物理学报 Acta Physica Sinica
Chinese Physical Society
Institute of Physics, CAS

有限空间中经典场的正则量子化

刘波　王青　李永明　隆正文

Canonical quantization of classical fields in finite volume

Liu Bo　Wang Qing　Li Yong-Ming　Long Zheng-Wen

引用信息 Citation: Acta Physica Sinica, 64, 100301 (2015)　DOI: 10.7498/aps.64.100301
在线阅读 View online: http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.100301
当期内容 View table of contents: http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I10

物 理 学 报 Acta Phys. Sin. Vol. 64, No. 10 (2015) 100301

有限空间中经典场的正则量子化*

刘波[1)] 王青[2)] 李永明[3)] 隆正文[4)†]

1) (北京化工大学理学院物理与电子科学技术系, 北京 100029)

2) (新疆大学物理科学与技术学院, 乌鲁木齐 830046)

3) (新疆大学信息科学与工程学院, 乌鲁木齐 830046)

4) (贵州大学物理系光电子技术和应用实验室, 贵阳 550025)

(2014 年 10 月 16 日收到; 2014 年 12 月 4 日收到修改稿)

从离散的角度研究带边界的 $1+1$ 维经典标量场和 Dirac 场的正则量子化问题. 与以往不同的是, 这里将时间和空间两个变量同时进行变步长的离散, 应用变步长离散的变分原理, 得到离散形式的运动方程、边界条件和能量守恒的表达式. 然后, 根据 Dirac 理论, 将边界条件当作初级约束, 将边界条件和内在约束统一处理. 研究表明, 采用此方法, 不仅在每个离散的时空格点上能够建立起 Dirac 括号, 从而可以完成该模型的正则量子化; 而且, 该方法还保持了离散情况下的能量守恒.

关键词: 正则量子化, 边界条件, Dirac 约束, Dirac 括号

PACS: 03.70.+k, 04.60.Ds **DOI:** 10.7498/aps.64.100301

1 引 言

正则量子化是将经典理论过渡到量子理论的途径之一, 在现代物理学中占据重要地位. 正则量子化需要将经典变量算符化, 同时, 需要将经典的 Poisson 括号 (对于奇异系统而言, 则是 Dirac 括号) 用量子括号来取代. 因此, 经典的 Poisson 括号或者 Dirac 括号在正则量子化过程中起关键的作用. 对于局限在有限空间中的经典场, 由于边界的存在, 经典的场变量在边界上满足一些特殊的条件, 即边界条件. 边界条件通常以场变量和它们的正则共轭动量的代数组合形式出现, 在某些特殊的情况下, 还有可能包含它们的空间微商. 由于边界的存在, 会对经典场的正则量子化带来新的问题. 因为一般而言, 场变量与其正则共轭动量所满足的经典 Poisson 括号 (对于由奇异拉氏量描述的模型, 则为 Dirac 括号) 在边界上会和边界条件相矛盾. 这就需要我们谨慎处理边界条件, 扩展 Poisson 括号或者 Dirac 括号, 使之能够和边界条件相容.

最先关注此问题并展开细致研究的是文献 [1]. 在此文中, 作者将边界条件作为初级 Dirac 约束, 研究了有限空间中的 $1+1$ 维标量场的正则量子化问题. 研究结果表明, 将边界条件当作初级 Dirac 约束从而得到的 Dirac 括号与边界条件是相容的. 鉴于理论上所感兴趣的模型大多数是由奇异拉氏量来描述的这一事实, 文献 [2] 在以往研究的基础上更进了一步. 因为他们所研究的模型既含有内在约束 (即模型是由奇异拉氏量所描述), 同时又因为局限在有限空间, 存在边界. 文献 [3] 从经典解空间研究了此类问题, 随后, 该方法又被用于带边界的复标量场的正则量子化的研究 [4].

从离散的角度研究此问题最近也有涉及. 文献 [5] 研究了存在边界时的经典 Dirac 场的量子化问题. 研究者们将空间变量做了等步长的离散, 将一个连续自由度的体系转化成了一个离散自由度体系, 采用 Dirac 理论 [6] 和 Faddeev-Jackiw[7] 方法

* 国家自然科学基金 (批准号: 10865003) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: sci.zwlong@gzu.edu.cn

研究了此模型的正则量子化问题. 但是, 在此研究中, 仅仅对空间变量做了离散化的处理, 因而没有平等地对待时间和空间变量. 事实上, 用离散的方法研究正则量子化的问题可以追溯到文献[8, 9]. 该文献采用了Faddeev-Jackiw 方法从离散的角度研究了B-背景场下的开弦的量子化问题, 但也仅仅是对空间变量进行了离散化.

最早对时间变量进行离散化研究的是李政道教授. 在文献[10]中, 李政道教授在Lagrange 力学的范畴内将时间作为动力学变量进行非等步长的离散, 对其变分得到了离散形式的能量守恒方程. 在哈密顿力学范畴内, 文献[11]和[12]采用等步长离散, 提出了保辛结构算法. 在他们的研究中, 原先连续理论的辛结构在离散的过程中得到了保持, 但是, 离散形式的能量不守恒. 文献[13—15] 将先前的工作结合起来, 将变分原理推广到离散情形, 提出了变步长的离散变分原理(VDDVP). 研究表明, 采用该原理既保持了原有理论的辛结构, 也保持了离散的能量守恒. 随后, 作者们又将此研究推广到经典场论情形. 最近, 文献[16]基于相空间中离散的拉氏量的对称性, 应用该原理采用数值模拟的方法研究了耦合的非线性谐振子, 研究表明, 这个方法既能够保持辛结构, 也能保持离散情况下的守恒量.

