

超网络中标度律的涌现*

郭进利¹⁾²⁾† 祝昕昀¹⁾

1)(上海理工大学管理学院, 上海 200093)

2)(上海理工大学超网络研究中心, 上海 200093)

(2014年1月23日收到; 2014年2月25日收到修改稿)

本文构建超网络和复杂网络中统一演化模型, 研究超网络无标度特性演化机理和拓扑性质. 利用 Poisson 过程理论和连续化方法对模型进行分析, 获得网络稳态平均超度分布的解析表达式. 仿真实验和理论分析相符合. 结果表明: 随着网络规模的增大, 这个动态演化网络的超度分布遵循无标度的特性. 它不仅将每次增加一个新节点与若干个老节点围成一条超边的超网络模型和每次增加若干个新节点与一个老节点围成一条超边的超网络模型统一在一个模型中, 而且将复杂网络中著名的无标度模型也作为我们模型的特例.

关键词: 复杂网络, 无标度, 超图, 超网络

PACS: 02.50.-r, 89.75.-k, 89.75.Hc, 89.65.-s

DOI: 10.7498/aps.63.090207

1 引言

自从 20 世纪末 Watts 和 Strogatz 揭示了复杂网络的小世界特性, 紧接着 Barabási 和 Albert 发表在《科学》上的《随机网络中标度的涌现》一文掀起了本世纪复杂网络研究的热潮^[1]. Barabási-Albert 模型 (BA 模型) 也成了复杂网络中最著名的无标度网络模型. 十多年来, 物理学等领域关于复杂网络的研究非常活跃, 其研究者来自物理学、计算机、图论、社会学以及经济学等各个不同领域. 这是因为人们每天生活在一个充满各种各样复杂网络的世界中. 从 Internet 网络到 WWW(万维网)网络, 从电力网络到交通网络, 从科研合作网络到各种经济、政治、社会关系网络, 可以说网络无处不在. 科学家通过十几年复杂网络的研究, 构造了大量的网络模型, 提出了许多分析模型的方法^[1]. 复杂网络理论的研究已经从上世纪末的粗放型研究逐步向严密化研究过渡, 其理论逐渐成熟.

然而, 随着社会的发展, 科技的进步, 导致现实网络研究的复杂度不断增加, 先前的研究方式已无

法全面研究现实网络. 首先, 现实网络多为综合网络, 而先前的研究方式多限于研究节点与边同质的网络, 无法完全刻画现实网络的特征^[2]. 如供应链网络^[2]: 表示生产商、消费者等的节点与表示实体贸易、电子商务等的边皆不同质; 生态网络^[2]: 表示生命体的节点同质, 表示竞争关系和捕食关系的边不同质; 电力网络^[2]: 表示供电关系的边同质, 表示变电所、用户等的节点不同质. 其次, 网络研究的目的是为揭示自然规律促进社会发展. 因此, 对综合网络的研究意义更大、影响更深远. 如快递网络^[2]: 由运输网络和供应链网络组成, 怎样有效提高送货效率和降低运输成本. 超网络不仅可以完美刻画现实网络的特征, 且本身为由多网络组成的综合网络, 因此, 随着大数据时代的到来超网络研究被逐渐重视.

网络大数据是指“人、机、物”三元世界在网络空间中交互、融合所产生并在互联网上可获得的大数据^[3]. 网络大数据的规模和复杂度的增长超出了硬件能力增长的摩尔定律, 研究大规模系统数据建模涉及到复杂网络、超网络和复杂科学等领域. Yin

* 国家自然科学基金项目 (批准号: 70871082) 和上海市一流学科建设资助项目 (批准号: S1201YLXK) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: phd5816@163.com

