

## 晶体摆动场辐射及其共振线附近的粒子运动行为

杨杰<sup>†</sup> 李秀平 王善进 罗诗裕

(东莞理工学院电子工程学院, 东莞 523808)

(2013年11月5日收到; 2013年11月20日收到修改稿)

寻找新光源, 特别是短波长相干光源引起了人们的广泛注意. 利用晶体摆动场辐射作为短波长相干光源是最有可能的方案之一. 本文从势和场的观点出发, 把周期弯晶产生的离心力视为离心势, 将粒子运动方程化为 Duffing 型 Mathieu 方程, 从能量观点出发讨论了系统的稳定性. 用摄动法对共振线附近粒子的运动行为进行了分析; 揭示了系统的跳跃现象和不稳定行为. 结果表明, 系统的稳定性与其参数有关, 适当调节这些参数, 系统的分叉和不稳定性原则上可以避免.

**关键词:** 晶体摆动场辐射, 参数激励, 短波长激光, 非线性

**PACS:** 41.60.-m, 61.82.Rx, 61.85.+p

**DOI:** 10.7498/aps.63.084104

## 1 引言

20世纪90年代, Korol等<sup>[1-5]</sup>指出了在周期弯晶中运动的带电粒子, 除了产生自发的沟道辐射外, 还将产生相干的摆动场辐射, 强大的晶格场可以使这种辐射的能量很高. 由于摆动场辐射可望作为短波长相干光源, 引起了人们的广泛兴趣. 遗憾的是, 至今尚未获得可利用的 X-激光或  $\gamma$ -激光. 究其原因可能是技术问题, 也可能是物理问题. 物理问题 (稳定性问题) 一直是人们关心的核心问题之一, 我们曾用外激励方法对系统的稳定性进行过分析<sup>[6-10]</sup>. 本文试图用内激励 (参数激励) 方法再次对这个问题进行讨论. 从势和场的观点出发, 在经典力学框架内, 把粒子运动方程化为参数激励的 Mathieu 方程. 利用摄动法对粒子在共振线  $\nu = 1$  附近的运动行为进行了讨论; 从能量观点出发分析了系统的稳定性, 导出了系统的频率响应, 揭示了系统的跳跃现象和不稳定行为. 结果表明, 系统的不稳定性与其参数有关, 只需适当调节参数, 系统的稳定性就原则上可以得到保证.

## 2 运动方程

假设用声学方法已将晶体周期弯曲. 在周期弯晶中运动的带电粒子将不断向外辐射能量, 其中包含沟道辐射和摆动场辐射. 要成功引出可利用的摆动场辐射, 粒子的运动必须是稳定的. 影响粒子运动稳定性的因素很多, 有电子多重散射、晶格热振动和系统非线性等; 对于弯晶还有离心力. 在偶极近似下, 粒子运动可以用经典方法来描述. 把晶格场和离心力对粒子的作用等价于粒子在有效势场中的运动, 引入正弦平方势, 粒子的运动方程可化为

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + 2m\mu_0 \frac{dx}{dt} + \frac{\pi}{d} V_{\text{eff}} \sin \frac{2\pi x}{d} = 0, \quad (1)$$

其中  $m$  是粒子质量,  $\mu_0$  是阻尼系数,  $d$  是弯晶周期,  $V_{\text{eff}}$  是有效势阱深度. 参数的物理意义可进一步参考文献<sup>[11]</sup>. 在小振幅近似下, 方程 (1) 还可化为

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X}{d\tau^2} + (\nu^2 - 2q \cos(2\tau))X \\ = -2\mu \frac{dX}{d\tau} - \alpha X^3, \end{aligned} \quad (2)$$

其中

$$X = \frac{2\pi x}{d}, \quad \omega_0^2 = \frac{2\pi^2 V_{\text{eff}}}{md^2}, \quad b = \frac{pvd\kappa_0}{\pi V_{\text{eff}}},$$

<sup>†</sup> 通讯作者. E-mail: yjbqyx@126.com

$$\tau = \frac{\Omega_u t}{2}, \quad \nu^2 = \frac{4\omega_0^2}{\Omega_u^2}, \quad \alpha = \frac{2\omega_0^2}{3\Omega_u^2}, \quad (3)$$