本文应用VDDVP分别研究有限空间中的标量场和Dirac旋量场的正则量子化问题. 因为所研究的经典场被局限在有限的空间, 因而, 在空间的边界上会出现边界条件. 另外, Dirac 场是由奇异拉氏量来描述的, 因而, 具有内在的约束. 本文的研究表明, 采用VDDVP可以在每一个离散的时空格点上建立起Poisson 或者Dirac 括号, 而且保持了离散的能量守恒. 本文的组织如下: 第二节研究有限空间中标量场的正则量子化问题; 在第三节研究的模型是既含有内在约束、又具有边界的有限空间中的Dirac场的量子化. 第四节给出进一步的讨论和展望.

2 有限空间中标量场的正则量子化

有限$1+1$维空间中无质量标量场的作用量为

$$S=\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_0^{T}\mathrm{d}t\ \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\partial^{\mu}\phi(t,x)\partial^{\nu}\phi(t,x),\tag{1}$$

其中, $g_{\mu\nu}=g^{\mu\nu}=\mathrm{diag}(+,-)$. 将时间变量$t\in[0,\ T]$离散成非等步长的$M$个小段, 每一段记为$\Delta t^i=t^{i+1}-t^i$, $i=0,1,\cdots,M-1,M$. 同样, 将空间变量$x\in[0,\ \pi]$离散化成非等步长的N个小段, 每一段记为$\Delta x^j=x^{j+1}-x^j$, $j=0,1,\cdots,N-1,N$. 因而, 连续的场变量$\phi(x,t)$将被对应的离散变量$\phi^{i,j}$取代. 场变量对时间和空间的微分则被对时间和空间的差分取代:

$$\begin{aligned}\Delta_0\phi^{i,j}&=\frac{\phi^{i+1,j}-\phi^{i,j}}{t^{i+1}-t^i},\\ \Delta_1\phi^{i,j}&=\frac{\phi^{i,j+1}-\phi^{i,j}}{x^{j+1}-x^j}.\end{aligned}\tag{2}$$

显然, 当 Max $\Delta t^i\to0$ 和 Max $\Delta x^i\to0$时, 离散的理论过渡到了连续理论.

将作用量(1)离散化后得

$$S_{\mathrm{D}}=\sum_{i,j}\Delta t^i\Delta x^jL_{\mathrm{D}}^{(i,j)},\tag{3}$$

这里

$$L_{\mathrm{D}}^{(i,j)}=\frac{1}{2}[(\Delta_0\phi^{(i,j)})^2-(\Delta_1\phi^{(i,j)})^2]\tag{4}$$

是离散形式的拉氏量密度. 对离散形式的作用量(3)全变分, 得到[13]

$$\delta_tS_{\mathrm{D}}=\delta_vS_{\mathrm{D}}+\delta_hS_{\mathrm{D}},\tag{5}$$

其中, δ_vS_{D} 和 δ_hS_{D} 分别是作用量沿着竖直和水平方向的变分. 通过计算, 它们分别是

$$\begin{aligned}&\delta_vS_{\mathrm{D}}\\&=\sum_{i,j}\Delta t^i\Delta x^i\Big[L_{\phi^{i,j}}\delta_v\phi^{i,j}\\&\quad+\sum_{\mu=0}^{1}(-)^{\mu+1}\Delta_\mu(E_\mu^{-1}\Delta_\mu\phi^{i,j}\delta_v\phi^{i,j})\Big],\\&\delta_hS_{\mathrm{D}}\\&=\sum_{i,j}\Delta t^i\Delta x^i\Big[L_{\phi^{i,j}}\delta_h\phi^{i,j}\\&\quad+\sum_{\mu,\nu=0}^{1}(-)^{\mu+1}\Delta_\mu(E_\mu^{-1}\Delta^\mu\phi^{i,j}\delta_h\phi^{i,j}\\&\quad-E_\mu^{-1}T_{\mathrm{D}\nu}^{\mu(i,j)}\delta x^{\nu(i,j)})\\&\quad+\sum_{\mu,\nu=0}^{1}(-)^{\mu+1}\Delta_\mu(E_\mu^{-1}T_{\mathrm{D}\nu}^{\mu(i,j)})\delta x^{\nu(i,j)}\Big].\end{aligned}\tag{6}$$

计算过程中会用到离散形式的Leibniz 法则[13],

$$\Delta_\mu(f^{i,j}g^{i,j})=(\Delta_\mu f^{i,j})g^{i,j}+(E_\mu f^{i,j})\Delta_\mu g^{i,j}.$$