等人对于过程监控和故障诊断的基于数据驱动和基于模型方法进行了比较研究^[4]. Yin 等利用数据驱动研究了容错控制系统性能优化的实时实现^[5]. 人们深度挖掘和充分利用大数据的价值带来了巨大机遇. 因此, 迫切需要探讨大数据的科学问题, 发现网络大数据的共性规律, 研究网络大数据定性、定量分析的基础理论与基本方法. 王元卓等分析了网络大数据的现状, 并对大数据科学、数据计算需要的新模式与新范式、新型的IT基础架构和数据的安全与隐私等方面的发展趋势进行了展望^[3]. 在大数据浪潮的冲击下, 网络科学面临着新的挑战和机遇. 方锦清在大数据背景下针对“网络科学与工程”的最新前沿课题——超网络(即“网络的网络(NON)”或基于超图的超网络), 讨论了若干典型的超网络及其主要特点和相关课题初步进展, 并提供了若干挑战性课题和研究机遇^[6]. 在大数据的环境下, 虽然“假设、模型、检验”的方法受到质疑, 希望建立从“数据”到“数据”的第四范式^[3], 但是, 对于研究大规模系统数据, 建模还是一个有效的科学方法, 数据的检验只能是个体的表现, 对于大数据也不可能逐个进行检验, 模型是刻画事物共性的特征和内在的本质. 超网络的建模和分析无疑有助于大规模数据的系统分析.

近年来, 超网络研究主要集中在基于现实世界的超网络特性研究. 然而针对超网络动态演化模型的构建方法研究文献有限. 增长超网络演化可能是节点批量增加, 文献^[7]和文献^[8]研究了节点批量增长的复杂网络. 文献^[9]用超图理论构建了科研合作超网络演化模型. Zhang 等建立了一种基于用户背景知识和对象、标签双重优先连接机理的超图增长模型^[10]; Wang 等给出了一种基于超图的超网络动态演化模型, 该模型采用增长和优先连接机理逐步生成超网络, 每次新增加若干个节点, 将这若干个新节点和网络中已有的1个节点结合生成超边, 且每个时间只增加一条超边^[11]. 胡枫等给出了另一种基于超图的超网络动态演化模型, 该模型增长机理与王建伟等模型相对偶, 每次新增加1个节点, 将这个新节点和网络中已有的若干个节点结合生成超边, 且每个时间只增加一条超边^[12]. Yang 等研究了局域世界超网络演化模型^[13], 这个模型的增长和胡枫等^[12]的超网络增长机理相同. 文献^[11]和文献^[12]中模型的优点是将复杂网络中

的BA模型向基于超图的超网络拓广, 但是, 它们要么是若干个新节点与一个老节点相连, 要么是一个新节点与若干个老节点相连, 且每次只增加一条新边; 也不能退化到BA模型. 而我们知道, 复杂网络是基于超图的超网络的一种特殊情形, 因此, 超网络中BA模型的拓广应该以BA模型为特例. 能否在超网络中建立一个将文献^[11]、文献^[12]中的模型及BA模型的统一模型, 体现超网络和复杂网络中标度律的涌现, 是本文的主要目的.

2 超网络概念

超网络分为基于网络的超网络和基于超图的超网络. 基于网络的超网络(Supernetworks)是指: 由网络组成的网络. 其概念是1985年Denning给出的^[14]. 明确提出超网络(Supernetworks)的是Nagurney等^[2,15-17]. 规模巨大、连接复杂的网络, 或网络中嵌套网络的大型网络称为超网络. Nagurney等在处理物流网络、资金网络和信息网络相交织的问题时, 将“高于而又超于现存网络”的网络用超网络来描述.“高于而又超于”: 即网络嵌套有网络, 且存在虚拟的节点、边和流等的网络^[2,17].

