

# 黏性、表面张力和磁场对 Rayleigh-Taylor 不稳定性气泡演化影响的理论分析

李源 罗喜胜<sup>†</sup>

(中国科学技术大学近代力学系, 先进推进实验室, 合肥 230026)

(2013年10月26日收到; 2013年12月4日收到修改稿)

采用理论分析的方法考察了磁场中非理想流体中 Rayleigh-Taylor (RT) 不稳定性气泡的演化过程. 在与磁场垂直的平面中, 综合考虑流体黏性和表面张力的影响, 推导了二维非理想磁流体 RT 不稳定性气泡运动的控制方程组, 给出了不同情况下气泡速度的渐近解和数值解, 分析了流体黏性、表面张力和磁场对气泡发展的影响. 分析结果表明: 流体黏性和表面张力能够降低气泡速度和振幅, 即能够抑制 RT 不稳定性; 而磁场对 RT 不稳定性的影响是由非线性部分引起的, 并且磁场非线性部分的方向决定了磁场是促进还是抑制 RT 不稳定性的发展.

**关键词:** Rayleigh-Taylor 不稳定性, 黏性, 表面张力, 磁场

**PACS:** 52.35.Py, 47.20.Ma, 52.57.Fg

**DOI:** 10.7498/aps.63.085203

## 1 引言

当两种不同密度流体交界面(重流体在轻流体上方)受到扰动时, 在重力的作用下, 会发生 Rayleigh-Taylor (RT) 不稳定性现象<sup>[1]</sup>. 其中, 轻流体在重流体中发展成“气泡”, 重流体在轻流体中发展成“尖钉”. 这种不稳定性在惯性约束核聚变(ICF)和天文现象<sup>[2,3]</sup>中扮演了重要角色, 因此研究 RT 不稳定性具有重要的学术意义和应用背景.

对于 RT 不稳定性现象, 国内外许多学者已经进行了大量的研究. Rayleigh<sup>[4]</sup>考察了理想流体中小扰动线性化阶段的 RT 不稳定性, 并得出线性阶段下扰动呈指数增长的结论; Chandrasekhar<sup>[5]</sup>进一步考察了黏性和表面张力的影响, 发现在线性理论下, 它们对不稳定性起到抑制作用; Zhang 等<sup>[6]</sup>考察了剪切流和磁场的影响, 发现不垂直于波矢的磁场对 RT 不稳定性起到抑制作用, 而剪切流促进了不稳定性的发展, 两者之间存在竞争关系. 由于线性理论只适用于不稳定性发展前期, 为了研

究后期非线性发展规律, Layzer<sup>[7]</sup>提出了势流理论模型, 通过估计气泡顶部轻重流体的速度势, 得到气泡发展过程; Zufria<sup>[8]</sup>提出了另一种势流理论模型, 在这个模型中, 气泡被看成自由流中的一个点源, 通过复速度势可得到不稳定性的发展过程. 基于这两种模型, 后人做了很多工作. Goncharov<sup>[9]</sup>, Sohn<sup>[10]</sup> 和 Tao 等<sup>[11]</sup>将这两种模型推广到任意 Atwood 数(重轻流体密度之差与重轻流体密度之和的比值), 得到的理论解与数值模拟和实验结果都符合得很好. Banerjee 等<sup>[12]</sup>推导了有限区域的非线性 RT 不稳定性增长理论, 得到在给定重流体层厚度的情况下气泡速度与轻流体层厚度无关的结论. 为了评估黏性和表面张力对非线性 RT 不稳定性的影响, Sohn<sup>[13]</sup>, Gupta 等<sup>[14]</sup>, Huo 等<sup>[15]</sup> 和 Cao 等<sup>[16,17]</sup>将这两种模型应用到非理想流体中, 发现黏性和表面张力都会降低气泡的渐近速度, 黏性足够大时, 气泡的渐近速度衰减为0. Khan 等<sup>[18]</sup>考察了二维理想磁流体中垂直于平面的磁场对 RT 不稳定性的影响, 发现在非线性效应下, 磁场会影响气泡速度的发展过程.

<sup>†</sup> 通讯作者. E-mail: xluo@ustc.edu.cn

综上所述,前人主要考虑单项效应(磁场、黏性或表面张力)对RT不稳定性的影响,而且关于磁场中非理想流体的RT不稳定性的非线性发展过程的相关研究也比较少.本文基于Khan等<sup>[18]</sup>的模型,在垂直于磁场的平面中综合考虑黏性和表面张力对RT不稳定性气泡的作用,推导了二维非理想磁流体气泡运动的控制方程组,并给出了不同情况下气泡速度的渐近解.通过数值求解控制方程组,可以得到气泡各参量随时间的变化过程,同时结合无量纲化方法,还研究了流体黏性、表面张力和磁场对气泡速度的影响.

## 2 问题描述和基本方程

设二维  $x$ - $z$  平面中充满两种密度不同、不可压缩、无旋的黏性流体.如图1(a),初始未扰动时,两

种流体的交界面在  $z = 0$  处.其中,重流体在界面上方,密度为  $\rho_h$ ;轻流体在界面下方,密度为  $\rho_l$ .重力加速度沿  $z$  轴负方向,大小为  $g$ .

磁场与平面垂直,即沿  $y$  轴方向,分布如下:

$$\mathbf{B} = \begin{cases} (0, B_h(x, z, t), 0) & (z > 0) \\ (0, B_l(x, z, t), 0) & (z < 0) \end{cases}. \quad (1)$$

故磁场散度方程

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2)$$

自动成立.界面被扰动后,形成气泡(尖钉),在气泡(尖钉)顶部附近,界面形式为

$$z = \eta(x, t) = \eta_0(t) + \eta_2(t)x^2, \quad (3)$$

其中,  $\eta_0 > 0$  ( $< 0$ )且  $\eta_2 < 0$  ( $> 0$ ),如图1(b)所示.两种流体交界面处存在表面张力,表面张力系数为  $\sigma$ .