其中, E_μ, E_μ^{-1} $(\mu=0,1)$ 是移动算符, 它对 $\phi^{i,j}$ 的运算规律是

$$\begin{aligned} E_0\phi^{i,j}&=\phi^{i+1,j}, \quad E_0^{-1}\phi^{i,j}=\phi^{i-1,j},\\ E_1\phi^{i,j}&=\phi^{i,j+1}, \quad E_1^{-1}\phi^{i,j}=\phi^{i,j-1}. \end{aligned} \tag{7}$$

(6)式中, $[L_{\phi^{i,j}}]=-\Delta_0(\Delta_0\phi^{i-1,j})+\Delta_1(\Delta_1\phi^{i,j-1})$, $T^{i,j}_{\mathrm{D}\mu\nu}=\Delta_\mu\phi^{i,j}\Delta_\nu\phi^{i,j}-L^{i,j}_{\mathrm{D}}g_{\mu\nu}$ 是离散的能量-动量张量. 最小作用量原理 $\delta_t S_{\mathrm{D}}=0$ 要求沿着竖直和水平方向的作用量变分要同时为零, 即 $\delta_v S_{\mathrm{D}}=0$, $\delta_h S_{\mathrm{D}}=0$. 由 $\delta_v S_{\mathrm{D}}=0$, 我们得到 Dirichlet 边界条件

$$\phi^{i,0}=\phi^{i,N}=0, \tag{8}$$

或者 Neumann 边界条件

$$\frac{\phi^{i,1}-\phi^{i,0}}{x^1-x^0}=\frac{\phi^{i,N}-\phi^{i,N-1}}{x^N-x^{N-1}}=0, \tag{9}$$

和离散形式的 Euler-Lagrange 方程

$$[L_{\phi^{i,j}}]=-\Delta_0(\Delta_0\phi^{i-1,j})+\Delta_1(\Delta_1\phi^{i,j-1})=0. \tag{10}$$

由 $\delta_h S_{\mathrm{D}}=0$, 得到

$$[L_{\phi^{i,j}}]\Delta_v\phi^{i,j}+\sum_{\mu=0}^{1}(-)^{\mu+1}\Delta_\nu(E_\mu^{-1}T^{\mu(i,j)}_{\mathrm{D}\nu})=0, \tag{11}$$

或者写为

$$\begin{aligned} &[L_{\phi^{i,j}}]\delta_\mu\phi^{i,j}-\Delta_1(\Delta_1\phi^{i,j-1}\Delta_\mu\phi^{i,j-1}+\delta_{1\mu}L^{i,j-1}_{\mathrm{D}})\\ &+\Delta_0(\Delta_0\phi^{i-1,j}\ \Delta_1\phi^{i-1,j})+\Delta_0(H^{i-1,j}_{\mathrm{D}})=0. \end{aligned} \tag{12}$$

上式的最后一项, 就是能量对时间的变化率. 可以看出, 只有离散是非等步长时, 上式才存在解.

由离散的作用量(3), 我们对每一个离散的场变量 $\phi^{i,j}$ 定义正则共轭动量,

$$\pi^{i,j}=\frac{\partial L^{i,j}_{\mathrm{D}}}{\partial(\Delta_0\phi^{i,j})}=\Delta_0\phi^{i,j}. \tag{13}$$

则 $(\phi^{i,j},\pi^{k,l})$ 之间的非零 Poisson 括号为

$$\{\phi^{i,j},\ \pi^{k,l}\}=\delta^{ik}\delta^{jl}. \tag{14}$$

系统的哈密顿量密度为

$$\begin{aligned} H&=\sum_j\Delta x^j(\pi^{i,j}\Delta_0\phi^{i,j}-L^{ij}_{\mathrm{D}})\\ &=\frac{1}{2}\sum_j\Delta x^j[(\pi^{i,j})^2+(\Delta_1\phi^{i,j})^2]. \end{aligned} \tag{15}$$

容易看出, 在边界上, 基本的 Poisson 括号(14)和边界条件(8)或者(9)是不相容的. 为了能够进行正则量子化, 我们必须对基本的 Poisson 括号进行修改, 使得在空间内部和原有的 Poisson 括号一致, 在边界上与边界条件相容. 限于篇幅, 我们只研究 Neumann 边界条件(9), 并且, 我们只考查 $x=0$ 的这一端点, 另一端点 $x=\pi$ 的结果可以从我们的方法平行地得出.

采用文献[1]的观点, 将边界条件当作初级 Dirac 约束[6], 记为

$$\theta^{(0)}_i=\phi^{i,1}-\phi^{i,0}\approx 0 \quad i=0,1,2,\cdots,M. \tag{16}$$