另一种超网络是基于超图(Hypergraph)的超网络(Hypernetwork). 超图的概念是Berge于1970年提出的^[18], 图的每一个边只连接两个节点, 超图中的边可以连接两个以上的节点, 所以称之为超边. Estrada 和 Rodrigues认为, 凡是可以用超图表示的网络就是超网络^[19,20]. 数学上超图的严格定义为^[2,18]: 设 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 是一个有限集. 若 $E_i \neq \Phi (i = 1, 2, \dots, m)$, 且 $\bigcup_{i=1}^m E_i = V$, 记 $E^h = \{E_1, E_2, \dots, E_m\}$, 则称二元关系 $H = (V, E^h)$ 为超图, 简记为 (V, E^h) 或 H . 其中 V 的元素称为超图的节点, E^h 中的元素称为超图的超边. 如果两个节点属于同一条超边, 则称这两个节点邻接; 如果两条超边的交集不空, 称为这两条超边邻接. 如果 $|V|$ 和 $|E^h|$ 均有限, 则称 H 为有限超图. 如果 $|E_i| = c (i = 1, 2, \dots, m)$ 则称超图 $H = (V, E^h)$ 为均匀超图. 如果 $|E_i| = 2 (i = 1, 2, \dots, m)$, 则超图 $H = (V, E^h)$ 退化为图.

有了上述超图的数学定义, 我们就可以给出基于超图的超网络的定义. 假设 $\Omega = \{(V, E^h) | (V, E^h) \text{ 是有限超图}\}$, G 是从 $[0, +\infty)$ 到 Ω 的映射, 则对于任意给定的 $t \geq 0$, $G(t) =$

$(V(t), E^h(t))$ 是一个有限超图, $N^*(t)$ 表示到时刻 t 超图已发生变化的总次数. 如果 $\{N^*(t), t \geq 0\}$ 是一个随机过程, 对于充分大的时间 t , 我们称 $G(t) = (V(t), E^h(t))$ 是一个超网络. 节点 v_i 的超度定义为包含该节点的超边个数, 记为 k_i^h .

记 $N(t) = |V(t)|$, $M(t) = |E^h(t)|$, $\lim_{t \rightarrow \infty} E[N(t)] = N$ 无穷或有限, 其中, $E[N(t)]$ 表示超网络在时刻 t 的平均节点数. 对于任何给定的有限超图 (V, E^h) , 任意给定的 $t \geq 0$, 定义 $G(t) = (V, E^h)$, 由此可见, 超网络是超图的推广.

3 模型描述

3.1 BA 模型

BA 模型是指满足如下两条规则的网络: 1) 开始于较少的节点数 (m_0), 在等时间间隔增添 1 个具有 $m (\leq m_0)$ 条边的新节点, 连接这个新节点到 m 个不同的已经存在于网络中的节点; 2) 在选择新节

点连接时, 新节点连接到节点 i 的概率 W 取决于节点 i 的度数 k_i , 即满足

$$W(k_i) = \frac{k_i}{\sum_j k_j},$$

BA 模型的稳态平均度分布为 $P(k) \approx 2m^2/k^3$. 度分布指数为 $\gamma = 3$.

3.2 一条边一个老节点超网络演化模型

文献 [11] 中超网络演化模型是指满足如下两条规则的超网络: 1) 开始带有较少的节点数 (m_0), 以及一条包含这 m_0 个节点的超边. 在等时间间隔网络增添 m_1 个新节点, 它们与网络中已有的 1 个节点围成 1 条超边. 2) 这 m_1 个新节点选取老节点 i 连接的概率 W 等于节点 i 的超度 k_i^h 与超网络中的已有节点超度总和之比, 即满足

$$W(k_i^h) = \frac{k_i^h}{\sum_j k_j^h}, \quad (1)$$

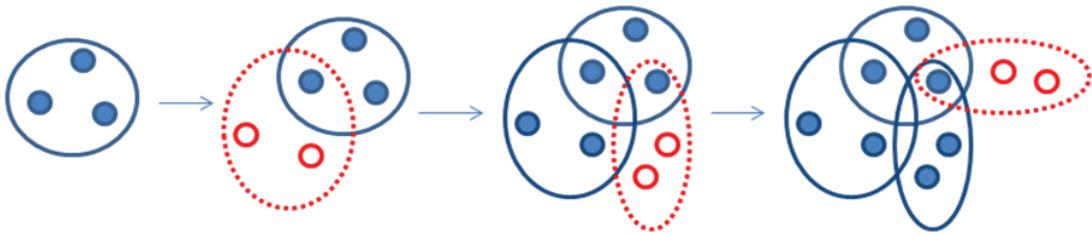


图1 文献 [11] 中超网络模型演化过程 ($m_0 = 3, m_1 = 2$) 示意图

一条边一个老节点超网络演化模型的稳态平均超度分布为 [11] $P(k) \propto (1/k)^{m_1+2}$. 度分布指数为 $\gamma = m_1 + 2$.