而  $q = \frac{2b\omega_0^2}{\Omega_u^2}$  是激励强度. 方程 (2) 是一个带有激励项、阻尼项和非线性项的 Duffing 型 Mathieu 方程. 当系统的阻尼项和非线性项比较小时, 方程 (2) 可形式上表示为 (用  $\xi$  代替  $X$ )

$$\begin{aligned} & \frac{d^2\xi}{d\tau^2} + (\nu^2 - 2q \cos(2\tau))\xi \\ & = \varepsilon \left( -2\mu \frac{d\xi}{d\tau} - \alpha\xi^3 \right), \end{aligned} \quad (4)$$

其中  $\varepsilon$  是小参数, 表示伴随它的项是小项. 如果  $q$  也比较小, 方程 (4) 就是一个带有弱激励、弱阻尼和弱非线性的 Duffing 型参数激励方程.

### 3 近似解

#### 3.1 线性近似

在线性近似和无阻尼 ( $\varepsilon = 0$ ) 情况下, 方程 (4) 化为标准的 Mathieu 方程

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} + (\nu^2 - 2q \cos(2\tau))\xi = 0. \quad (5)$$

在参数  $(\nu^2, q)$  平面上, 系统出现了一系列稳定和不稳定区, 如图 1 所示. 当  $q \rightarrow 0$  时, 如果  $\nu^2 > 0$ , 系统是稳定的;  $\nu^2 < 0$  系统不稳定<sup>[12]</sup>. 不过, 随着  $q$  的增加, 即使  $\nu^2 < 0$ , 系统也可能是稳定的, 如图 1 原点附近略微向左弯的三角形区域. 由于方程 (5) 包含了  $\cos(2\tau)$ , 在  $\nu^2 > 0$  的右半平面内出现了一系列稳定区和不稳定区. 当  $q \rightarrow 0$  时, 这些不稳定区退化为一, 且全都落在  $q = 0$  的横轴上. 这些点由方程

$$\nu^2 = n^2 \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots) \quad (6)$$

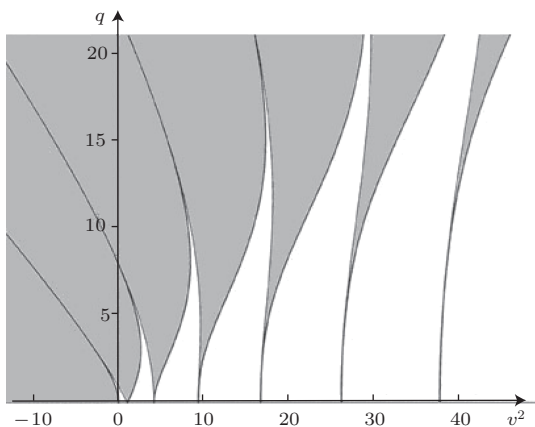


图 1 Mathieu 方程的稳定与不稳定区 (阴影区域)

给出, 并分别称为零阶、一阶和二阶等不稳定区. 当  $n = 1, 2, 3, \dots$  时, 相应的  $\omega_0 = \Omega_u/2, \Omega_u, 3\Omega_u/2, \dots$ , 系统存在整数共振或半整数共振, 工程设计应当尽量远离这些共振线.

#### 3.2 非线性近似

线性方程 (5) 决定了系统的基本特征. 稳定性分析表明, 仅当粒子的 Betatron 振动频率  $\nu$  远离共振线时系统才是稳定的. 但是任何一种扰动, 都可能使系统位于共振线附近, 对共振线附近的行为进行研究有很重要的实际意义. 下面利用多尺度法<sup>[13-16]</sup> 讨论系统 (4) 在  $\nu = 1$  附近的频率响应和共振行为. 令

$$\xi(\tau, \varepsilon) = \xi_0(T_0, T_1) + \varepsilon\xi_1(T_0, T_1) + \dots, \quad (7)$$

其中  $T_0 = \tau, T_1 = \varepsilon\tau$ . 将 (7) 式代入 (4) 式, 令  $\varepsilon$  的同次幂系数相等, 可得

$$D_0^2\xi_0 + \nu^2\xi_0 = 0, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & D_0^2\xi_1 + \nu^2\xi_1 \\ & = -2D_0D_1\xi_0 - 2\xi_0 \cos(2T_0) + f(\xi_0, D_0\xi_0), \end{aligned} \quad (9)$$