值得注意的是, 当把边界条件作为初级约束后, 这样的初级约束共有 $M+1$ 个. 我们还需要进一步检验是否有次级约束存在, 为此, 定义总哈密顿量,

$$H_T=H+\lambda^i\theta^{(0)}_i, \tag{17}$$

其中, λ^i 是拉氏乘子. 根据 Dirac 理论[6], 必须进一步确定是否还存在次级约束, 这可以由初级约束的自洽性条件 $\{\theta^{(0)}_i,\ H_T\}\approx 0$ 得出. 初级约束的自洽性给出次级约束

$$\theta^{(1)}_i=\Delta x^1\pi^{i,1}-\Delta x^0\pi^{i,0}\approx 0. \tag{18}$$

可以验证, 次级约束(18)的自洽性条件不会导致更多的约束, 并且由于约束 $(\theta^{(0)}_i,\theta^{(1)}_i)$ 之间的 Poisson 括号不弱等于零, 因此, 它们都是第二类的. 将初级约束和次级约束统一标记为 $\boldsymbol{\Theta}_I=(\theta^{(0)}_i,\ \theta^{(1)}_i)$, $I=1,2,\cdots,2(M+1)$, 则约束 $\boldsymbol{\Theta}_I$ 之间的 Poisson 括号所构成的矩阵和它的逆矩阵分别为

$$\begin{aligned} &\{\boldsymbol{\Theta}_I,\ \boldsymbol{\Theta}_J\}\\ &=\mathrm{i}(\Delta x^0+\Delta x^1)\underbrace{\sigma_2\oplus\sigma_2\oplus\cdots\oplus\sigma_2}_{M+1} \end{aligned} \tag{19}$$

和

$$\begin{aligned} &\{\boldsymbol{\Theta}_I,\ \boldsymbol{\Theta}_J\}^{-1}\\ &=-\mathrm{i}(\Delta x^0+\Delta x^1)^{-1}\underbrace{\sigma_2\oplus\sigma_2\oplus\cdots\oplus\sigma_2}_{M+1}. \end{aligned} \tag{20}$$

正则变量 $(\phi^{i,j},\pi^{i,j})$ 之间的 Dirac 括号, 可以由 Dirac 括号的定义

$$\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\}_{\mathrm{D}}=\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\}-\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{\Theta}_I\}\{\boldsymbol{\Theta}_I,\ \boldsymbol{\Theta}_J\}^{-1}\{\boldsymbol{\Theta}_J,\boldsymbol{B}\}$$

算出. 经过直接的计算, 得到

$$\{\phi^{i,j},\ \phi^{k,l}\}_{\mathrm{D}}=\{\pi^{i,j},\ \pi^{k,l}\}_{\mathrm{D}}=0,$$

$$\begin{aligned}&\{\phi^{i,j},\ \pi^{k,l}\}_{\mathrm{D}}\\=\ &\delta^{ik}\delta^{jl}-\delta^{ik}[(\delta^{l1}-\delta^{l0})(\Delta x^1\delta^{j1}-\Delta x^0\delta^{j0})\\&\times(\Delta x^1+\Delta x^0)^{-1}].\end{aligned}\tag{21}$$

可以直接验证上面所得到的Dirac括号在空间内部(即$x\in(0,\pi)$)与基本的Poisson 括号完全一样, 但是在边界上(即 $x=0$)和Neumann边界条件(16)相容.

基于正则变量$(\phi^{i,j},\ \pi^{i,j})$之间满足的Dirac括号(21), 正则量子化只需要做代换

$$\psi^{i,j}\to\hat{\psi}^{i,j},\ \ \pi^{i,j}\to\hat{\pi}^{i,j},\quad\{\ ,\ \}_{\mathrm{D}}\to\frac{1}{i}[\ ,\ ].\tag{22}$$

3 带边界的经典Dirac场的正则量子化

在这一节中, 我们将从离散的角度研究带边界的$1+1$维Dirac场的正则量子化问题. 这个问题在文献[5]中已经有过研究, 但是离散化仅仅对空间变量进行, 时间仍然是连续变量, 因而离散是不彻底的. 这里, 我们把时空变量都进行离散化处理. Dirac场的作用量为

$$\begin{aligned}S=&\int_0^T\mathrm{d}t\int_0^\pi\mathrm{d}x\frac{1}{2}\mathrm{i}g_{\mu\nu}(\bar{\psi}\gamma^\mu\partial^\nu\psi-\bar{\psi}\gamma^\mu\overleftarrow{\partial}^\nu\psi)\\=&\int_0^T\mathrm{d}t\int_0^\pi\mathrm{d}x\frac{1}{2}\mathrm{i}(\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi-\bar{\psi}\gamma^\mu\overleftarrow{\partial}_\mu\psi).\end{aligned}\tag{23}$$

这里, $\psi=\psi(x,t)$ 是两分量的旋量; γ^μ 是两维的Dirac矩阵, 满足代数关系 $\{\gamma^\mu,\ \gamma^\nu\}=2g^{\mu\nu}$, $\mu,\ \nu=0,1$; $\bar{\psi}=\psi^\dagger\gamma^0$是$\psi$的Dirac共轭. 与标量场的处理类似, 将时间和空间变量离散化, 将场变量ψ, $\bar{\psi}$对时间的微商$\partial_t\psi$, $\partial_t\bar{\psi}$和对空间的微商$\partial_x\psi$, $\partial_x\bar{\psi}$分别用对应的差分

$$\begin{aligned}\Delta_0\psi^{i,j}&=\frac{\psi^{i+1,j}-\psi^{i,j}}{t^{i+1}-t^i},\\\Delta_1\psi^{i,j}&=\frac{\psi^{i,j+1}-\psi^{i,j}}{x^{j+1}-x^j},\\\Delta_0\bar{\psi}^{i,j}&=\frac{\bar{\psi}^{i+1,j}-\bar{\psi}^{i,j}}{t^{i+1}-t^i},\\\Delta_1\bar{\psi}^{i,j}&=\frac{\bar{\psi}^{i,j+1}-\bar{\psi}^{i,j}}{x^{j+1}-x^j}\end{aligned}\tag{24}$$