3.3 一条边一个新节点超网络演化模型

文献 [12] 中超网络演化模型是指满足如下两条规则的超网络: 1) 开始带有较少的节点数 (m_0),

以及一条包含这 m_0 个节点的超边. 在等时间间隔网络增添 1 个新节点, 它与网络中已有的 $m_2 (\leq m_0)$ 个节点围成 1 条超边. 2) 当选择网络中已有的节点 i 与新节点连接时, 选择节点 i 的概率 W 依赖于节点 i 的超度 k_i^h , 即满足方程 (1).

一条边一个新节点超网络演化模型的稳态平均超度分布为 [12] $P(k) = (1/m_2 + 1)(1/k)^{\frac{1}{m_2}+2}$. 度分布指数为 $\gamma = 1/m_2 + 2$.

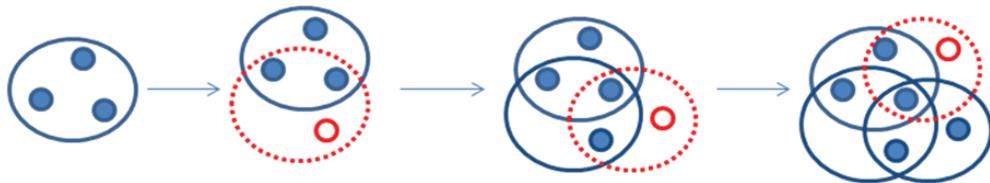


图2 文献 [12] 中超网络模型演化过程 ($m_0 = 3, m_2 = 2$) 示意图

3.4 超网络统一演化模型

现实的网络中,通常是在已生成的超网络中,新加入的若干个节点和已有的若干个旧节点结合生成超边.例如,在科学家合作超网络中,作者是节点,超边是论文,新刊的发行可能有若干个新作者加入网络和增加若干条超边;实际情形也可能是加入的若干个新作者更倾向于和超网络中已有的若干个科学家合作.结合 Barabási-Albert 无标度网络演化模型的构建思想,我们给出超网络统一演化

模型如下:

超网络统一演化模型是指满足如下两条规则的超网络: 1) 开始带有较少的节点数 (m_0), 以及一条包含这 m_0 个节点的超边. 节点的到达过程是具有常数率 λ 的 Poisson 过程. 在 t 时刻, 当一批新节点 (m_1 个) 进入网络时, 这 m_1 个新节点与网络中已有的 m_2 个老节点围成一条超边, 共围成 m 条超边, 且 $m, m_2 \leq m_0$, 不出现重超边. 2) 当选择网络中已有的节点 i 与新节点连接时, 选择节点 i 的概率 W 依赖于节点 i 的超度 k_i^h , 即满足方程 (1).

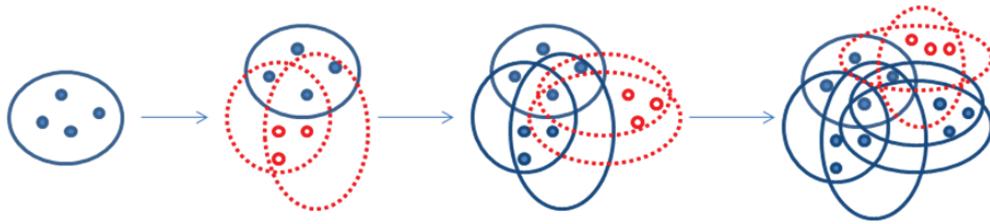


图3 超网络统一模型演化过程 ($m_0 = 4, m_1 = 3, m_2 = m = 2$) 示意图

图3显示了 $m_0 = 4, m_1 = 3, m = m_2 = 2$ 时,超网络统一模型动态演化到第3步的过程.采用以上的增长和优先连接机理所生成的超网络,每次生成3个新节点与网络中已有的2个节点结合成2条新超边.