其中

$$f(\xi_0, D_0\xi_0) = -2\mu \frac{d\xi_0}{dT_0} - \alpha\xi_0^3. \quad (10)$$

方程 (8) 的一般解为

$$\xi_0 = A(T_1) \exp(i\nu T_0) + A^*(T_1) \exp(-i\nu T_0),$$

代入方程 (9), 可得

$$\begin{aligned} & D_0^2\xi_1 + \nu^2\xi_1 \\ & = -2i\nu A' \exp(i\nu T_0) - A^* \exp(i(-\nu + 2)T_0) \\ & \quad - A^* \exp(-i(\nu + 2)T_0) + cc + f[A \exp(i\nu T_0) \\ & \quad + A^* \exp(-i\nu T_0) \\ & \quad \times i\nu(A \exp(i\nu T_0) - A^* \exp(-i\nu T_0))], \end{aligned} \quad (11)$$

其中字母右上角的撇表示对  $T_1$  的微分. 为了描写共振线  $\nu = 1$  附近的行为, 可通过定义  $\nu + \varepsilon\sigma = 1$  引入解谐参数  $\sigma$ . 于是方程 (11) 中的  $(2 - \nu)T_0$  可表示为

$$(2 - \nu)T_0 = \nu T_0 + 2\varepsilon\sigma T_0 = \nu T_0 + 2\sigma T_1. \quad (12)$$

消去方程 (11) 中的久期项, 并利用 (10) 式可得

$$\begin{aligned} & 2i\nu A' = -A^* \exp(2i\sigma T_1) \\ & \quad + \frac{\nu}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f \exp(-i\nu T_0) dT_0. \end{aligned} \quad (13)$$

令  $A = \frac{1}{2}a \exp(i\beta)$ ,  $\phi = \nu T_0 + \beta$ , 代入 (13) 式, 将实部和虚部分开, 可得

$$a' = -\frac{a}{2\nu} \sin \psi - \frac{1}{2\pi\nu} \int_0^{2\pi} \sin(\phi f) \times (a \cos \phi, -\nu a \sin \phi) d\phi, \quad (14)$$

$$a\psi' = 2\sigma a - \frac{a}{\nu} \cos \psi + \frac{1}{\pi\nu} \int_0^{2\pi} \cos(\phi f) \times (a \cos \phi, -\nu a \sin \phi) d\phi, \quad (15)$$

其中  $\psi = 2\sigma T_1 - 2\beta$ . 系统的一次近似解可表示为

$$\xi = a \cos(\nu T_0 + \beta) + O(\varepsilon),$$

$a$  和  $\beta$  由方程 (14), (15) (通过  $\psi = 2\sigma T_1 - 2\beta$ ) 给出. 将 (10) 式代入 (14) 和 (15) 式, 完成积分可得

$$a' = -\frac{a}{2\nu} \sin \psi - \mu a, \quad (16)$$

$$a\psi' = 2\sigma a - \frac{a}{\nu} \cos \psi - \frac{3\alpha}{4\nu} a^3. \quad (17)$$

### 3.3 稳定性

从方程 (16), (7) 和 (4) 可以看出, 我们关心的问题已从一个二阶微分方程 (2) 转化为两个一阶微分方程 (16) 和 (17). 但是, 由于方程右边既是  $a$  的函数, 又是  $\psi$  的函数, 要把它积分到最终形式仍然是很困难的. 根据 Poincare 定理, 不积分方程也可得到若干重要结果. 比如, 当我们关心的是系统“长时间”后的行为 (稳定振动) 时, 情况就变得比较简单. 对于稳定振动, 系统的振幅  $a$  和相位  $\psi$  为常数, 即  $a' = 0$  和  $\psi' = 0$ . 事实上, 数值分析表明, 开始时  $a$  和  $\psi$  是振荡的, 随着时间的增加  $a$  和  $\psi$  逐渐趋于平稳. 对于稳定振动, 方程 (16) 和 (17) 化为

$$\begin{aligned} \sin \psi &= -2\nu\mu, \\ \cos \psi &= 2\sigma\nu - \frac{3}{4}\alpha a^2. \end{aligned} \quad (18)$$

将 (18) 式的两式平方相加, 消去三角函数, 可得

$$a = \left[ \frac{8\sigma}{3\alpha} \pm \frac{4}{3\alpha} (1 - 4\mu^2)^{1/2} \right]^{1/2}, \quad (19)$$