来代替. 作用量(23)的离散形式为

$$S_{\mathrm{D}}=\sum_{i,j}\Delta t^i\Delta x^jL_{\mathrm{D}}^{i,j},\tag{25}$$

这里,

$$L_{\mathrm{D}}^{i,j}=\frac{1}{2}i(\bar{\psi}^{i,j}\gamma^\mu\Delta_\mu\psi^{i,j}-\Delta_\mu\bar{\psi}^{i,j}\gamma^\mu\psi^{i,j})\tag{26}$$

是离散形式的拉氏量密度. 对作用量(25)进行全变分, 得到

$$\delta_tS_{\mathrm{D}}=\delta_vS_{\mathrm{D}}+\delta_hS_{\mathrm{D}}.\tag{27}$$

和标量场情况类似, δ_vS_{D}和δ_hS_{D}分别是作用量沿着竖直和水平方向的变分, 它们分别是:

$$\begin{aligned}\delta_vS_{\mathrm{D}}=&\frac{\mathrm{i}}{2}\Bigg\{\sum_{i,j}\Delta t^i\Delta x^j[L_{\bar{\psi}^{i,j}}\delta_v\psi^{i,j}+\delta_v\bar{\psi}^{i,j}L_{\psi^{i,j}}]\\&+\sum_{\mu=0}^{1}\Delta_\mu[E_\mu^{-1}\bar{\psi}^{i,j}\gamma^\mu\delta_v\psi^{i,j}\\&+E_\mu^{-1}\delta_v\bar{\psi}^{i,j}\gamma^\mu\psi^{i,j}]\Bigg\}\end{aligned}\tag{28}$$

和

$$\begin{aligned}&\delta_hS_{\mathrm{D}}\\=&\frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{i,j}\Delta t^i\Delta x^j\Bigg\{[L_{\bar{\psi}^{i,j}}\delta_h\psi^{i,j}+\delta_h\bar{\psi}^{i,j}L_{\psi^{i,j}}]\\&+\sum_{\mu,\nu=0}^{1}(-)^{\mu+1}\Delta_\mu\Big[E_\mu^{-1}\bar{\psi}^{i,j}\gamma^\mu\delta_h\psi^{i,j}\\&+E_\mu^{-1}\delta_h\bar{\psi}^{i,j}\gamma^\mu\psi^{i,j}-2E_\mu^{-1}T_{\mathrm{D}\nu}^{\mu}\delta x^{\nu(i,j)}\Big]\\&+\sum_{\mu,\nu=0}^{1}(-)^{\mu+1}\Delta_\mu(2E_\mu^{-1}T_{\mathrm{D}\nu}^{\mu(i,j)})\delta x^{\nu(i,j)}\Bigg\},\end{aligned}\tag{29}$$

这里,

$$\begin{aligned}L_{\bar{\psi}^{i,j}}&=\Delta_\mu\bar{\psi}^{i,j}\gamma^\mu+\sum_{\mu=0}^{1}\Delta_\mu(E_\mu^{-1}\bar{\psi}^{i,j})\gamma^\mu=0,\\L_{\psi^{i,j}}&=\gamma^\mu\Delta_\mu\psi^{i,j}+\sum_{\mu=0}^{1}\Delta_\mu(E_\mu^{-1}\bar{\psi}^{i,j})\gamma^\mu=0\end{aligned}\tag{30}$$

是离散的Dirac方程及其共轭方程;

$$\begin{aligned}T_{\mathrm{D}\mu}^{\nu(i,j)}=&\frac{1}{2}\bar{\psi}^{i,j}\gamma^\mu\Delta_\nu\psi^{i,j}+\frac{1}{2}\Delta_\nu\bar{\psi}^{i,j}\gamma^\mu\psi^{i,j}\\&+g_{\mu\nu}L_{\mathrm{D}}^{i,j}\end{aligned}\tag{31}$$

是离散形式的能量-动量张量. 根据最小作用量原理, 作用量的变分应该为零, 这要求作用量沿着竖直和水平方向的变分应该同时为零. 由$\delta_vS_{\mathrm{D}}=0$, 我们得到运动方程(30)和边界条件,

$$\psi^{i,0}=\psi^{i,N}=0,\quad\bar{\psi}^{i,0}=\bar{\psi}^{i,N}=0.\tag{32}$$

由 $\delta_hS_{\mathrm{D}}=0$, 我们得到:

$$L_{\bar{\psi}^{i,j}}\delta_v\psi^{i,j}+\delta_v\bar{\psi}^{i,j}L_{\psi^{i,j}}$$

$$+2\sum_{\mu=0}^{1}(-)^{\mu+1}\Delta_\mu\big(E_\mu^{-1}T_{\mathrm{D}\nu}^{\mu(i,j)}\big)=0. \tag{33}$$

将此式展开后可以看出, 只有当离散是变步长时, 上式才能存在解, 即离散形式的能量才能守恒.