当 $\lambda = m = 1, m_2 = 1$ 时,超网络统一模型是文献 [11] 中的模型; 当 $\lambda = m = 1, m_1 = 1$ 时,超网络统一模型是文献 [12] 中的超网络模型; 当 $\lambda = 1, m_1 = m_2 = 1$ 时,超网络统一模型可视为 BA 模型的等价模型.

4 模型分析与仿真

记 $N(t) = \{\text{在时刻 } t \text{ 网络的节点数}\} - m_0$.

因为节点的到达过程 $N(t)$ 是具有常数率 λ 的 Poisson 过程, 由 Poisson 过程理论 [1] 我们知道, $E[N(t)] = \lambda t$. 我们用 t_n 表示第 n 批节点进入网络的时刻, 即第 n 批节点的到达时刻. $k_{ij}^h(t)$ 表示第 i 批到达的第 j 个节点在时刻 t 的超度. 假定 $k_{ij}^h(t)$ 是连续实值变量, 由于 $k_{ij}^h(t)$ 的变化率正比于概率 $W(k_{ij}^h)$, 从而, 由连续化方法我们得到 k_{ij}^h 的动态方程

$$\frac{\partial k_{ij}^h}{\partial t} = \lambda m m_2 \frac{k_{ij}^h}{\sum_{ij} k_{ij}^h}. \quad (2)$$

上式右端的 m 是因为生成 m 条新超边; 因子 m_2 是因为节点 i 可能被第 1、第 2、...、第 m_2 次依次选中. 由于 $\sum_{ij} k_{ij}^h \approx m(m_1 + m_2)E[N(t)] = \lambda m(m_1 + m_2)t$, 因此,

$$\frac{\partial k_{ij}^h}{\partial t} = \frac{m_2 k_{ij}^h(t)}{(m_1 + m_2)t}. \quad (3)$$

注意 $k_{ij}^h(t_i) = m$, 解方程 (3), 得

$$k_{ij}^h(t) = m \left(\frac{t}{t_i} \right)^{\frac{m_2}{m_1 + m_2}}, \quad (4)$$

从 (4) 式, 我们有

$$P(k_{ij}^h(t) \geq k) = P\left(t_i \leq \left(\frac{m}{k}\right)^{\frac{m_1 + m_2}{m_2}} t\right). \quad (5)$$

由 Poisson 过程理论 [1], 我们知道节点到达时间 t_i 服从参数为 i 与 λ 的 Gamma 分布 $\Gamma(i, \lambda)$:

$$P(t_i \leq x) = 1 - e^{-\lambda x} \sum_{l=0}^{i-1} \frac{(\lambda x)^l}{l!},$$

$$P\left(t_i \leq \left(\frac{m}{k}\right)^{\frac{m_1 + m_2}{m_2}} t\right)$$

$$= 1 - e^{-\lambda t \left(\frac{m}{k}\right)^{\frac{m_1 + m_2}{m_2}}} \sum_{l=0}^{i-1} \frac{1}{l!} \left(\lambda t \left(\frac{m}{k}\right)^{\frac{m_1 + m_2}{m_2}}\right)^l. \quad (6)$$

将 (6) 式代入 (5) 式, 有

$$P(k_{ij}^h(t) \geq k)$$

$$= 1 - e^{-\lambda t \left(\frac{m}{k}\right)^{\frac{m_1}{m_2}+1}} \sum_{l=0}^{i-1} \frac{1}{l!} \left(\lambda t \left(\frac{m}{k}\right)^{\frac{m_1}{m_2}+1}\right)^l. \quad (7)$$