或

$$a = \left[ \frac{8\hat{\sigma}}{3\hat{\alpha}} \pm \frac{4}{3\hat{\alpha}} (q^2 - 4\hat{\mu}^2)^{1/2} \right]^{1/2}, \quad (20)$$

其中  $\hat{\sigma} = q\sigma$ ,  $\hat{\alpha} = q\alpha$ ,  $\hat{\mu} = q\mu$ . 方程 (19) 和 (20) 是振幅  $a$  的二次方程, 要静态解存在必须有  $a^2 > 0$ . 这就要求  $2\hat{\mu} < q$  和  $\frac{8\hat{\sigma}}{3\hat{\alpha}} \pm \frac{4}{3\hat{\alpha}} (q^2 - 4\hat{\mu}^2)^{1/2} > 0$ . 前者意味着只有激励振幅大于衰减强度时, 系统才可

能存在稳定振荡. 后者要求  $\hat{\sigma} > \frac{1}{2}(q^2 - 4\hat{\mu}^2)^{1/2}$  时, 系统有两个静态解存在, 当  $|\hat{\sigma}| < \frac{1}{2}(q^2 - 4\hat{\mu}^2)^{1/2}$  时则只存在一个静态解. 可见

$$|\hat{\sigma}| = \frac{1}{2}(q^2 - 4\hat{\mu}^2)^{1/2} \quad (21)$$

描写了系统的临界特征. 图 2 给出了阻尼系数  $\hat{\mu} = 0.1$  时, 激励强度  $q$  与解谐参数  $\hat{\sigma}$  (或系统频率) 之间的关系. 从图 2 可以看出, 三条曲线  $\hat{\sigma} = \pm \frac{1}{2}(q^2 - 4\hat{\mu}^2)^{1/2}$  和  $q = 2\hat{\mu}$  把参数平面  $(q, \hat{\sigma})$  分成了三个区域. 在边界上系统的行为与非线性无关. 在区域 I 中, 不管初始振幅多大, 系统对初始扰动的响应总是衰减的; 在区域 II 中, 线性系统对初始扰动的响应无限增长, 而非线性系统对初始扰动的响应则是有界的; 在区域 III 中, 非线性响应要不衰减, 要不趋于稳定振荡, 而线性响应则总是衰减的. 注意到, 由于非线性系统振幅与相位有关, 因而相位变化将导致振幅变化, 进而导致系统能量变化. 下面从能量的观点出发对此做进一步讨论. 在区域 I 中, 不管初始振幅多大, 系统相位都不发生变化, 因而振幅和能量也不发生变化, 这就意味着外力做功与系统自身的消耗正好抵消. 在区域 II 中, 外力做功总是比自身的消耗要大, 因此, 系统对初始扰动的线性响应增加, 且是无界的; 由于非线性系统振幅和相位的相关性, 系统的非线性将限制振幅的进一步增长, 系统呈现出了有界的谐波响应. 如果初始扰动比较大, 系统的非线性响应是衰减的, 直至稳定的静态解出现; 如果初始扰动比较小, 系统近似是线性的, 而线性系统响应则总是增长的. 值得注意的是, 随着振幅的增长, 系统的非线性逐渐增强, 振幅增长受到限制, 且随着非线性的加强, 响应出现衰减, 直至稳定的静态解出现. 这就是说, 在区域 II 中对所有初始扰动 (不管这种扰动是大是小) 的响应, 系统都趋于相同的静态解, 这个静态解就是系统的极限环. 在区域 III 中, 系统可出现区域 I 和 II 类似的响应特征. 在这个区域中系统的线性响应总是衰减的, 与区域 I 类似; 而系统的非线性响应则存在两个静态解, 振幅较大的一个是稳定的, 较小的一个不稳定. 分析表明, 系统存在某个临界扰动, 系统对这个扰动的非线性效应不敏感, 其基本特征是线性的或拟线性的. 当初始扰动偏离这个临界振幅时, 系统表现出了明显的非线性. 系统的非平凡的静态解把区域 II 和 III 分开, 而区域 II 和 III 的边界 (图 2 中的虚线) 对应于不稳定

的极限环 [16].