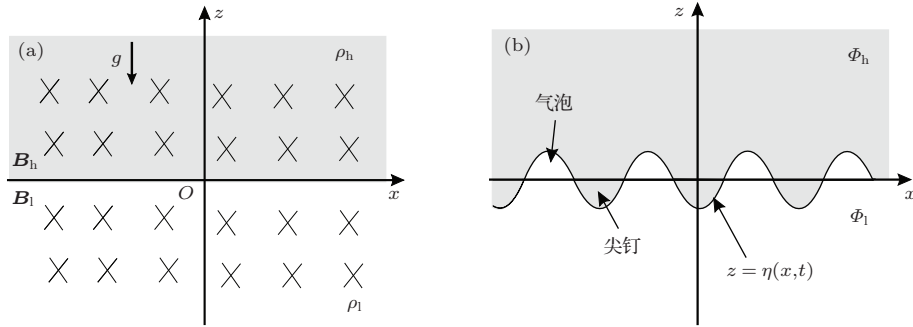


图1 界面扰动前初始流场(a)和界面扰动后流场(b)示意图,其中,重流体密度为  $\rho_h$ ,轻流体密度为  $\rho_l$ ,重流体中磁场为  $\mathbf{B}_h$ ,轻流体中磁场为  $\mathbf{B}_l$ ,重力加速度为  $g$ ,气泡的重流体速度势为  $\phi_h$ ,轻流体速度势为  $\phi_l$ ,扰动界面为  $z = \eta(x, t)$

由于流动无旋且不可压,故存在速度势  $\phi$ ,满足

$$\Delta \phi = \phi_{xx} + \phi_{yy} = 0. \quad (4)$$

Goncharov<sup>[9]</sup>给出了气泡的重(轻)流体速度势形式,分别为

$$\phi_h(x, z, t) = a_1(t) \cos(kx) e^{-k(z-\eta_0(t))}, \quad (5)$$

$$\phi_l(x, z, t) = b_0(t)y + b_1(t) \cos(kx) e^{k(z-\eta_0(t))}. \quad (6)$$

交界面处,两种流体的法向速度相等,故有

$$\eta_t + (\phi_h)_x \eta_x = (\phi_h)_z, \quad (7)$$

$$(\phi_h)_x \eta_x - (\phi_l)_x \eta_x = (\phi_h)_z - (\phi_l)_z. \quad (8)$$

将(3),(5)及(6)式代入(7)和(8)式,进行Taylor展开,并忽略  $x^i$  高阶项 ( $i \geq 3$ ),得到

$$a_1 = -\frac{\dot{\eta}_0}{k}, \quad (9)$$

$$b_0 = \frac{12\dot{\eta}_0\eta_2}{6\eta_2 - k}, \quad (10)$$

$$b_1 = -\dot{\eta}_0 \frac{6\eta_2 + k}{k(6\eta_2 - k)}, \quad (11)$$

$$\dot{\eta}_2 = -k \left( 3\eta_2 + \frac{k}{2} \right) \dot{\eta}_0. \quad (12)$$

流体的运动可由磁流体方程组描述:

$$\rho \frac{d\nabla\phi}{dt} = -\nabla p - \rho g \hat{z} + \mu \Delta(\nabla\phi) + \frac{1}{\mu_e} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}, \quad (13)$$

其中,  $\mu$  为黏性系数,  $\mu_e$  为磁导率.

将(1),(4)式代入(13)式中,得到

$$\rho \left( \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{|\nabla\phi|^2}{2} + gz \right) = -p - \frac{B^2}{2\mu_e} + f(t), \quad (14)$$

故界面处 Bernoulli 方程为

$$\left[ \left[ \rho \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{|\nabla \phi|^2}{2} + gz \right) + p + \frac{B^2}{2\mu_e} \right] \right] = h(t), \quad (15)$$

其中,  $[[Q]] = Q_h - Q_l$ .

磁感应方程为

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\nabla \phi \times \mathbf{B}). \quad (16)$$

将 (1), (5), (6) 式代入 (16) 式, 可以得到

$$\frac{\partial B_{h(l)}}{\partial t} + \frac{\partial \phi_{h(l)}}{\partial x} \frac{\partial B_{h(l)}}{\partial x} + \frac{\partial \phi_{h(l)}}{\partial z} \frac{\partial B_{h(l)}}{\partial z} = 0. \quad (17)$$

采用 Gupta<sup>[19]</sup> 给出的磁场形式

$$B_h(x, z, t) = \beta_{h0}(t) + \beta_{h1}(t) \cos(kx) e^{-k(z-\eta_0(t))} \quad (z > 0), \quad (18)$$

$$B_l(x, z, t) = \beta_{l0}(t) + \beta_{l1}(t) \cos(kx) e^{k(z-\eta_0(t))} \quad (z < 0). \quad (19)$$

将 (18), (19) 式代入 (17) 式, 进行 Taylor 展开, 并忽略  $x^i$  高阶项 ( $i \geq 3$ ), 结合 (9)—(12) 式得到

$$\dot{\beta}_{h0}(t) + \dot{\beta}_{h1}(t) = 0, \quad (20)$$

$$\dot{\beta}_{l0}(t) + \dot{\beta}_{l1}(t) = 0, \quad (21)$$

$$\frac{\dot{\beta}_{h1}(t)}{\beta_{h1}(t)} = \frac{k\dot{\eta}_0 \left( \eta_2 - \frac{k}{2} \right)}{\eta_2 + \frac{k}{2}}, \quad (22)$$

$$\frac{\dot{\beta}_{l1}(t)}{\beta_{l1}(t)} = \frac{k\dot{\eta}_0 \left( \eta_2 + \frac{k}{2} \right) \left( \eta_2 + \frac{k}{6} \right)}{\left( \eta_2 - \frac{k}{2} \right) \left( \eta_2 - \frac{k}{6} \right)}. \quad (23)$$

由 (20) 和 (21) 式可知, 磁场的  $x^0$  分量并不会随着时间改变, 即

$$\beta_{h(l)0}(t) + \beta_{h(l)1}(t) = \text{const} = B_{h(l)0}. \quad (24)$$

将非线性效应产生的磁场无量纲化, 并定义为  $\delta B_{h(l)} = \beta_{h(l)1}/B_{h(l)0}$ . 根据 (24) 式, 可将 (22), (23) 式分别写成

$$\frac{\delta \dot{B}_h(t)}{\delta B_h(t)} = \frac{k\dot{\eta}_0 \left( \eta_2 - \frac{k}{2} \right)}{\eta_2 + \frac{k}{2}}, \quad (25)$$

$$\frac{\delta \dot{B}_l(t)}{\delta B_l(t)} = \frac{k\dot{\eta}_0 \left( \eta_2 + \frac{k}{2} \right) \left( \eta_2 + \frac{k}{6} \right)}{\left( \eta_2 - \frac{k}{2} \right) \left( \eta_2 - \frac{k}{6} \right)}. \quad (26)$$

在界面上, 两种流体的法向上的应力平衡方程为

$$\left( p_h + \frac{B_{h0}^2}{2\mu_{eh}} \right) - \left( p_l + \frac{B_{l0}^2}{2\mu_{el}} \right) = 2\mu_h(\phi_h)_{zz} - 2\mu_l(\phi_l)_{zz} + \sigma \frac{\eta_{xx}}{(1 + \eta_x^2)^{3/2}}. \quad (27)$$