对于任意给定的 $k \geq m, i, n, t > 0$ 和 $t_i < t_n \leq t$, 从(7)式, 我们有

$$\begin{aligned} & P(k_{ij}^h(t) \geq k) \\ &= 1 - e^{-\lambda t \left(\frac{m}{k}\right)^{\frac{m_1}{m_2}+1}} \sum_{l=0}^{i-1} \frac{1}{l!} \left(\lambda t \left(\frac{m}{k}\right)^{\frac{m_1}{m_2}+1}\right)^l \\ &> 1 - e^{-\lambda t \left(\frac{m}{k}\right)^{\frac{m_1}{m_2}+1}} \sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{l!} \left(\lambda t \left(\frac{m}{k}\right)^{\frac{m_1}{m_2}+1}\right)^l \\ &= P(k_{nj}^h(t) \geq k). \end{aligned} \quad (8)$$

不等式(8)表明“富者愈富”现象, 也表明超网络统一演化模型具有中枢节点集.

下面我们证明超网络统一演化模型的稳态平均超度分布存在. 由(7)式, 我们有

$$\begin{aligned} P(k_{ij}^h(t) = k) &\approx \frac{\partial P(k_{ij}^h(t) < k)}{\partial k} \\ &= \left(\frac{m_1}{m_2} + 1\right) \left(\frac{m}{k}\right)^{\frac{m_1}{m_2}+2} \frac{\lambda t \left(\lambda t \left(\frac{m}{k}\right)^{\frac{m_1}{m_2}+1}\right)^{i-1}}{m (i-1)!} \\ &\quad \times e^{-\lambda t \left(\frac{m}{k}\right)^{\frac{m_1}{m_2}+1}}. \end{aligned} \quad (9)$$

由(9)式可知, 超网络统一演化模型的稳态平均超度分布为

$$\begin{aligned} P(k) &\approx \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{m_1 E[N(t)]} \sum_{ij} P(k_{ij}^h(t) = k) \\ &= \frac{1}{m} \left(\frac{m_1}{m_2} + 1\right) \left(\frac{m}{k}\right)^{\frac{m_1}{m_2}+2}. \end{aligned} \quad (10)$$

不等式(8)和方程(10)表明, 这个超网络具有无标度特性, 其超度分布的指数为

$$\gamma = 2 + (m_1/m_2). \quad (11)$$

当 $\lambda = 1, m = 1, m_2 = 1$ 时, 超网络统一模型是文献[11]中的超网络模型, 且度分布指数与文献[11]中的度分布指数相同. 当 $\lambda = 1, m = 1, m_1 = 1$ 时, 超网络统一模型是文献[12]中的超网络模型, 且度分布指数与文献[12]中的度分布指数相同. 当 $\lambda = 1, m_1 = m_2 = 1$ 时, 超网络统一模型可视为BA模型的等价模型. 由方程(10)可知, BA模型的度分布满足, $P(k) \approx 2m^2/k^3$. 由此可见, 我们的模型统一了文献[11]和文献[12]中的超网络模型及复杂网络中的BA模型.

我们取 $m_0 = 4$, 网络规模为 $N = 300000$, 分别对模型进行计算机仿真. 为了消除噪音, 对累积超

度分布(CCDF)进行模拟, 双对数坐标下的模拟图见图4—图6. 从图4—图6可见, 我们理论预测的超度分布的幂律指数与模拟结果符合的较好.

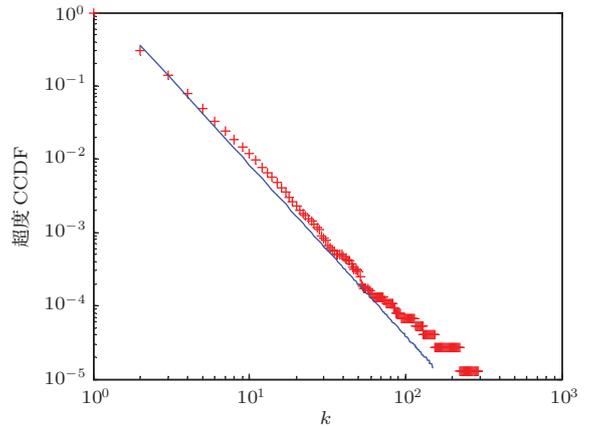


图4 (网刊彩色) 超网络统一模型 ($m_1 = 4, m_2 = 3$) 模拟图. 十字表示累积超度分布的模拟值, 蓝色线是斜率为-2.33的直线, 模拟与理论预测相符合