与上节所研究的标量场类似, 我们将边界条件当作初级约束, 记为

$$\begin{aligned}\Lambda_i^{(0)}&=\psi^{i,0}\approx 0,\ \bar\Lambda_i^{(0)}=\bar\psi^{i,0}\approx 0,\\ \Lambda_i^{(N)}&=\psi^{i,N}\approx 0,\ \bar\Lambda_i^{(N)}=\bar\psi^{i,N}\approx 0.\end{aligned} \tag{34}$$

对每一个离散的场变量引入与之对应的正则动量,

$$\begin{aligned}\pi^{i,j}&=\frac{\partial L_{\mathrm D}^{i,j}}{\partial(\Delta_1\psi^{i,j})}=-\frac{1}{2}\mathrm{i}\bar\psi^{i,j}\gamma^0,\\ \bar\pi^{i,j}&=\frac{\partial L_{\mathrm D}^{i,j}}{\partial(\Delta_1\bar\psi^{i,j})}=-\frac{1}{2}\mathrm{i}\gamma^0\psi^{i,j}.\end{aligned} \tag{35}$$

正则哈密顿量为

$$H_{\mathrm c}=\sum_j\Delta x^j[\pi^{i,j}\Delta_1\psi^{i,j}+\bar\pi^{i,j}\Delta_1\bar\psi^{i,j}-L_{\mathrm D}^{i,j}]. \tag{36}$$

因为正则变量 $\psi^{i,j}$, $\bar\psi^{i,j},\pi^{i,j}$ 和 $\bar\pi^{i,j}$ 都是 Grassmann 数, 因此, 它们之间的反对易关系为

$$\begin{aligned}\{\psi^{i,j},\ \bar\psi^{k,l}\}&=\{\pi^{i,j},\ \bar\pi^{k,l}\}=0,\\ \{\psi^{i,j},\ \pi^{k,l}\}&=\{\bar\psi^{i,j},\ \bar\pi^{k,l}\}=-\delta^{ik}\delta^{jl}.\end{aligned} \tag{37}$$

从正则动量的定义 (35), 我们发现正则动量的定义给出了正则动量和场变量之间的关系, 用 Dirac 的语言来说, 它们是初级约束. 将其标记为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varPhi}^{i,j}&=\pi^{i,j}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\bar\psi^{i,j}\gamma^0\approx 0,\\ \boldsymbol{\varPsi}^{i,j}&=\bar\pi^{i,j}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\gamma^0\psi^{i,j}\approx 0\\ i&=0,1,\cdots,M,\ j=0,1,\cdots,N.\end{aligned} \tag{38}$$

因此, 共有 $2(M+1)\times(N+1)$ 个约束. 由于内在约束 (38) 和边界条件 (34) 与基本的反对易关系 (37) 相矛盾, 因此, 我们必须对基本的反对易关系 (37) 进行适当的修改, 使其能够与内在约束和边界条件相容. 为此, 我们采用文献 [1] 的观点, 将边界条件 (32) 和内在约束 (38) 等同起来, 当作 Dirac 约束, 采用 Dirac 理论来研究此模型. 与上一节标量场类似, 我们只研究 $x=0$ 这一端, 另一端 $(x=\pi)$ 的结果, 可以通过相同的方法得到.

由此, 系统共有 $2(M+1)\times(N+1)+2(M+1)$ 个初级约束, 并且可以直接验证这些初级约束不会导致次级约束. 为了计算 Dirac 括号, 我们需要计算由这些约束之间的 Poisson 括号所构成的矩阵及其逆矩阵, 这个计算量无疑是比较大的. 为了简化计算, 我们借助文献 [17] 中的定理, 将计算过程分为两步: 第一步先计算由内在约束构成的中间 Dirac 括号, 然后再计算最终的 Dirac 括号. 我们将所有的内在约束 (38) 记为 $\boldsymbol{\varGamma}^{I,J}=(\boldsymbol{\varPhi}^{i,j},\boldsymbol{\varPsi}^{i,j})$, 则内在约束 $\boldsymbol{\varGamma}^{I,J}$ 之间的 Poisson 括号构成的矩阵为

$$\begin{aligned}&\{\boldsymbol{\varGamma}^{I,J},\boldsymbol{\varGamma}^{K,L}\}\\ &=-\mathrm{i}\gamma^0\underbrace{(\sigma_1\oplus\sigma_1\oplus\cdots\oplus\sigma_1)}_{M+1}\\ &\quad\otimes\underbrace{(\sigma_1\oplus\sigma_1\oplus\cdots\oplus\sigma_1)}_{N+1},\end{aligned} \tag{39}$$

其逆矩阵为

$$\begin{aligned}&\{\boldsymbol{\varGamma}^{I,J},\boldsymbol{\varGamma}^{K,L}\}^{-1}\\ &=\mathrm{i}\gamma^0\underbrace{(\sigma_1\oplus\sigma_1\oplus\cdots\oplus\sigma_1)}_{M+1}\\ &\quad\otimes\underbrace{(\sigma_1\oplus\sigma_1\oplus\cdots\oplus\sigma_1)}_{N+1}.\end{aligned} \tag{40}$$