把 (27) 式代入 (15) 式, 并对  $x^2$  项分析, 得到新的 Bernoulli 方程

$$\begin{aligned} & \alpha_1 \ddot{\eta}_0 + \alpha_2 \dot{\eta}_0^2 + \alpha_3 \dot{\eta}_0 \\ & = -Ag\eta_2 + 6(1+A) \frac{\sigma \eta_2^3}{\rho_h} \\ & \quad + k(1+A) V_h^2 \frac{\delta B_h(k+2\eta_2)}{4} \\ & \quad + k(1-A) V_l^2 \frac{\delta B_l(2\eta_2-k)}{4}, \end{aligned} \quad (28)$$

其中, Atwood 数为  $A = \frac{\rho_h - \rho_l}{\rho_h + \rho_l}$  ( $0 < A < 1$ ),

重(轻)流体运动黏性系数为  $\nu_{h(l)} = \frac{\mu_{h(l)}}{\rho_{h(l)}}$ , 以及

重(轻)流体的 Alfvén 波速为  $V_{h(l)} = \sqrt{\frac{B_{h0(l)}^2}{\mu_{eh(l)}\rho_{h(l)}}}$ .

(28) 式中各系数为

$$\alpha_1 = \frac{k^2 - 4kA\eta_2 - 12A\eta_2^2}{2(k - 6\eta_2)}, \quad (29)$$

$$\alpha_2 = \frac{k^2[(4A-3)k^2 + 6(3A-5)k\eta_2 + 36A\eta_2^2]}{2(k - 6\eta_2)^2}, \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \alpha_3 = & \frac{k^2(1+A)}{2} \left[ \nu_h(k+2\eta_2) \right. \\ & \left. + \frac{\nu_l(1-A)(k+6\eta_2)(k-2\eta_2)}{(1+A)(k-6\eta_2)} \right]. \end{aligned} \quad (31)$$

综上, (9), (12), (25), (26) 以及 (28) 式描述了磁场中非理想流体 RT 不稳定性气泡的演变过程. 由 (25), (26) 及 (28) 式易知, 磁场对不稳定性的作用是由非线性部分引起的: 若  $\delta B_l(0) = \delta B_h(0) = 0$ , 即磁场非线性部分为 0 时, 则磁场对气泡发展过程无影响<sup>[18]</sup>. 定义无量纲气泡振幅  $\xi_1 = k\eta_0$ , 无量纲  $\xi_2 = \eta_2/k$ , 无量纲气泡速度  $\xi_3 = \frac{k\dot{\eta}_0}{\sqrt{kg}}$ , 无量纲时间

$\tau = t\sqrt{kg}$ , 重(轻)流体的雷诺数  $Re_{h(l)} = \frac{\sqrt{kg}}{k^2\nu_{h(l)}}$ ,

重(轻)流体的无量纲 Alfvén 波速  $U_{h(l)} = \frac{kV_{h(l)}}{\sqrt{kg}}$ ,

以及邦德数  $Bo = \frac{\rho_h g}{k^2 \sigma}$ , 并令

$$D_1(\xi_2, A) = \frac{2(1-6\xi_2)}{1-4A\xi_2-12A\xi_2^2}, \quad (32)$$

$$D_2(\xi_2, A)$$

$$= -\frac{4A - 3 + 6(3A - 5)\xi_2 + 36A\xi_2^2}{2(1 - 6\xi_2)^2}, \quad (33)$$

$$D_3(\xi_2, A, Re_h, Re_1) = -\frac{1 + A}{2} \left[ \frac{1 + 2\xi_2}{Re_h} + \frac{(1 - A)(1 + 6\xi_2)(1 - 2\xi_2)}{Re_1(1 + A)(1 - 6\xi_2)} \right], \quad (34)$$

$$D_4(\xi_2, A, \delta B_h, \delta B_1, U_h, U_1) = \frac{(1 + A)(1 + 2\xi_2)\delta B_h U_h^2}{4} + \frac{(1 - A)(2\xi_2 - 1)\delta B_1 U_1^2}{4}. \quad (35)$$

将(32)–(35)式代入(9), (12), (25), (26)以及(28)式, 可以得到

$$\frac{d\xi_1}{d\tau} = \xi_3, \quad (36)$$

$$\frac{d\xi_2}{d\tau} = -\left(3\xi_2 + \frac{1}{2}\right)\xi_3, \quad (37)$$

$$\frac{1}{\delta B_h} \frac{d}{d\tau}(\delta B_h) = \frac{2\xi_2 - 1}{2\xi_2 + 1}\xi_3, \quad (38)$$

$$\frac{1}{\delta B_1} \frac{d}{d\tau}(\delta B_1) = \frac{(2\xi_2 + 1)(6\xi_2 + 1)}{(2\xi_2 - 1)(6\xi_2 - 1)}\xi_3, \quad (39)$$

$$\frac{d\xi_3}{d\tau} = D_1 D_2 \xi_3^2 + D_1 D_3 \xi_3 + D_1 \left( -A\xi_2 + \frac{6(1 + A)}{Bo} \xi_2^3 \right) + D_1 D_4, \quad (40)$$

(36)–(40)式就是无量纲化后的气泡发展公式.

对(37)式进行积分, 得到

$$\xi_2(\tau) = -\frac{1}{6} + \left[ \frac{1}{6} + \xi_2(0) \right] e^{-3[\xi_1(\tau) - \xi_1(0)]}. \quad (41)$$

若  $\tau \rightarrow \infty$  时, 有  $\xi_1(\tau) \gg \xi_1(0)$  成立, 那么

$$\xi_2(\infty) = -\frac{1}{6}. \quad (42)$$

### 3 结果与讨论

#### 3.1 非磁流体情况

当两种流体都不是磁流体时, 磁场对流体运动无影响. 假设(42)式成立, 将(42)式代入(40)式, 积分求得气泡无量纲渐近速度为

$$\xi_3^a = -\frac{2}{3Re_h} + \sqrt{\frac{4}{9Re_h^2} - \frac{1}{9Bo} + \frac{2A}{3(1 + A)}}, \quad (43)$$

可以发现, 该速度与轻流体的黏性效应无关, 只依赖于重流体黏性以及流体表面张力, 且由于黏性和表面张力的存在, 非理想流体中气泡渐近速度会低于理想流体情况. 图2给出了  $A = 0.5$  时, 在不同邦

德数  $Bo$  下, 气泡渐近速度  $\xi_3^a$  与重流体雷诺数  $Re_h$  关系曲线. 可以看出, 当  $Re_h \leq 1$  时, 气泡渐近速度随着  $Re_h$  增大而线性增大, 即黏性越小, 气泡渐近速度越大; 当  $Re_h \geq 10$  后, 气泡渐近速度增长逐渐减缓, 最后趋于恒定值; 并且, 在相同的初始条件下, 流体的表面张力越大, 气泡的渐近速度越小.