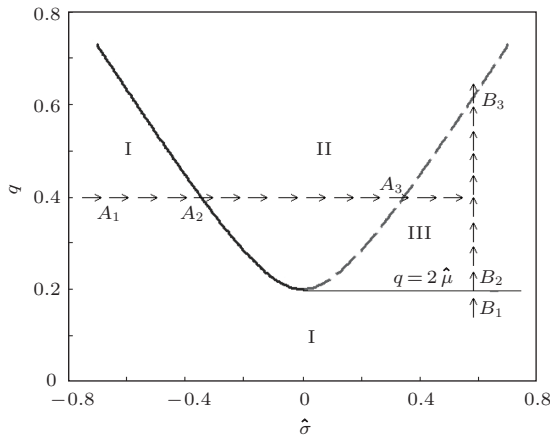


图2 Duffing型参数激励系统在参数空间中的三个区域

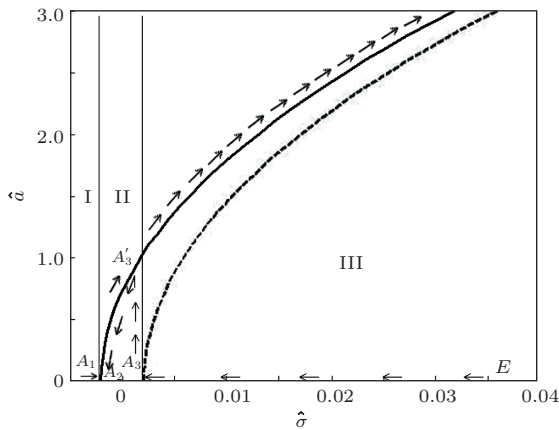


图3 Duffing型参数激励系统的频率响应曲线

### 3.4 频率响应

图3给出了阻尼系数  $\hat{\mu} = 0.1$ 、非线性系数  $\alpha = 0.01$  时, 系统的振幅  $\hat{a}$  与解谐参数 (或系统频率) 之间的关系, 这条曲线称为频率响应曲线或共振曲线. 实线和虚线分别示系统的稳定解和不稳定解. 从图3可以看出, 共振曲线不闭合、且向右弯曲. 当激励强度  $q$  保持不变, 激励频率  $\hat{\sigma}$  从小到大或从大到小变化时, 系统将出现跳跃现象. 当  $\hat{\sigma}$  从小到大位于点  $A_1$  和  $A_2$  之间时, 系统只有一个 (稳定的) 平凡解存在; 从点  $A_2$  开始, 系统存在两个解 (分叉), 振幅较大的一个是稳定的, 较小的一个是不稳定的 (平凡解); 当  $\hat{\sigma}$  增加时, 系统将沿着曲线  $A_2A_3'$  变化直到无穷. 相反, 当  $\hat{\sigma}$  从大到小变化时, 系统将沿着  $EA_3$  变化, 平凡解是稳定的, 在  $A_3$  点平凡解变得不稳定, 当  $\hat{\sigma}$  继续减小时振幅发生突变, 并从  $A_3$  跳跃到  $A_3'$ ; 当  $\hat{\sigma}$  继续减小时, 系统将沿曲线  $A_3'A_2$  变化直到  $A_2$  点, 随着  $\hat{\sigma}$  继续减小, 系统回

到初始的平凡解状态.

值得注意的是, 系统通过分叉和跳跃回到原来状态时过程是不可逆的, 这种不可逆性正好揭示了系统的弛豫行为. 弛豫现象在自然界中普遍存在, 在光电子技术中也经常碰到, 双稳态光电子器件便是典型例子. 对于晶体摆动场辐射来说, 跳跃应当尽量避免, 因为跳跃就意味着不稳定. 事实上, 有工作表明 [8], 系统从点  $A_2$  开始出现倍分叉, 并通过级联分叉进入混沌状态. 为了得到稳定的摆动场辐射, 分叉和混沌都不允许存在. 幸好, 系统的稳定性与参数有关, 适当调整参数, 系统稳定性就可望得到保证. 事实上, 从 (19) 和 (20) 式可以看出, 系统响应与系统阻尼、非线性大小、激励强度和离开共振线的程度等因素有关, 适当调节这些参数, 就可望改善和提高系统的稳定性.

## 4 结 论

本文从不同角度对系统的稳定性进行了讨论. 从势和场的观点出发, 把晶体弯曲产生的离心力视为离心势, 将一个外激励问题化为内激励问题, 对系统的稳定性做了进一步分析. 在经典力学框架内, 把粒子运动方程化为Duffing型的Mathieu方程. 用摄动法分析了粒子在共振线附近的行为, 并从能量观点出发讨论了系统的稳定性. 结果表明, 系统的频率响应存在分叉和跳跃, 揭示了系统不可逆性、不稳定性和弛豫特征; 系统的稳定性与它的参数有关, 只需适当调节这些参数, 系统的不稳定性原则上就可以避免.

