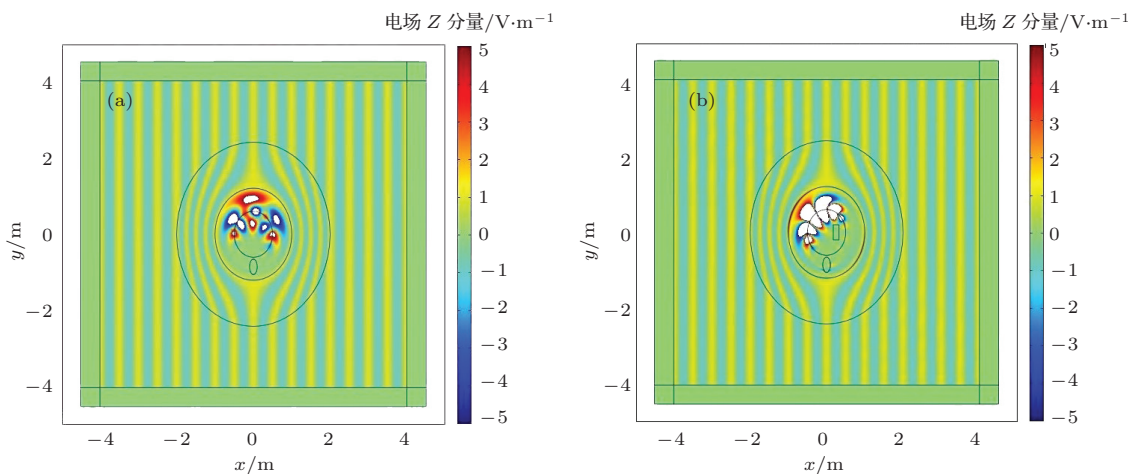


图 4 (网刊彩色) 有破损的隐身斗篷周围的表面电场分布 (a) 斗篷互补层有破损; (b) 破损斗篷内部放置物体 ( $\epsilon = 4, \mu = 1$ )



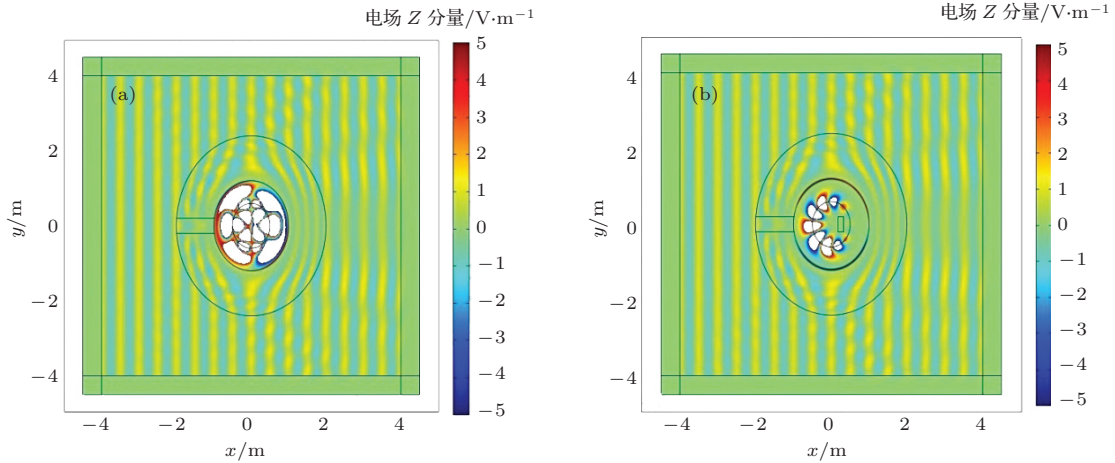


图5 (网刊彩色) 恢复层破损时斗篷表面电场分布 (a) 斗篷恢复层有破损; (b) 恢复层有破损并放置物体 ( $\epsilon = 4, \mu = 1$ )

## 4 结 论

本文采用非正交椭圆坐标系研究了椭圆形互补隐身斗篷, 推导了其本构参数的一般表达式, 并进行了仿真验证. 所设计的椭圆形互补隐身斗篷不仅能够对位于其内部物体隐身, 而且能够使位于其内部的物体与外界通信. 互补隐身斗篷在天线和传感器等需要被保护又要能够实现通信的器件设计当中具有重要意义, 本文利用新型椭圆坐标系设计的椭圆形互补隐身斗篷为设计此类斗篷提供了一种新的方法.