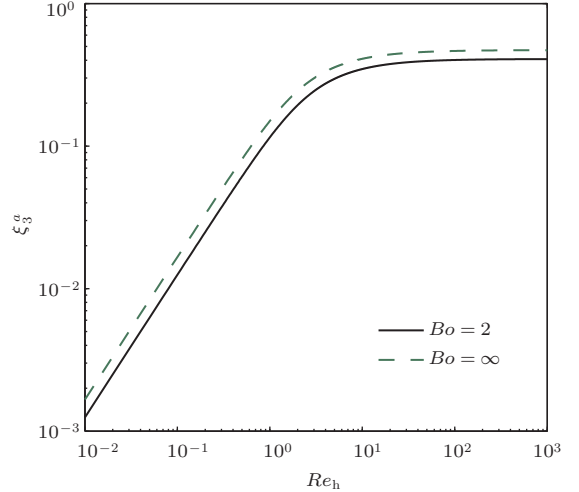


图2 不同邦德数下气泡渐近速度与重流体雷诺数的关系 ( $A = 0.5$ )

给定初始参数  $\xi_1(0)$ ,  $\xi_2(0)$  和  $\xi_3(0)$ , 气泡发展过程便能通过数值求解(36), (37)和(40)式得到. 图3给出了不同雷诺数和邦德数下, 气泡速度  $\xi_3$  随时间  $\tau$  变化曲线. 由图3可知, 在流体黏性效应或表面张力存在情况下, 气泡的速度总是小于理想流体中的气泡速度, 这说明流体黏性效应和表面张力都阻碍气泡的发展. 而由(36)式可知, 非理想流体的气泡振幅也会恒小于理想流体的气泡振幅.

(43)式中的渐近速度是在  $\xi_2(\infty) = -\frac{1}{6}$  这一假设下得到的, 但这个假设在非理想流体中并不总是成立. 当  $Bo < \frac{1 + A}{6A}$  时, 即表面张力足够大时, 由(43)式得到的气泡渐近速度为负值, 导致气泡振幅  $\xi_1(\infty) \rightarrow -\infty$ . 于是, 根据(41)式可知,  $\xi_2(\infty) = -\frac{1}{6}$  的假设不成立. 此种情况下, 气泡的速度会发生振荡. 如图4所示, 表面张力使得气泡速度产生振荡, 并且表面张力越强, 振荡频率越高. 而黏性效应却会不断衰减这种振荡, 使气泡速度最终趋于0. 黏性越大, 气泡速度衰减得越快. 由于气泡速度在正负间振荡, 使得气泡振幅也会发生振荡. 在黏性存在时, 气泡振幅会逐渐趋于稳恒. 从图4(b)可知, 流体无黏时,  $\xi_2$  也不断地周期变化; 而当黏性存在时,  $\xi_2$  会逐渐趋近于一个常数 (不必为  $-\frac{1}{6}$ ).

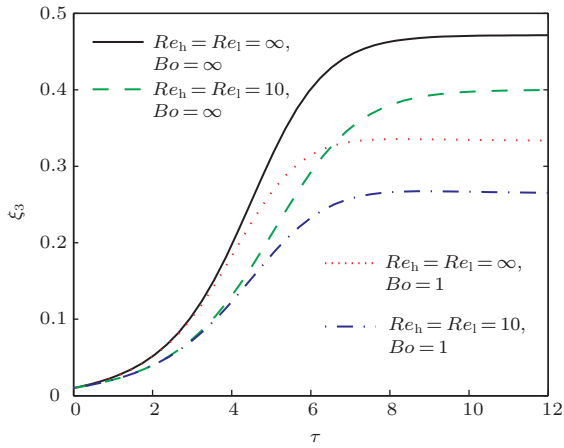


图3 不同雷诺数和邦德数下气泡速度与时间的关系  
初始条件为  $\xi_1(0) = 0.01$ ,  $\xi_2(0) = -0.01$ ,  $\xi_3(0) = 0.01$ ,  $A = 0.5$

### 3.2 磁流体情况

当流体为磁流体时,需考虑磁场作用. 为了求得此种情况下的气泡渐近速度,假设(42)式成立,并将其代入(38), (39)以及(40)式. 由(39)式可知  $\delta B_1(\infty)$  为常数,于是,气泡渐近速度可通过联立求解(38)和(40)式得到,但是无法得到解析解. 为简单,假设气泡渐近速度会趋于恒定,那么由(38)式可得到  $\delta B_h(\infty)$  为0. 求解(40)式,得到

$$\xi_3^a = -\frac{2}{3Re_h} + \sqrt{\frac{4}{9Re_h^2} - \frac{1}{9Bo} + \frac{2A - 4(1-A)\delta B_1(\infty)U_1^2}{3(1+A)}}, \quad (44)$$

从(44)式可知,气泡渐近速度与轻流体中磁场的最终状态有关. 当  $\delta B_1(\infty) > 0$  时,磁场会降低气泡渐近速度;  $\delta B_1(\infty) < 0$  时,正好相反. 而由(26)式可知,  $\delta B_1(\infty)$  取决于  $\delta B_1(0)$ , 即若  $\delta B_1(0) > 0 (< 0)$ , 则有  $\delta B_1(\infty) > 0 (< 0)$ , 故气泡渐近速度与初始时刻轻流体中  $\delta B_1(0)$  相关.

气泡速度发展过程可通过数值求解(36)—(40)式得到. 当给定轻流体初始磁场并且不考虑流体黏性和表面张力时,在不同重流体初始磁场下,气泡参量与时间关系曲线如图5所示. 由图5(a)和(c)可知,  $\xi_2$  随时间收敛到  $-\frac{1}{6}$  且  $\delta B_h$  收敛到0,此时气泡渐近速度可由(44)式描述. 由于不考虑黏性效应和表面张力,且  $U_1^2$  已知,故气泡渐近速度由  $\delta B_1(\infty)$  决定. 从图5(b)中可以看出,当  $\delta B_h(0) < 0 (> 0)$  时,气泡速度收敛到稳恒速度所需时间大于(小于)无重流体磁场情况,且初始磁场  $U_h^2$  越强,所需时间越长(短).