### 参考文献

- [1] Korol A V, Solovyov A V, Greiner W 2008 *Nucl. Inst. Methods Phys. Res. B* **266** 1173
- [2] Korol A, Solovyov A V, Greiner W 2006 *Advanced Radiation Sources and Applications* (Netherlands: Undulators, Springer) pp165-189
- [3] Tabrizi M, Korol A V, Solovyov A V 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 164801
- [4] Korol A V, Solovyov A V, Greiner W 2004 *Int. J. Mod. Phys. E* **13** 867
- [5] Korol A V Solov'yov A V Greiner W 2013 *Springer Series on Atomic, Optical, and Plasma Physics* (Berlin: Spinger) p473
- [6] Luo S Y, Shao M Z 2009 *Chin. J. Laser* **36** 1378 (in Chinese) [罗诗裕, 邵明珠 2009 中国激光 **36** 1378]

- [7] Wang S J, Wu M Y, Luo S Y, Zhang W F, Luo X H, Shao M Z 2010 *Acta Opt. Sin.* **30** 180 (in Chinese) [王善进, 吴木营, 罗诗裕, 张伟风, 罗晓华, 邵明珠 2010 光学学报 **30** 180]
- [8] Luo S Y, Shao M Z, Luo X H 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2685 (in Chinese) [罗诗裕, 邵明珠, 罗晓华 2010 物理学报 **59** 2685]
- [9] Luo S Y, Shao M Z, Luo X H 2010 *Sci. China G: Phys. Mech. Astron.* **40** 207 (in Chinese) [罗诗裕, 邵明珠, 罗晓华 2010 中国科学 G: 物理学, 力学, 天文学 **40** 207]
- [10] Shao M Z, Luo S Y, Wang H C 2009 *Chin. J. Lasers* **36** 2888 (in Chinese) [邵明珠, 罗诗裕, 王红成 2009 中国激光 **36** 2888]
- [11] Li X P, Wang S J, Chen Q, Luo S Y 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 224102 (in Chinese) [李秀平, 王善进, 陈琼, 罗诗裕 2013 物理学报 **62** 224102]
- [12] Liu H Z, Luo S Y, Shao M Z 2013 *Chin. Phys. B* **22** 047807
- [13] Nayfeh A H 1981 *Introduction to Perturbation Techniques* (New York: John Wiley & Sons.) p182
- [14] Luo X H, He W, Shao M Z, Luo S Y 2013 *Chin. Phys. B* **22** 064210
- [15] Liu H Z, Luo S Y, Shao M Z 2013 *Chin. Phys. B* **22** 047807
- [16] Nayfeh A H, Mook D T 1979 *Nonlinear Oscillations* (New York: John Wiley & Sons.) p216

## Crystalline undulator radiation and motion behavior in the vicinity of the resonance line

Yang Jie<sup>†</sup> Li Xiu-Ping Wang Shan-Jin Luo Shi-Yu

(College of Electronic Engineering, Dongguan University of Technology, Dongguan 523808, China)

( Received 5 November 2013; revised manuscript received 20 November 2013 )

### Abstract

Searching for new light source, especially short wave-length coherence light source has attracted extensive attention. The using of the crystalline undulator radiation as a short wave-length coherence light source is most likely to be one of the options. From the viewpoints of potential and field, the centrifugal force generated by periodic bent crystal is regarded as centrifugal potential, the particle motion equation is reduced to Mathieu equation with Duffing-type, and from the energy viewpoint the stability of the system is discussed. The behaviors of particles in the vicinity of the resonance are analyzed by perturbation method; the jump phenomena and instable behavior are revealed. The results show that the stability of the system is related to its parameters, and only properly adjusting these parameters, the bifurcation and instability for the system can be avoided in principle.

**Keywords:** crystalline undulator radiation, parametric excitation, short-wavelength laser, nonlinearity

**PACS:** 41.60.-m, 61.82.Rx, 61.85.+p

**DOI:** 10.7498/aps.63.084104

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: [yjbqyhx@126.com](mailto:yjbqyhx@126.com)