## 参考文献

[1] Pendry J B, Schurig D, Smith D R 2006 *Science* **312** 1780  
 [2] Leonhardt U 2006 *Science* **312** 1777  
 [3] Schurig D, Mock J J, Justice B J, Cummer S A, Pendry J B, Starr A F, Smith D R 2006 *Science* **314** 977

[4] Chen H Y, Chan C T 2007 *Appl. Phys. Lett.* **90** 241105  
 [5] Jiang W X, Cui T J, Yu G X, Lin X Q, Cheng Q, Jessie Y C 2008 *J. Phys. D: Appl. Phys.* **41** 085504  
 [6] Kwona D H, Werner D H 2008 *Appl. Phys.* **92** 013505  
 [7] Li C, Li F 2008 *Opt. Express* 2008 **16** 13414  
 [8] Ma H, Qu S, Xu Z, Zhang J, Chen B, Wang J 2008 *Phys. Rev. A* **77** 013825  
 [9] Yao K, Li C, Li F 2008 *Chin. Phys. Lett.* **25** 1657  
 [10] Zhang J J, Luo Y, Chen H S, Wu B L 2008 *J. Opt. Soc. Am. B* **25** 1776  
 [11] Gu C, Qu S B, Pei Z B, Xu Z, Liu J, Gu W 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 027801 (in Chinese)[顾超, 屈绍波, 裴志斌, 徐卓, 刘嘉, 顾巍 2011 物理学报 **60** 027801]  
 [12] Yu G X, Cui T J, Jiang W 2009 *J. Infrared. Millim. W.* **30** 633  
 [13] Rahm M, Schurig D, Roberts D A, Cummer S A, Smith D R, Pendry J B 2008 *Photonic. Nanostruct.* **6** 87  
 [14] Ma H, Qu S, Xu Z, Wang J 2009 *Appl. Phys. Lett.* **94** 103501  
 [15] Lai Y, Chen H Y, Zhang Z Q, Chan C T 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 093901  
 [16] Luo Y, Zhu S Z, He L X, Wang Y 2011 *J. Opt.* **13** 015105  
 [17] Yang J J, Huang M, Yang C F, Yu J 2011 *Eur. Phys. J. D* **61** 731

# Design of a novel elliptical complementary invisible cloak\*

Luo Xiao-Yang   Liu Dao-Ya   Yao Li-Fang   Dong Jian-Feng<sup>†</sup>

(College of Information Science and Engineering, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

( Received 14 November 2013; revised manuscript received 6 December 2013 )

## Abstract

A novel elliptical complementary invisible cloak is designed based on the transformation optics and the complementary media theory. The constitutive parameter tensor expressions have been obtained. The results of full-wave simulations by using finite-element software confirm the validity of the constitutive parameter tensor expressions. This invisible cloak can not only hide the objects inside the cloak, but also permit the electromagnetic wave penetrate into the cloak and communicate with the outside world.

**Keywords:** transformation optics, complementary media theory, invisible cloak

**PACS:** 41.20.Jb, 42.25.Bs, 78.20.Bh

**DOI:** [10.7498/aps.63.084101](https://doi.org/10.7498/aps.63.084101)

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61078060), the Innovative Research Team Program of Ningbo, China (Grant No. 2009B21007), and the K.C. Wong Magna Fund in Ningbo University, China.

† Corresponding author. E-mail: [dongjianfeng@nbu.edu.cn](mailto:dongjianfeng@nbu.edu.cn)