由此, 计算得到正则变量之间的中间 Dirac 括号为

$$\begin{aligned}\{\psi^{i,j},\ \pi^{k,l}\}_{\mathrm{IDB}}&=-\frac{1}{2}\delta^{ik}\delta^{jl},\\ \{\psi^{i,j},\ \bar\psi^{k,l}\}_{\mathrm{IDB}}&=-\mathrm{i}\gamma^0\delta^{ik}\delta^{jl}.\end{aligned} \tag{41}$$

接下来, 我们利用中间 Dirac 括号, 计算由约束 (34) 决定的最终 Dirac 括号. 我们将约束 (34) 统一记为 $\boldsymbol{\varLambda}_I=(\boldsymbol{\varLambda}_i^{(0)},\ \bar{\boldsymbol{\varLambda}}_i^{(0)})$, $I=1,2,\cdots,2(M+1)$. 则约束 $\boldsymbol{\varLambda}_I$ 之间的中间 Dirac 括号构成的矩阵及其逆矩阵分别为

$$\{\boldsymbol{\varLambda}_I,\boldsymbol{\varLambda}_J\}_{\mathrm{IDB}}=-\mathrm{i}\gamma^0\underbrace{(\sigma_1\oplus\sigma_1\oplus\cdots\oplus\sigma_1)}_{N+1} \tag{42}$$

和

$$\{\boldsymbol{\varLambda}_I,\boldsymbol{\varLambda}_J\}_{\mathrm{IDB}}^{-1}=\mathrm{i}\gamma^0\underbrace{(\sigma_1\oplus\sigma_1\oplus\cdots\oplus\sigma_1)}_{N+1}. \tag{43}$$

正则变量 $\boldsymbol{\psi}^{i,j}$, $\bar{\boldsymbol{\psi}}^{i,j}$, $\pi^{i,j}$ 和 $\bar\pi^{i,j}$ 之间的 Dirac 括号由

$$\begin{aligned}\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\}_{\mathrm D}&=\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\}_{\mathrm{IDB}}-\{\boldsymbol{A},\boldsymbol{\varLambda}_I\}_{\mathrm{IDB}}\\ &\quad\times\{\boldsymbol{\varLambda}_I,\boldsymbol{\varLambda}_J\}_{\mathrm{IDB}}^{-1}\{\boldsymbol{\varLambda}_J,\ B\}_{\mathrm{IDB}}\end{aligned} \tag{44}$$

决定. 经过计算, 我们得到了最终的 Dirac 括号, 结果为

$$\begin{aligned}\{\psi^{i,j},\ \pi^{k,l}\}_{\mathrm D}&=-\frac{1}{2}\delta^{ik}\delta^{jl}+\frac{1}{2}\delta^{ik}\delta^{j0}\delta^{l0},\\ \{\bar\psi^{i,j},\ \bar\pi^{k,l}\}_{\mathrm D}&=-\frac{1}{2}\delta^{ik}\delta^{jl}+\frac{1}{2}\delta^{ik}\delta^{j0}\delta^{l0},\end{aligned}$$

$$\{\psi^{i,j},\ \bar{\psi}^{k,l}\}_{\mathrm{D}} = -\mathrm{i}\gamma^0\delta^{ik}\delta^{jl} + \mathrm{i}\gamma^0\delta^{ik}\delta^{j0}\delta^{l0}. \quad (45)$$

可以直接验证, 在空间内部, 即 $x \in (0,\ \pi)$, 以上 Dirac 括号与 (41) 式 (即无边界的情形) 一致, 并且在边界上与边界条件相符.

正则量子化通过如下的代换即可完成

$$\psi^{i,j} \to \hat{\psi}^{i,j},\ \bar{\psi}^{i,j} \to \hat{\bar{\psi}}^{i,j},\ \pi^{i,j} \to \hat{\pi}^{i,j},$$
$$\bar{\pi}^{i,j} \to \hat{\bar{\pi}}^{i,j},\ \{\quad,\quad\}_{\mathrm{D}} \to \frac{1}{i}[\quad,\quad]_{+}. \quad (46)$$

4 结 论

本文从离散的角度, 研究了带边界的经典标量场和 Dirac 场的正则量子化问题. 因为经典场被局限在有限空间中, 因而经典场在空间的边界上的行为 (即边界条件) 会与在空间内部有所不同, 因此必须区别处理. 我们采取了离散化的方案, 将边界条件作为初级 Dirac 约束来研究此问题. 与已有的研究不同的是, 我们将时间变量和空间变量都做了离散化的处理, 并且为了保持离散的能量守恒, 我们选取了非等步长的离散方案. 由于标量场是由"正规"拉氏量来描述的, 因此, 该模型相对来说较为简单, 没有内在约束, 量子化的过程显得比较直接. 但是 Dirac 场是由"奇异"拉氏量来描述的, 因此, 该模型中不仅仅具有边界条件, 而且还具有内在约束, 这就使得约束的数量大大增加; 并且内在约束和边界条件在空间的边界上会纠缠起来, 这些都为直接计算 Dirac 括号、进而实现正则量子化带来了一定的困难. 为此, 我们采用分两步走的方法, 将 Dirac 括号的计算分成两步进行. 即先计算由内在约束构成的"中间"Dirac 括号, 然后计算由剩余约束, 即边界条件构成的最终的 Dirac 括号, 这样就大大简化了计算过程. 作为本文结果的一个直接的自洽性检验, 可以验证, 本文最终得到的 Dirac 括号在空间边界上与边界条件自洽, 在空间内部与普通的 Dirac 括号一致.