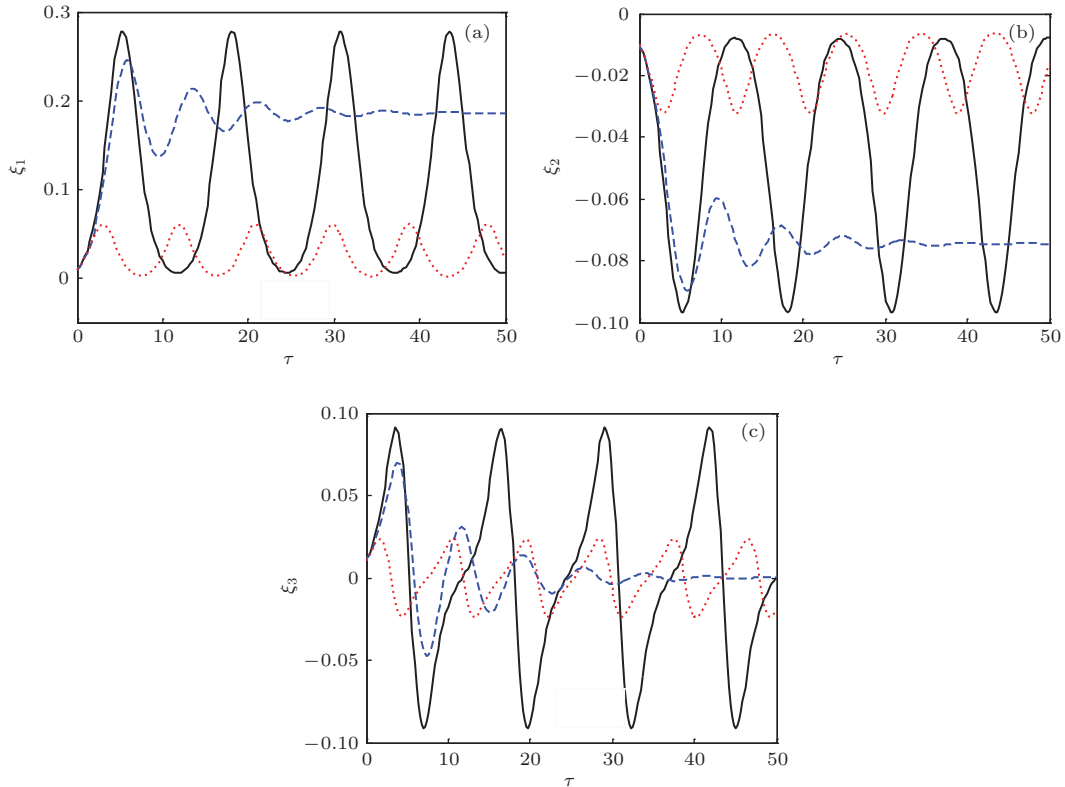


图4 气泡参量与时间的关系 (a) 气泡振幅  $\xi_1$ ; (b)  $\xi_2$ ; (c) 气泡速度  $\xi_3$ ; 初始条件  $\xi_1(0) = 0.01$ ,  $\xi_2(0) = -0.01$ ,  $\xi_3(0) = 0.01$ ,  $A = 0.5$ ; 实线代表  $Re_h = Re_l = \infty$ ,  $Bo = 0.1$ ; 虚线代表  $Re_h = Re_l = 10$ ,  $Bo = 0.1$ ; 点线代表  $Re_h = Re_l = \infty$ ,  $Bo = 0.01$



当流体为理想磁流体时, 图 6(a) 给出了重流体中磁场无作用情况下, 气泡速度随时间的发展曲线. 可知, 当  $\delta B_1(0) < 0 (> 0)$  时, 气泡速度始终大于(小于)无磁场情况, 即磁场会促进(抑制)气泡增长, 且磁场越强, 促进(抑制)效应越明显. 图 6(b) 给出了轻流体中磁场无作用情况下, 气泡速度随时间发展曲线. 根据 (44) 式可知, 气泡的渐近速度与重流体中磁场无关, 故尽管初始磁场强度不同, 气泡速度最终都会收敛到相同速度. 当  $\delta B_h(0) < 0 (> 0)$  时, 气泡速度收敛时间大于(小于)无磁场情况, 且磁场越强, 收敛时间越长(短).

图 7 考察了黏性效应和表面张力对磁流体气

泡的作用. 可知流体黏性和表面张力会阻碍磁流体气泡增长, 且由于初始  $\delta B_1(0) > 0$ , 即磁场会阻碍气泡发展, 使得相同条件下, 磁流体气泡速度会小于普通流体气泡速度. 前文说过, 当表面张力足够大时, 气泡速度会振荡. 而在磁流体中, 磁场能够消除或加剧这种振荡. 考察 (44) 式可知, 若  $\delta B_1(0) < 0$  且  $|\delta B_1(0)|U_1^2$  足够大, 磁场就可以抵消表面张力的影响; 若  $\delta B_1(0) > 0$ , 磁场将会增强表面张力的作用, 使得气泡振荡加剧. 如图 8 所示, 实线表示无磁场时的气泡振荡过程. 当外界有磁场时, 若  $\delta B_1(0) < 0$ , 气泡振荡频率会下降, 当磁场足够大时, 振荡消失; 而  $\delta B_1(0) > 0$  时, 气泡振荡频率会增大.