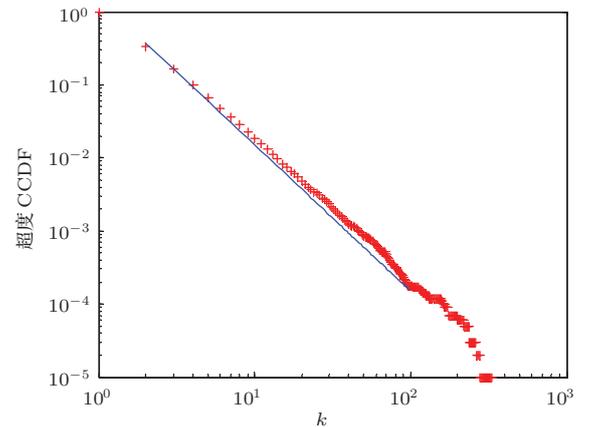


图5 (网刊彩色) 超网络统一模型 ($m_1 = 3, m_2 = 3$) 模拟图. 十字表示累积超度分布的模拟值, 蓝色线是斜率为-2的直线, 模拟与理论预测相符合

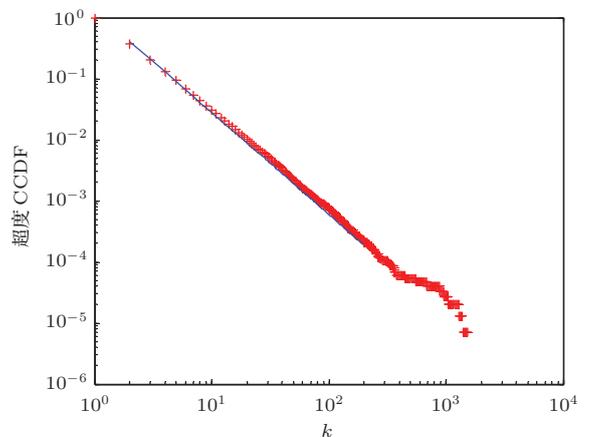


图6 (网刊彩色) 超网络统一模型 ($m_1 = 2, m_2 = 3$) 模拟图. 十字表示累积超度分布的模拟值, 蓝色线是斜率为-1.66的直线, 模拟与理论预测相符合

5 结 论

本文提出的超网络统一演化模型是连续时间增加的无标度超网络模型,它在基于超图的均匀超网络中的作用就像BA模型在复杂网络中的作用,体现出了超网络和复杂网络中标度律的涌现.方程(10)表明超网络统一演化模型的稳态平均超度分布是渐近时间无关的(且与系统规模 $N = \lambda t + m_0$ 无关),尽管网络持续不断增长,但是网络节点平均超度分布达到一个稳定状态.

虽然这个网络的稳态平均超度是与节点到达过程无关的幂律分布,但是,这个稳态平均超度分布指数 $\gamma = 2 + m_1/m_2$ 与超边内节点数有关.如果 $m_1 \gg m_2$,幂律指数表现得比较大,网络的超度分布有趋向于指数分布的趋势,这正是超网络演化和复杂网络演化的不同之处.超网络的拓扑结构研究刚刚起步,特别是“网络之网络”基于网络的超网络的拓扑结构研究很少,因此,关于超网络的演化结构有许多工作需要开展.