在本文的模型中, 标量场不含内在约束, Dirac 场的内在约束是第二类的, 而边界条件作为 Dirac 约束也是第二类的, 因此不存在约束类别的突变. 事实上, 含有规范自由度的模型 (事实上, 这是我们最感兴趣的) 所含内在约束往往都是第一类的. 但是在空间的边界上, 内在约束与边界条件会纠缠在一起而变成第二类的约束, 也就是说, 约束类别的突变问题就会出现. 在研究这类模型的正则量子化时, 如何处理边界条件, 如何引入约束固定条件, 如何刻画内在约束在边界上的类别的突变, 这些都是需要进一步研究的问题.

参考文献

[1] Sheikh-Jabbari M M, Shirzad A 2001 *Eur. Phys. J. C* **19** 383

[2] Jing J 2005 *Eur. Phys. J. C* **39** 123

[3] Jing J, Long Z W 2005 *Phys. Rev. D* **72** 126002

[4] Long Z W, Chen L 2007 *High Energy Phys. and Nucl. Phys.* **31** 14 (in Chinese) [隆正文, 陈琳 2007 高能物理与核物理 **31** 14]

[5] Wang Q, Long Z W, Luo C B 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 100305 (in Chinese) [王青, 隆正文, 罗翠柏 2013 物理学报 **62** 100305]

[6] Dirac P A M 1964 *Lecture Notes on Quantum Mechanics* (1st Ed.) (New York: Yeshiva University) p8

[7] Faddeev L D, Jackiw R 1988 *Phys. Rev. Lett.* **60** 1692

[8] Long Z W, Jing J 2003 *Phys. Lett. B* **560** 128

[9] Jing J, Long Z W, Tian L J, Jin S 2003 *Euro. Phys. J. C* **29** 447

[10] Lee T D 1983 *Phys. Lett. B* **122** 217

[11] Ruth R D 1983 *IEEE Trans. Nucl. Sci.* **30** 1669

[12] Feng K 1985 *Proceedings of the 1984 Beijing Symposium on Differential Geometry and Differential Equations—Computation of Partial Differential Equations* (edited by Feng Keng) (Beijing: Science Press)

[13] Guo H Y, Wu K 2003 *J. Math. Phys.* **44** 5978

[14] Guo H Y, Wu K, Wang S K, Wang S H, Wang S K, Wei J M 2000 *Commu. Theor. Phys.* **34** 307

[15] Guo H Y, Li Y Q, Wu K 2001 *Commu. Theor. Phys.* **35** 703

[16] Xia L L, Chen L Q, Fu J L, Wu J H 2014 *Chin. Phys. B.* **23** 070201

[17] Gitman D M, Tyutin I V 1990 *Quantization of Fields with Constraints* (1st Ed.) (New York: Springer-Verlag) p276

物 理 学 报 Acta Phys. Sin. Vol. 64, No. 10 (2015) 100301

Canonical quantization of classical fields in finite volume*

Liu Bo[1)] Wang Qing[2)] Li Yong-Ming[3)] Long Zheng-Wen[4)†]

1) (*Department of Physics and Electronic, School of Science, Beijing University of Chemical Technology, Beijing 100029, China*)

2) (*College of Physics Science and Technology, Xinjiang University, Urumqi 830046, China*)

3) (*School of Information Science and Engineering, Xinjiang University, Urumqi 830046, China*)

4) (*Laboratory for Photoelectric Technology and Application, Department of Physics, Guizhou University, Guiyang 550025, China*)

(Received 16 October 2014; revised manuscript received 4 December 2014)

Abstract

We study the problem of canonical quantization of classical scalar and Dirac field theories in the finite volumes respectively in this paper. Unlike previous studies, we work in a completely discrete version. We discretize both the space and time variables in variable steps and use the difference discrete variational principle with variable steps to obtain the equations of motion and boundary conditions as well as the conservation of energy in discrete form. For the case of classical scalar field, the quantization procedure is simpler since it does not contain any intrinsic constraint. We take the boundary conditions as primary Dirac constraints and use the Dirac theory to construct Dirac brackets directly. However, for the case of classical Dirac field in a finite volume, things are complex since, besides boundary conditions, it contains intrinsic constraints which are introduced by the singularity of the Lagrangian. Furthermore, these two kinds of constraints are entangled at the spatial boundaries. In order to simplify the process of calculation, we calculate the final Dirac brackets in two steps. We calculate the intermediate Dirac brackets by using intrinsic constraints. And then, we obtain the final Dirac brackets by bracketing the boundary conditions. Our studies show that we can not only construct well-defined Dirac brackets at each discrete space-time lattice but also keep the conservation of energy discretely at the same time.

Keywords: canonical quantization, boundary conditions, Dirac constraints, Dirac brackets

PACS: 03.70.+k, 04.60.Ds **DOI:** 10.7498/aps.64.100301

* Project supported by National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10865003).

† Corresponding author. E-mail: sci.zwlong@gzu.edu.cn