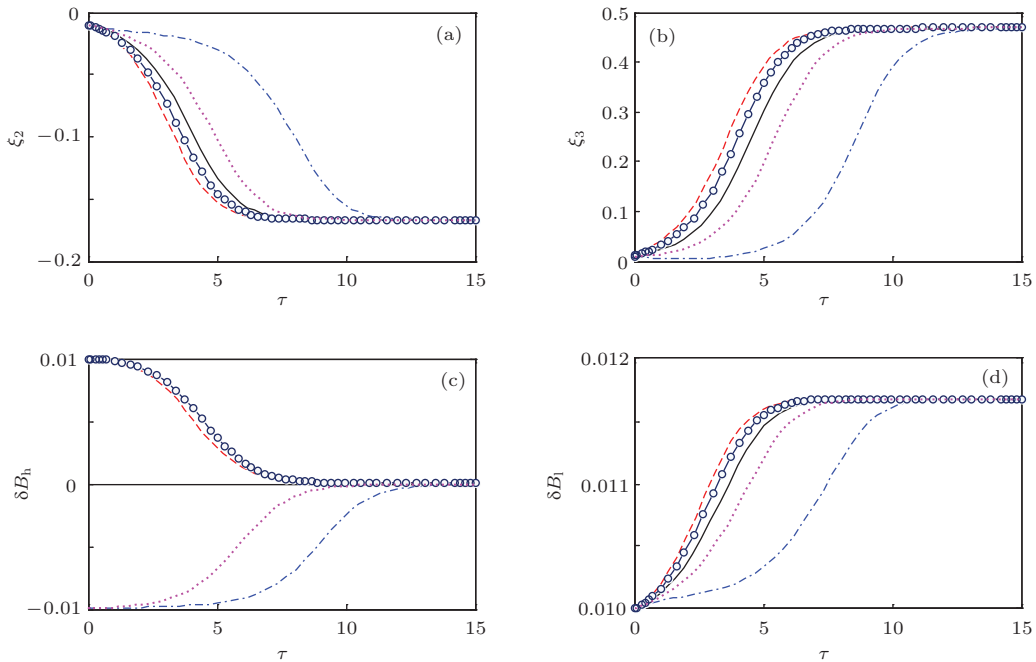


图 5 气泡参量与时间的关系 (a)  $\xi_2$ ; (b) 气泡速度  $\xi_3$ ; (c) 重流体非线性磁场  $\delta B_h$ ; (d) 轻流体非线性磁场  $\delta B_1$ ; 初始条件  $\xi_1(0) = 0.01, \xi_2(0) = -0.01, \xi_3(0) = 0.01, \delta B_1(0) = 0.01, U_1^2 = 0.5, Re_h = Re_l = Bo = \infty, A = 0.5$ ; 实线代表  $U_h^2 = 0, \delta B_h(0) = 0$ ; 圆线代表  $U_h^2 = 1, \delta B_h(0) = 0.01$ ; 虚线代表  $U_h^2 = 2, \delta B_h(0) = 0.01$ ; 点线代表  $U_h^2 = 1, \delta B_h(0) = -0.01$ ; 点画线代表  $U_h^2 = 2, \delta B_h(0) = -0.01$

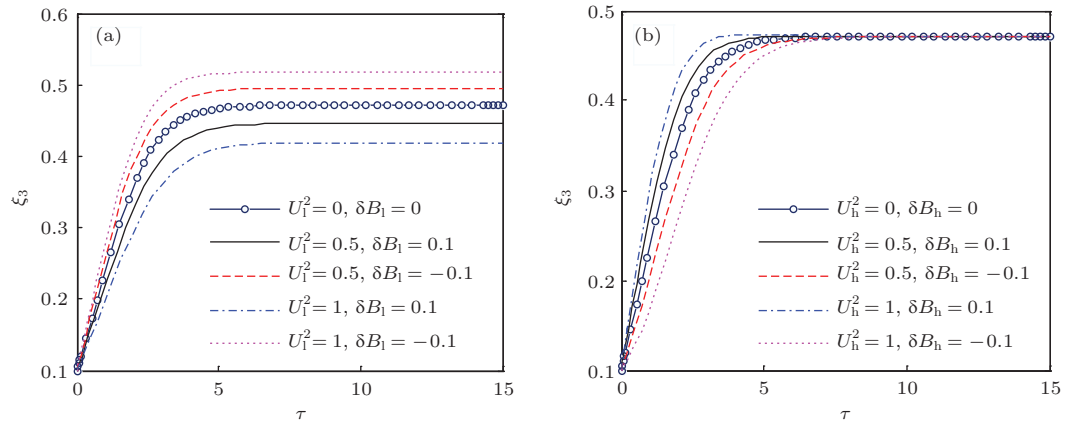


图 6 不同初始磁场下气泡速度与时间关系 (a) 重流体中磁场无作用情况, 即  $\delta B_h = 0$ ; (b) 轻流体中磁场无作用情况, 即  $\delta B_1 = 0$ ; 初始条件  $\xi_1(0) = 0.1, \xi_2(0) = -0.1, \xi_3(0) = 0.1, Re_h = Re_l = Bo = \infty, A = 0.5$

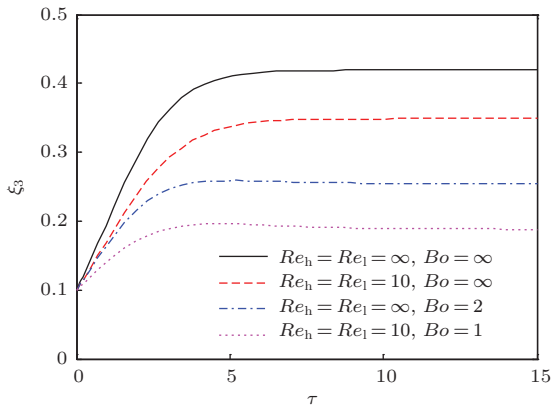


图7 不同雷诺数和邦德数下气泡速度与时间的关系  
初始条件为  $\xi_1(0) = 0.1, \xi_2(0) = -0.1, \xi_3(0) = 0.1,$   
 $\delta B_h(0) = 0, \delta B_l(0) = 0.1, U_1^2 = 1, A = 0.5$

表面张力是气泡速度振荡的原因,但不是惟一原因.当流体的表面张力忽略不计时,磁场也可以引起气泡振荡.(35)式体现了气泡发展过程中磁场的作用.将(35)式写成

$$D_4 = \frac{(1+A)\delta B_h U_h^2 + (1-A)\delta B_l U_l^2}{2} \xi_2$$

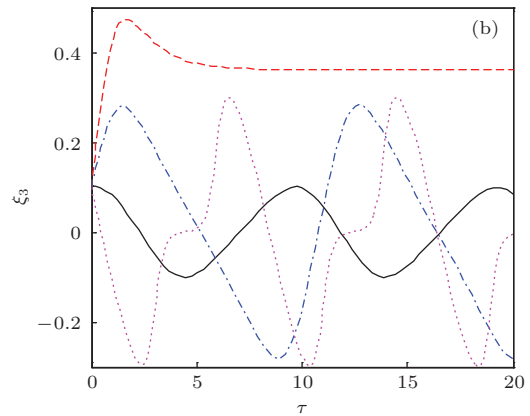
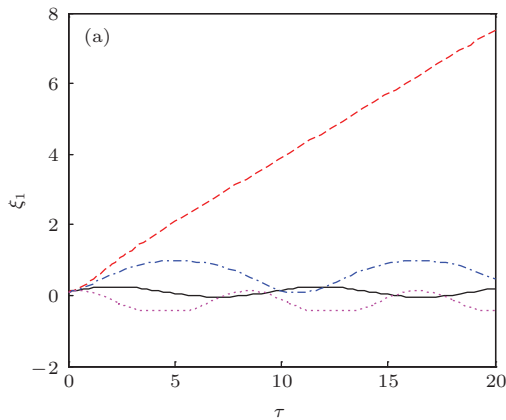