参考文献

- [1] Guo J L 2013 *Evolving models of complex networks and human behavior dynamics* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [郭进利 2013 复杂网络和人类行为动力学演化模型(北京:科学出版社)]
- [2] Qi Y H, Guo J L 2013 *University of Shanghai for Science and Technology* **35** 227 (in Chinese) [漆玉虎,郭进利 2013 上海理工大学学报 **35** 227]
- [3] Wang Y Z, Jin X L, Cheng X Q 2013 *Chinese Journal of Computer* **36** 1125 (in Chinese) [王元卓,靳小龙,程学旗 2013 计算机学报 **36** 1125]
- [4] Yin S, Ding S X, Haghani A, Hao H Y, Zhang P 2012 *Journal of Process Control* **22** 1567
- [5] Yin S, Luo H, Ding S X 2014 *IEEE Trans. Ind. Electron.* **61** 2402
- [6] Fang J Q 2013 *Chinese Journal of Nature* **35** 345 (in Chinese) [方锦清 2013 自然杂志 **35** 345]
- [7] Guo J L 2010 *Chin. Phys. B* **19** 120503
- [8] Guo J L, Guo Z H, Liu X J 2011 *Chin. Phys. B* **20** 118902
- [9] Hu F, Zhao H X, He J B, Li F X, Li S L, Zhang Z K 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 198901 (in Chinese)[胡枫,赵海兴,何佳倍,李发旭,李淑玲,张子柯 2013 物理学报 **62** 198901]
- [10] Zhang Z K, Liu C 2010 *J. Stat. Mech.* 10005
- [11] Wang J W, Rong L L, Deng Q H, Zhang J Y 2010 *Eur. Phys. J. B* **77** 493
- [12] Hu F, Zhao H X, Ma X J 2013 *Sci. Sin. Phys. Mech. Astron.* **43** 16 (in Chinese)[胡枫,赵海兴,马秀娟 2013 中国科学:物理学力学天文学 **43** 16]
- [13] Yang G Y, Liu J G 2014 *Chin. Phys. B* **23** 018901
- [14] Denning P J 1985 *American Scientist* **73** 127
- [15] Nagurney A, Dong J 2002 *Supernetworks: Decision-Making for the Information Age* (Cheotenharn: Edward Elgar Publishers)
- [16] Nagurney A, Dong J, Zhang D 2002 *Transportation Research E* **38** 281
- [17] Wang Z T 2011 *J. University of Shanghai for Science and Technology* **33** 229 (in Chinese) [王众托 2011 上海理工大学学报 **33** 229]
- [18] Berge C 1973 *Graphs and Hypergraphs* (New York: Elsevier)
- [19] Estrada E, Rodrigues V R 2005 *Phys. Rev. E* **71** 1
- [20] Estrada E, Rodrigues V R 2006 *Physical A* **364** 581

Emergence of scaling in hypernetworks*

Guo Jin-Li^{1)2)†} Zhu Xin-Yun¹⁾

1) (*Business School, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China*)

2) (*Center for Supernetwork Research, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China*)

(Received 23 January 2014; revised manuscript received 25 February 2014)

Abstract

This paper proposes a unified model for hypernetworks and complex networks, and studies the evolution mechanisms of scale-free hypernetworks and the topological properties of the hypernetwork. We have analyzed the proposed model and calculated the stationary average hyperdegree distribution of the hypernetwork by using a Poisson process theory and a continuous technique. The analytical result agrees well with the simulation. It is shown that the hyperdegree distribution of the dynamic model follows a scale-free law. This paper not only integrates the hypernetwork model, in which one new node forms an edge with some old nodes, and the hypernetwork model, in which some new nodes form an edge with one old node, but also integrates the scale-free model in complex networks.

Keywords: complex network, hypergraph, hypernetwork, scale-free

PACS: 02.50.-r, 89.75.-k, 89.75.Hc, 89.65.-s

DOI: [10.7498/aps.63.090207](https://doi.org/10.7498/aps.63.090207)

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 70871082), and the Shanghai First-class Academic Discipline Project, China (Grant No. S1201YLXK).

† Corresponding author. E-mail: phd5816@163.com