图8 不同初始磁场下气泡的发展 (a) 气泡振幅; (b) 气泡速度; 初始条件  $\xi_1(0) = 0.1, \xi_2(0) = -0.1, \xi_3(0) = 0.1,$   
 $\delta B_h(0) = 0, Re_h = Re_l = \infty, Bo = 0.2, A = 0.5;$  实线代表  $\delta B_l(0) = 0;$  点画线代表  $\delta B_l(0) = -0.1, U_1^2 = 5;$  虚线代表  $\delta B_l(0) = -0.1, U_1^2 = 10;$  点线代表  $\delta B_l(0) = 0.1, U_1^2 = 5$

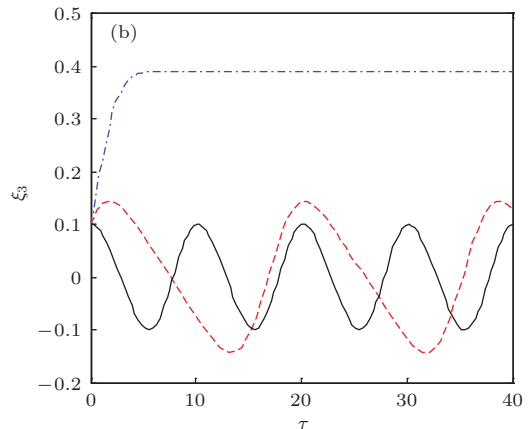
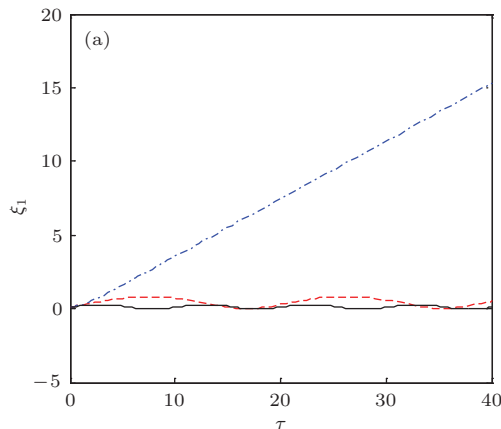


图9 气泡振幅和速度随时间的变化 (a) 气泡振幅  $\xi_1;$  (b) 气泡速度  $\xi_3;$  初始条件  $\xi_1(0) = 0.1, \xi_2(0) = -0.1, \xi_3(0) = 0.1,$   
 $Re_l = Re_h = Bo = \infty, \delta B_l(0) = \delta B_h(0) = 0.1, A = 0.5;$  实线代表  $3U_h^2 = U_h^2 = 9,$  虚线代表  $3U_h^2 = U_h^2 = 6,$  点画线代表  $3U_h^2 = U_h^2 = 1.5$

$$+ \frac{(1+A)\delta B_h U_h^2 - (1-A)\delta B_l U_l^2}{4}, \quad (45)$$

观察第一项,并与(40)式对比,可知第一项相当于磁场给流场提供了一个加速度,当

$$\frac{(1+A)\delta B_h U_h^2 + (1-A)\delta B_l U_l^2}{2} < 0$$

时,该加速度方向与重力加速度相同.此时,在忽略表面张力的情况下,气泡不会发生振荡.当

$$\frac{(1+A)\delta B_h U_h^2 + (1-A)\delta B_l U_l^2}{2} > 0$$

时,该加速度方向与重力加速度相反,当磁场足够强,以至于流体总加速度方向与重力加速度相反时,振荡现象发生.图9给出了不同初始磁场下,气泡振幅和速度随时间发展曲线.从图中可知,当磁场足够强时,气泡会产生振荡,且磁场越强,振荡频率越高.

图 10 考察了黏性对磁场产生的振荡的影响。从图中可以看出, 黏性存在时, 振荡幅度会逐渐减小, 气泡速度最终消失, 同时气泡振幅、磁场等会逐

渐趋于稳恒状态, 且黏性越强, 振荡过程中受到的阻尼也越大, 导致气泡的振荡过程衰减得越快, 达到稳恒态所需的时间也越短。

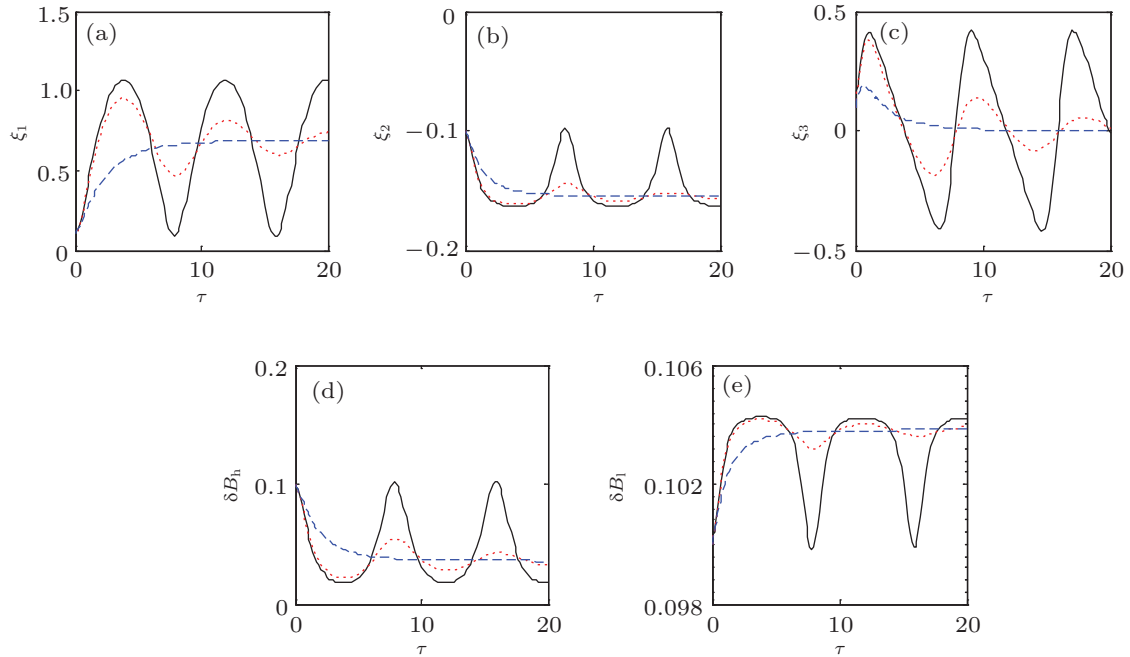


图 10 气泡各参数随时间的变化 (a) 气泡振幅  $\xi_1$ ; (b)  $\xi_2$ ; (c) 气泡速度  $\xi_3$ ; (d) 重流体非线性磁场  $\delta B_h$ ; (e) 轻流体非线性磁场  $\delta B_l$ ; 初始条件  $\xi_1(0) = 0.1, \xi_2(0) = -0.1, \xi_3(0) = 0.1, \delta B_l(0) = \delta B_h(0) = 0.1, B_O = \infty, U_l^2 = U_h^2 = 10, A = 0.5$ ; 实线代表  $Re_1 = Re_h = \infty$ , 点线代表  $Re_1 = Re_h = 10$ , 虚线代表  $Re_1 = Re_h = 1$

## 4 结 论

本文在磁场与平面垂直情况下, 综合考虑黏性和表面张力的影响, 推导了描述二维非理想磁流体 RT 气泡顶点演化过程的方程组, 并给出了不同情况下气泡速度的渐近解, 通过数值求解方程组, 得到了气泡各参量随时间变化曲线图, 并分析了流体黏性、表面张力和磁场在气泡发展中起到的作用。得到以下结论:

- 1) 磁场对不稳定性的影响是由磁场的非线性部分造成的, 即若磁场非线性部分为 0, 则不影响气泡的演化发展过程。磁场对气泡渐近速度的影响取决于  $\delta B_l(0)$ : 当  $\delta B_l(0) > 0$  ( $< 0$ ) 时, 磁场能降低 (增加) 气泡渐进速度; 当  $\delta B_l(0) = 0$  时, 无影响;
- 2) 气泡渐近速度与轻流体黏性无关; 重流体黏性、表面张力能降低气泡渐近速度; 流体黏性和表面张力能够阻碍气泡的发展, 即气泡速度和振幅会小于理想流体情况, 而磁场既能阻碍也能促进气泡的发展;
- 3) 表面张力足够大时, 气泡会发生振荡现象, 磁场既能削弱也能增强这种振荡, 当黏性存在时,

由于黏性的阻尼作用, 振荡会逐渐衰减消失。

综上所述, 流体黏性和表面张力能够抑制 RT 不稳定性, 磁场既能抑制也能促进 RT 不稳定性。

值得指出的是, 本文的方法同样适用于尖钉发展的分析, 只需要采用尖钉的初始界面以及尖钉顶部附近的速度势即可得到尖钉演化的方程组。因此, 流体黏性、表面张力及磁场对 RT 不稳定性的综合影响也同样可以得到。

## 参考文献

- [1] Taylor G I 1950 *Proc. R. Soc. London A* **201** 192
- [2] Kilkenney J D, Glendinning S G, Haan S W, Hammel B A, Lindl J D, Munro D, Verdon C P 1994 *Phys. Plasmas* **1** 1379
- [3] Cabot W H, Cook A W 2006 *Nature Phys.* **2** 562
- [4] Rayleigh L 1900 *Scientific Papers* (Vol. 2) (Cambridge: Cambridge University Press) pp200–207
- [5] Chandrasekhar S 1961 *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability* (Oxford: Clarendon Press) pp441–453
- [6] Zhang W L, Wu Z W, Li D 2005 *Phys. Plasmas* **12** 042106
- [7] Layzer D 1955 *Astrophys. J.* **122** 1
- [8] Zufria J 1998 *Phys. Fluids* **31** 440



- [9] Goncharov V N 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 134502
- [10] Sohn S I 2004 *Phys. Rev. E* **70** 045301
- [11] Tao Y S, Wang L F, Ye W H, Zhang G C, Zhang T C, Zhang J C, Li Y J 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 075207 (in Chinese)[陶焯晟, 王立峰, 叶文华, 张广财, 张天才, 张建成, 李英骏 2012 物理学报 **61** 075207]
- [12] Banerjee R, Mandal L, Khan M, Gupta M R 2013 *Indian J. Phys.* **87** 929
- [13] Sohn S I 2009 *Phys. Rev. E* **80** 055302
- [14] Gupta M R, Banerjee R, Mandal L K, Bhar R, Pant H C, Khan M, Srivastava M K 2012 *Indian J. Phys.* **86** 471
- [15] Huo X H, Wang L F, Tao Y S, Li Y J 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 144705 (in Chinese) [霍新贺, 王立峰, 陶焯晟, 李英骏 2013 物理学报 **62** 144705]
- [16] Cao Y G, Guo H Z, Zhang Z F, Sun Z H, Chow W K 2011 *J. Phys. A: Math. Theor.* **44** 275501
- [17] Xia T J, Dong Y Q, Cao Y G 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 214702 (in Chinese)[夏同军, 董永强, 曹义刚 2013 物理学报 **62** 214702]
- [18] Khan M, Mandal L, Banerjee R, Roy S, Gupta M R 2011 *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A* **653** 2
- [19] Gupta M R, Mandal L, Roy S, Khan M 2010 *Phys. Plasmas* **17** 012306

# Theoretical analysis of effects of viscosity, surface tension, and magnetic field on the bubble evolution of Rayleigh-Taylor instability

Li Yuan Luo Xi-Sheng<sup>†</sup>

(Advanced Propulsion Laboratory, Department of Modern Mechanics, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China)

( Received 26 October 2013; revised manuscript received 4 December 2013 )

## Abstract

The evolution of bubble in Rayleigh-Taylor (RT) instability for non-ideal hydromagnetic fluid is investigated theoretically in this study. In a plane perpendicular to the magnetic field, the general governing equation describing the bubble evolution is derived by considering the influences of viscosity, surface tension and magnetic field. The numerical and asymptotic solutions of the bubble velocity in two-dimensional planar geometry are obtained under different conditions and the effects of fluid viscosity, surface tension and magnetic field on the bubble growth are then analyzed in detail. It is found that the bubble velocity is reduced by viscosity and surface tension, which indicates that viscosity and surface tension can suppress the RT instability. It is also observed that the influence of magnetic field on the RT instability is caused by its nonlinear part, and whether the RT instability can be suppressed or enhanced depends on the direction of the nonlinear part of magnetic field.

**Keywords:** Rayleigh-Taylor instability, viscosity, surface tension, magnetic field

**PACS:** 52.35.Py, 47.20.Ma, 52.57.Fg

**DOI:** 10.7498/aps.63.085203

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: [xluo@ustc.edu.cn](mailto:xluo@ustc.edu.cn)